О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

В.А. Смирнов, д.ф.-м.н.,
И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov,
I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University,
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: вписанный треугольник, точки пересечения медиан, биссектрис, высот или их продолжений

Keywords: an inscribed triangle, the intersection points of medians, bisectors, heights, or their extensions

Annotation: the paper considers the properties of the intersection points of medians, bisectors and heights or their extensions of a triangle inscribed in a circle; the trajectories described by these points are established when one of the vertices of the triangle describes the entire circle

Аннотация: в работе рассматриваются свойства точек пересечения медиан, биссектрис и высот или их продолжений треугольника, вписанного в окружность; устанавливаются траектории, описываемые этими точками, когда одна из вершин треугольника описывает всю окружность

Начнём с наиболее простого случая – точки пересечения медиан. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в окружность (рис. 1).

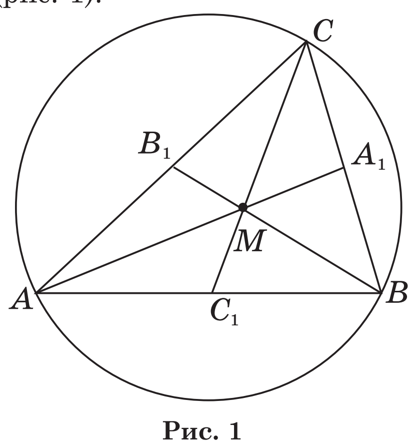

Рис. 1

Обозначим M точку пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1 данного треугольника. Зафиксируем положение стороны AB и предположим, что вершина C перемещается по окружности и делает полный оборот. Выясним, какую траекторию будет описывать точка пересечения медиан этого треугольника.

Так как отношение $C_1M : C_1C$ равно $1 : 3$, то точки M получаются гомотетией точек C с центром в точке C_1 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ (рис. 2).

Если вершина C перемещается по окружности и делает полный оборот, то точка M будет описывать окружность, получающуюся из исходной окружности гомотетией с центром C_1 и коэффициентом $\frac{1}{3}$ без точек пересечения этой окружности с отрезком AB (в таком случае треугольник ABC вырождается). Радиус такой окружности равен одной третьей радиуса

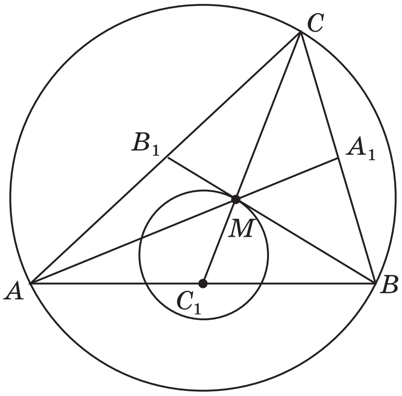

Рис. 2

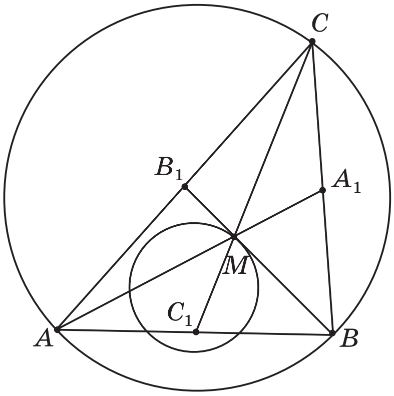

Рис. 3

исходной окружности.

Рассмотренную траекторию можно получить в компьютерной программе GeoGebra, об использовании которой написано в статьях [1, 2] и пособии [3].

Для этого нужно:

1) с помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу» построить окружность;

2) с помощью инструмента «Многоугольник» построить треугольник, вписанный в эту окружность;

3) с помощью инструмента «Середина или центр» отметить середины сторон данного треугольника;

4) посредством инструмента «Отрезок» провести медианы;

5) с помощью инструмента «Пересечение» получить точку пересечения медиан;

6) в свойствах этой точки выбрать строку «Оставлять след».

При перемещении вершины треугольника по окружности точка пересечения медиан будет перемещаться, и её след даст искомую траекторию (рис. 3).

Рассмотрим теперь точку O пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, вписанного в окружность (рис. 4).

Зафиксируем положение стороны AB

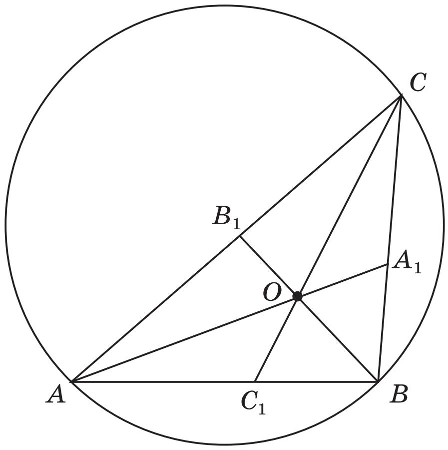

Рис. 4

и предположим, что вершина C перемещается по окружности и делает полный оборот. Выясним, какую траекторию будет описывать точка пересечения биссектрис этого треугольника.

