И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

АВТОПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Математика 2002 № 15

Автоподобные фигуры, т. е. фигуры, части которых подобны целому, все больше и больше привлекают к себе внимание не только математиков, но и ученых самых различных областей знания.

Пропорциональность проявляется в подобном строении дерева и его ветвей, в формах кристаллов и снежинок, в сохранении одной клеткой живого организма всей информации о целом и т. д.

Автоподобие широко использовал в своих картинах известный голландский художник М.Эшер (1898-1972). Одна из его картин (рис. 1) взята в качестве иллюстрации обложки учебника И.М.Смирновой, В.А.Смирнова, Геометрия 7-9. М.: Мнемозина, 2003).

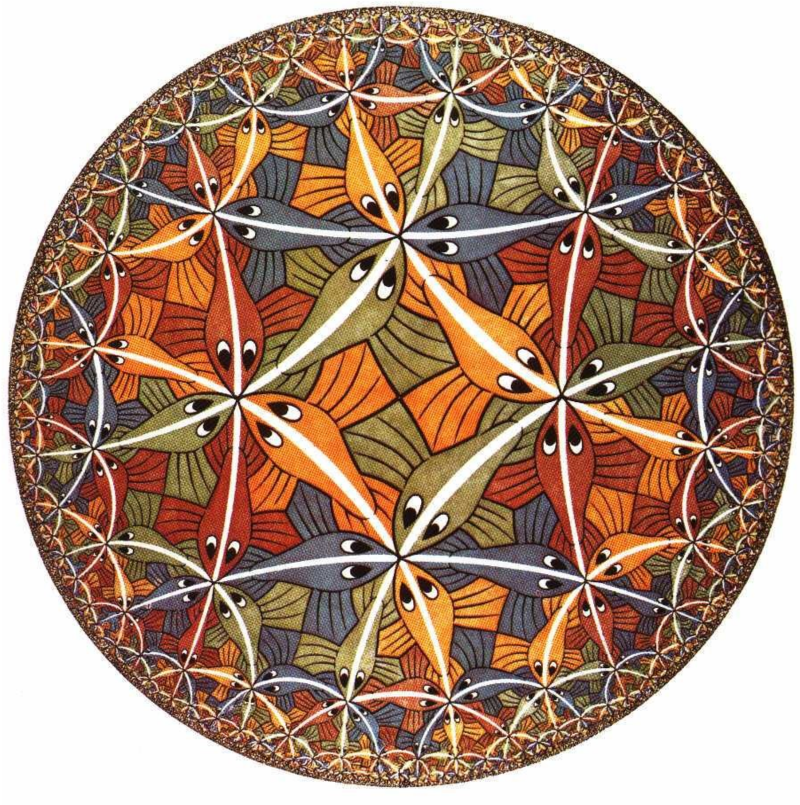


Рис. 1

Автоподобным фигурам уделено большое внимание в только что вышедшей вторым изданием в «Просвещении» книге А.В.Волошинова «Математика и искусство».

Примером автоподобной фигуры является золотая, иначе логарифмическая, спираль. В форме золотой спирали закручиваются раковины многих моллюсков, улиток (рис. 2), рога архаров. Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетает свою паутину по золотой спирали. Природа повторяет свои находки как в малом, так и в большом, например, семечки в подсолнухе располагаются по золотой спирали точно также, как закручиваются многие галактики, в частности и галактика Солнечной системы.

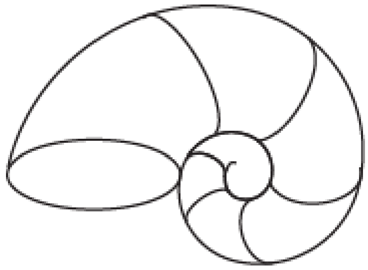


Рис. 2

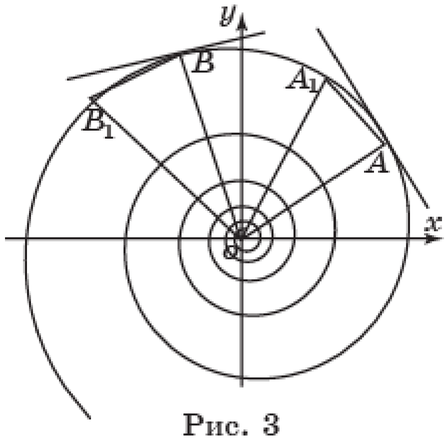


Рис. 3

В полярных координатах золотая спираль задается уравнением $r=a^{\varphi}$, где a - некоторое фиксированное положительное число, φ - угол, измеряемый в радианах (рис. 3).

Геометрическим свойством этой спирали является то, что каждый следующий ее виток подобен предыдущему. Действительно, если угол увеличивается на 2π, т. е. точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается в $a^{2\pi}$ раз. Это означает, что следующий виток подобен предыдущему и коэффициент подобия равен $a^{2\pi}$. Используя это свойство, построив один виток золотой спирали, все остальные витки можно получить подобием.

Другим геометрическим свойством золотой спирали является то, что в любой ее точке угол между касательной к ней и радиусом-вектором сохраняет постоянное значение.

Для доказательства напомним, что касательной к кривой в точке A называется предельное положение секущей AA_1 при A_1 стремящейся к A.

Пусть точки B, B_1 получены поворотом лучей OA и OA_1 на угол φ (рис. 3). Тогда треугольники OAA_1 и OBB_1 подобны, и поэтому углы OAA_1 и OBB_1 равны. При A стремящейся к A_1 эти углы дадут углы между касательными и радиусами-векторами в точках A и B соответственно. Следовательно, угол между касательной и радиусом-вектором не зависит от положения точек на золотой спирали, т. е. сохраняет постоянное значение.

Именно это свойство золотой спирали используется в различных технических устройствах. Например, при изготовлении вращающихся ножей, что позволяет сохранять при вращении постоянный угол резания. В гидротехнике по логарифмической спирали изгибают трубу, подводящую поток воды к лопастям турбины, благодаря чему напор воды используется с наибольшей производительностью.

Ночные бабочки, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Однако, если вместо луны они ориентируются на близко расположенный источник света, например, на пламя свечи, то инстинкт их подводит. Сохраняя постоянный угол между направлением полета и источником света, они двигаются по скручивающейся золотой спирали и попадают в пламя свечи.

В последние десятилетия возникло и развивается новое направление в геометрии – фрактальная геометрия. Фрактал (fractus) в переводе с латинского означает изломанный, дробный, и основным его свойством является автоподобность.

Один из первых примеров таких фигур был придуман в начале 20-го века немецким математиком Хельгой фон Кох (1870-1924) и называется звезда Кох. Для ее построения берется равносторонний треугольник и последовательно добавляются к нему новые, подобные ему, треугольники. На первом шаге стороны правильного треугольника (рис. 4, а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на правильные треугольники, подобные исходному.

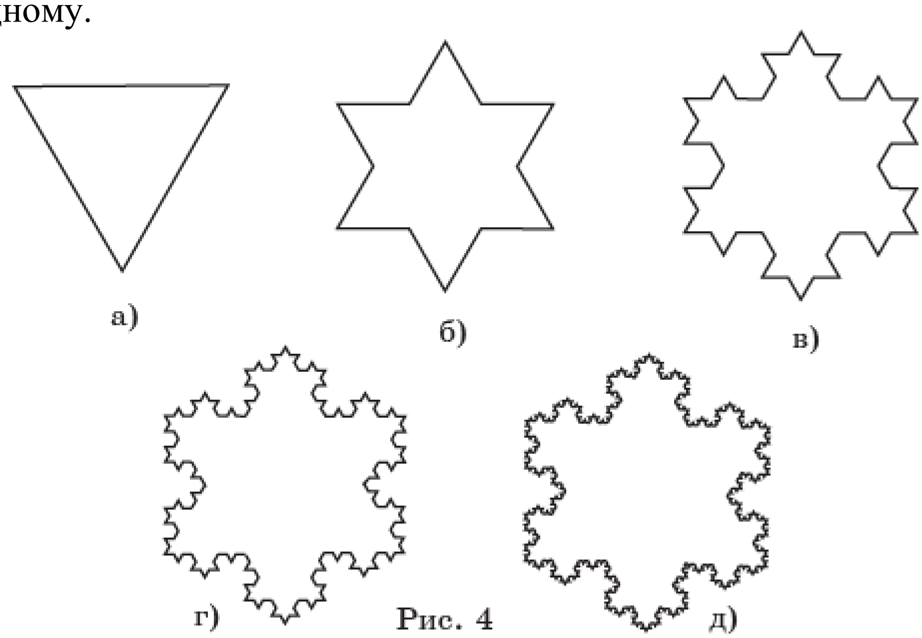


Рис. 4

В результате получается правильный звездчатый шестиугольник (рис. 4, б). Стороны этого шестиугольника снова разбиваются на три равные части, и их середины заменяются на правильные треугольники (рис. 4, в). Повторяя этот процесс, будем получать все более сложные многоугольники (рис. 4, г, д), все более приближающиеся к предельному положению – звезде Кох.