Пусть меньшая дуга окружности, стягиваемая отрезком AB, составляет $2\varphi°$. Предположим, что точка C, перемещаясь по окружности, проходит большую дугу окружности, стягиваемую стороной AB. Так как угол C равен $\varphi°$, то угол AOB равен $90° + \frac{\varphi°}{2}$ (рис. 5). Значит, точка O принадлежит дуге некоторой окружности, стягивающей хорду AB, без самих точек A и B. Соответствующий вписанный угол

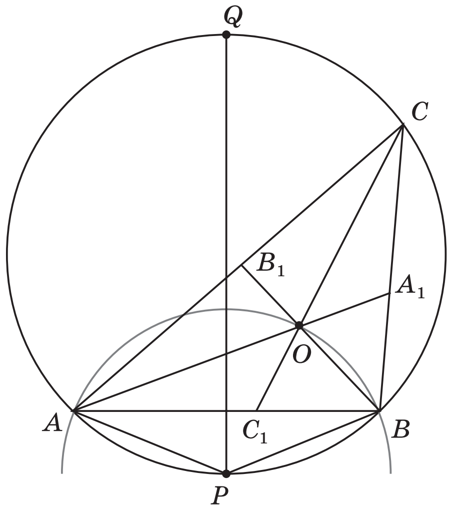

Рис. 5

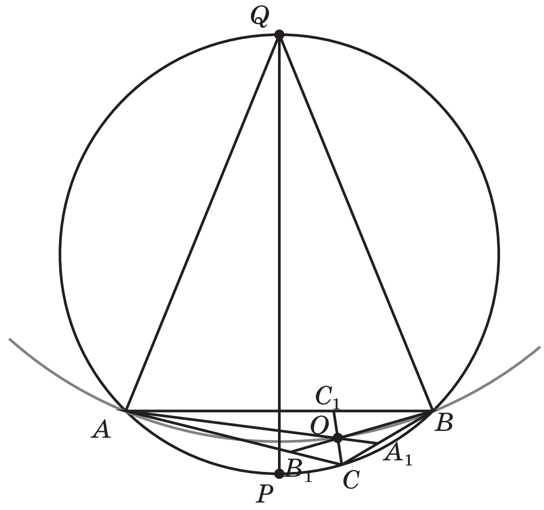

Рис. 6

этой окружности, опирающийся на данную дугу, равен $90° - \frac{\varphi°}{2}$. Следовательно, соответствующий центральный угол равен 180° – φ°, и центром окружности является точка P пересечения меньшей дуги исходной окружности с серединным перпендикуляром к отрезку AB.

Таким образом, если точка C, перемещаясь по окружности, проходит большую дугу окружности, стягиваемую стороной AB треугольника, то точка O описывает дугу окружности с центром в точке P и центральным углом APB, равным 180° – φ°. Радиус этой окружности равен

$$\frac{AB}{2\cos\frac{\varphi°}{2}}.$$

Аналогично, если точка C, перемещаясь по окружности проходит меньшую дугу окружности, стягиваемую стороной AB, то угол C равен 180° – φ°. Угол AOB равен $180° - \frac{\varphi°}{2}$ (рис. 6). Значит, точка O принадлежит дуге некоторой окружности, стягивающей хорду AB, без самих точек A и B. Соответствующий вписанный угол этой окружности, опирающийся на данную дугу, равен $\frac{\varphi°}{2}$. Следовательно, соответствующий центральный угол равен φ°. Значит, центром этой окружности является точка Q пересечения большей дуги исходной окружности с серединным перпендикуляром к отрезку AB.

Таким образом, если точка C, перемещаясь по окружности, проходит меньшую дугу окружности, стягиваемую стороной AB треугольника, то точка O описывает дугу окружности с центром в точке Q и центральным углом AQB, равным φ°. Радиус этой окружности равен

$$\frac{AB}{2\sin\frac{\varphi°}{2}}.$$

Окончательно получаем, что искомая траектория точки пересечения биссектрис треугольника ABC состоит из двух дуг окружностей, изображённых на рисунке 7, без их концов.