Приведенные рисунки были построены несколько иначе с помощью графического редактора Adobe Illustrator. Сначала из стандартных фигур, имеющихся в этом редакторе, был взят правильный треугольник. Затем с помощью поворотов вокруг вершин и копирования получили шесть равносторонних треугольников, сцепленных вершинами. Вырезав внутренние ребра, получили фигуру, изображенную на рисунке 4, б. После этого уменьшили эту фигуру и повторили с уменьшенной копией указанную выше процедуру. А именно, с помощью поворотов вокруг вершин и копирования получили шесть фигур, сцепленных вершинами. Вырезав внутренние ребра, получили фигуру, изображенную на рисунке 4, в, и так далее.

Выясним какова длина кривой, ограничивающей звезду Кох. Предположим, что сторона исходного равностороннего треугольника равна единице и, следовательно, его периметр равен трем. На следующем шаге число сторон увеличивается в четыре раза и длина каждой из них в три раза меньше исходной. Поэтому периметр правильного звездчатого шестиугольника будет равен $3 \cdot 4/3 = 4$. Аналогично, на каждом следующем шаге периметр многоугольника увеличивается в 4/3 раза, становясь все больше и больше. Из этого следует, что кривая Кох, к которой приближаются многоугольники, будет иметь бесконечную длину.

Вычислим площадь звезды Кох. Пусть площадь исходного равностороннего треугольника равна 1. На первом шаге мы добавляем три равносторонних треугольника, со сторонами в три раза меньшими исходных. Площадь каждого такого треугольника равна 1/9. Следовательно, площадь правильного звездчатого шестиугольника (рис. 4, б) равна 1+3/9=4/3. На следующем шаге добавляется двенадцать треугольников, суммарной площади 12/81. Поскольку длины сторон треугольников на каждом шаге уменьшаются в три раза, то их площадь уменьшается в девять раз. Число добавляемых треугольников равно числу сторон многоугольника и на каждом шаге увеличивается в четыре раза. Поэтому площадь S звезды Кох представляет собой площадь исходного треугольника плюс сумма геометрической прогрессии с начальным членом 3/9 и знаменателем 4/9. По формуле суммы геометрической прогрессии находим S=1+3/5=8/5.

Еще один вариант звезды Кох можно построить из квадратов, последовательным добавлением к исходному квадрату подобных ему квадратов.

На первом шаге стороны квадрата (рис. 5, а) разбиваются на три равные части и их середины заменяются на квадраты, подобные исходному (рис. 5, б). Стороны получившегося многоугольника снова разбиваются на три равные части и их середины заменяются на квадраты (рис. 5, в). Повторяя этот процесс, будем получать все более сложные многоугольники (рис. 5, г, д), все более приближающиеся к искомой фигуре.

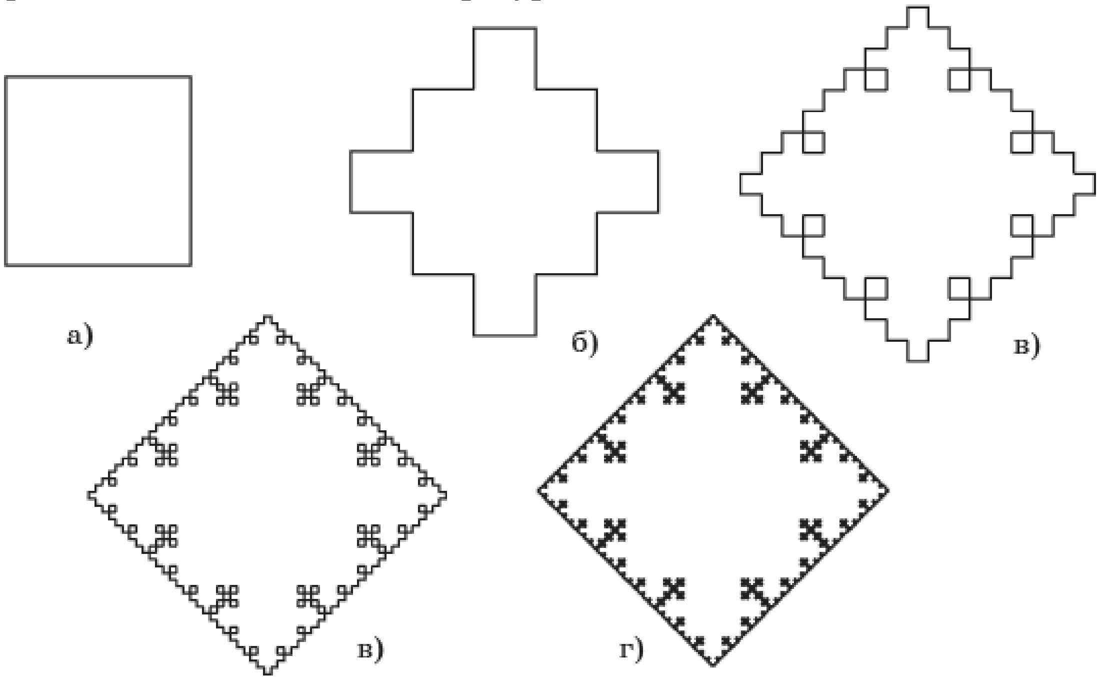


Рис. 5

На рисунках 6, 7 показаны фигуры Кох, построенные из окружностей.

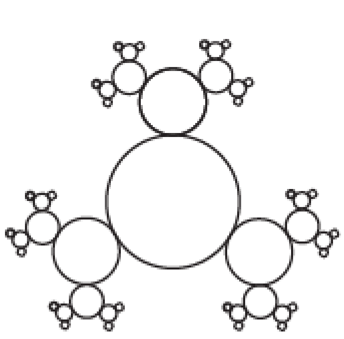


Рис. 6

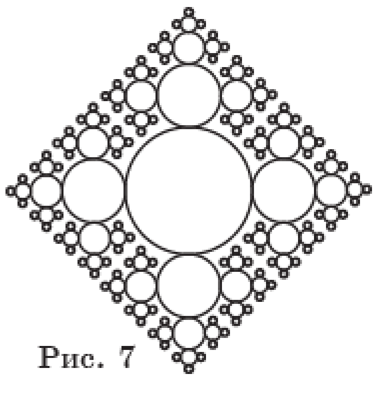
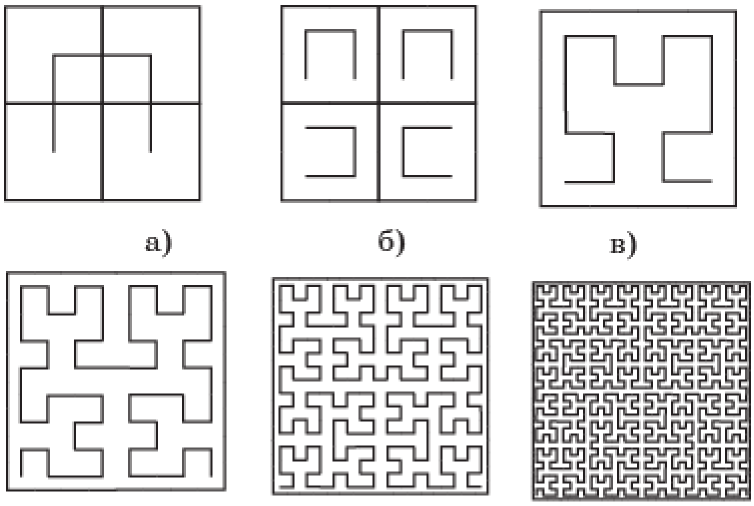


Рис. 7

Фигуры Кох можно рассмотреть на уроках геометрии при изучении подобных фигур, длины окружности, площади круга и др.

Еще один интересный пример кривой, получающийся последовательным приближением подобными многоугольниками, был получен Д.Пеано (1858-1932) и называется кривой Пеано. Для ее построения разобьем данный квадрат на четыре равные квадрата и соединим их центры тремя отрезками, как показано на рисунке 8,а.

Уберем внутренние стороны квадратов и из четырех их копий составим фигуру, изображенную на рисунке 8, б. Снова уберем внутренние стороны квадратов и соединим тремя отрезками концы ломаных, как показано на рисунке 8, в. Повторяя описанную процедуру, будем получать все более сложные ломаные (рис. 8, г, д, е), приближающиеся к кривой Пеано.



а) б) в)

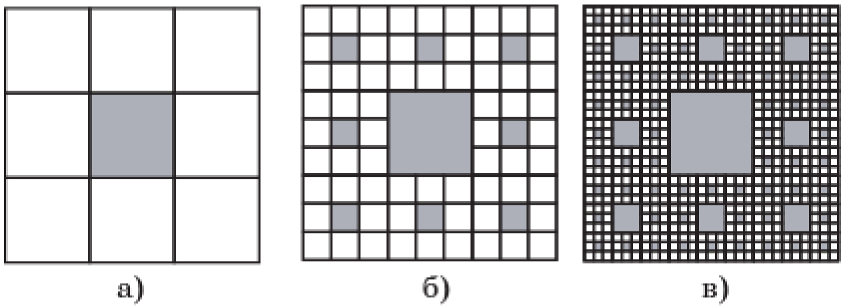
г) д) е)

Рис. 8

Отметим, что ломаные, участвующие в построении кривой Пеано, на каждом этапе проходят через все квадраты, а сами квадраты уменьшаются, стягиваясь к точкам исходного квадрата. Поэтому кривая Пеано будет проходить через все точки исходного квадрата, т.е. она будет полностью заполнять весь исходный квадрат. Конечно, она будет иметь бесконечную длину.

При изучении площадей плоских фигур можно рассмотреть автоподобную фигуру, придуманную польским математиком В.Серпинским (1882-1969) и называемую ковром Серпинского.

Она получается из квадрата последовательным вырезанием серединных квадратов. А именно, разделим данный квадрат на девять равных квадратов и серединный квадрат вырежем. Получим квадрат с дыркой (рис. 9, а).



а) б) в)

Рис. 9

Для оставшихся восьми квадратов повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и серединные квадраты вырежем (рис. 9, б). Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру (рис. 9, в). То, что остается после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского.

Отметим, что поскольку вырезаемые квадраты располагаются все более часто, то в результате на ковре Серпиского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки.

Вычислим площадь ковра Серпинского, считая исходный квадрат единичным. Для этого достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площади 1/9. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых имеет площадь 1/81. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом 1/9 и знаменателем 8/9. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице, т. е. площадь ковра Серпинского равна нулю.

Возьмем теперь квадрат, площади равной двум, и вырежем из него квадрат с тем же центром площади 1/2. Оставшуюся часть представим в виде восьми прямоугольников и в каждом из них вырежем квадрат с тем же центром площади 1/32. Таким образом, суммарная площадь маленьких квадратов будет равна 1/4. Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру, которую также называют ковром Серпинского.

Так же? как и раньше в этом ковре Серпиского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки. Однако, в отличие от обычного ковра Серпинского, его площадь будет отлична от нуля. Действительно, площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальным членом 1/2 и знаменателем 1/2, т. е. равна 1. Поэтому площадь оставшейся части будет равна единице.

Интересным примером автоподобной кривой является «кривая дракона», придуманная Э.Хейуэем. Для ее построения возьмем отрезок (рис. 10, а). Повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков (рис. 10, б). Повторим описанную процедуру. Повернем угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной (рис. 10, в). Повторяя описанную процедуру и уменьшая ломаные, будем получать все более сложные ломаные, напоминающие дракона (рис. 10, г - м).

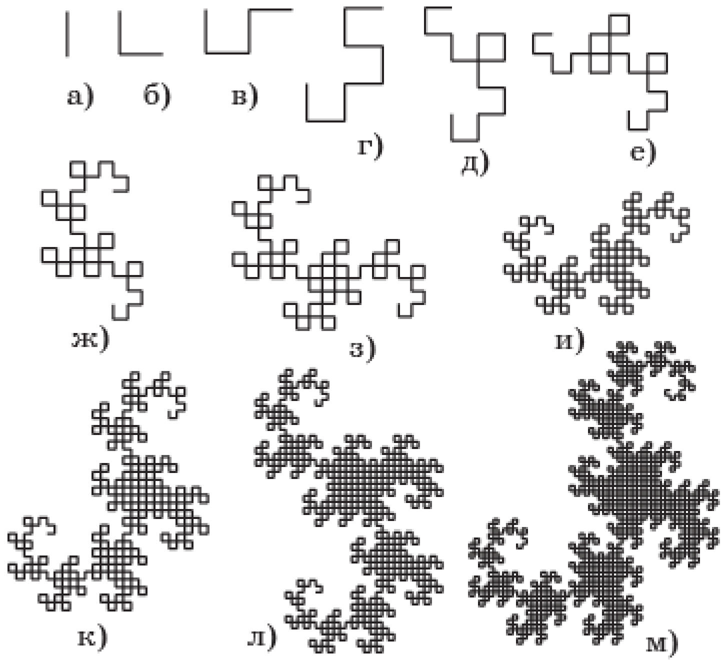


Рис. 10

Используя графический редактор Adobe Illustrator, можно строить золотую спираль, самые разнообразные звезды Кох, кривую Пеано, ковер Серпинского кривую дракона и др. Все рисунки в этой статье были получены с помощью этого редактора.