Аналогично тому, как это было сделано для точки пересечения медиан, описанную траекторию можно получить в компьютерной программе GeoGebra (рис. 8),

Рассмотрим теперь точку H пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 или их продол-

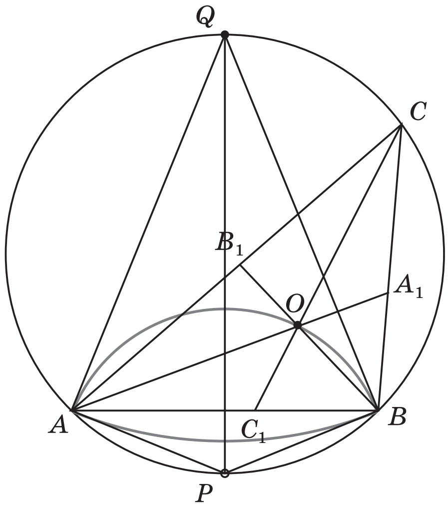

Рис. 7

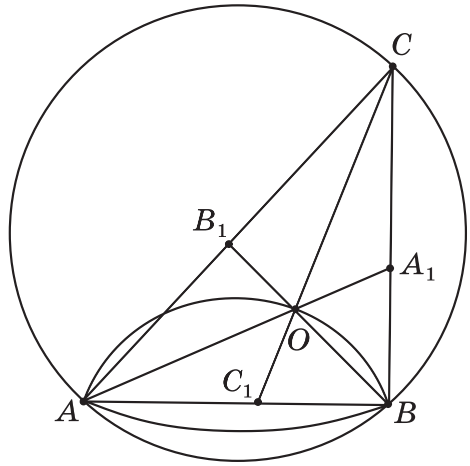

Рис. 8

жений треугольника ABC, вписанного в окружность (рис. 9).

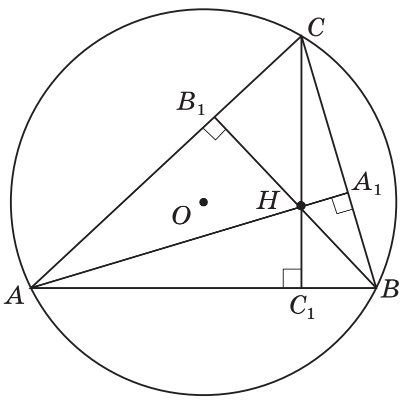

Рис. 9

Зафиксируем положение стороны AB и предположим, что вершина C перемещается по окружности и делает полный оборот. Выясним, какую траекторию будет описывать точка пересечения высот или их продолжений этого треугольника.

Угол AHB равен $180° - \angle C$. Следовательно, он является вписанным углом для окружности, симметричной данной относительно прямой AB.

Предположим, что точка C, перемещаясь по окружности делает полный оборот. В этом случае точка H будет описывать окружность, симметричную данной окружности относительно прямой AB, без самих точек A и B (рис. 10). Радиус этой окружности равен радиусу данной окружности.

Заметим, что окружность, описываемая точкой H, получается параллельным переносом исходной окружности в направлении, перпендикулярном прямой AB. Следовательно, длина отрезка CH не зависит от положения вершины C. В частности, для прямоугольного треугольника ABC (рис. 11) точка H совпадает с точкой B, и имеет место формула $CH = AB \cdot \operatorname{ctg}\angle ACB$. Значит, эта формула имеет место для любого положения вершины C треугольника ABC.

По аналогии с тем, как это было сделано для точки пересечения медиан, построенную траекторию можно получить в компьютерной программе GeoGebra и убедиться в том, что длина отрезка CH не зависит от положения вершины C на окружности (рис. 12),

Рассмотрим ситуацию, при которой сторона AB треугольника ABC фиксирована, а вершина C перемещается по прямой,

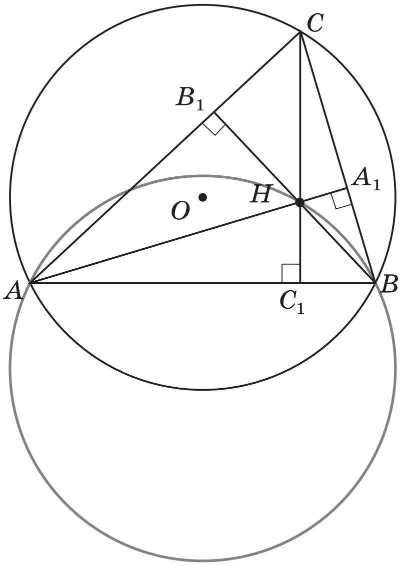

Рис. 10

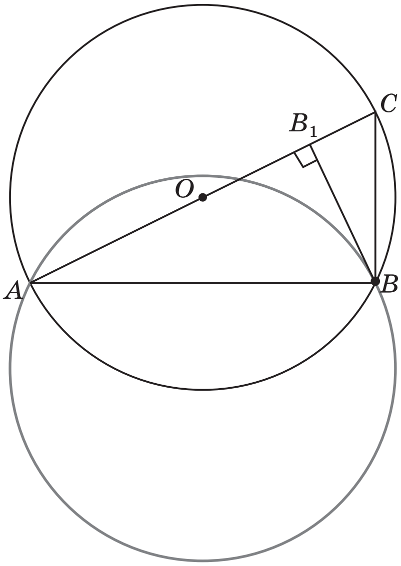

Рис. 11

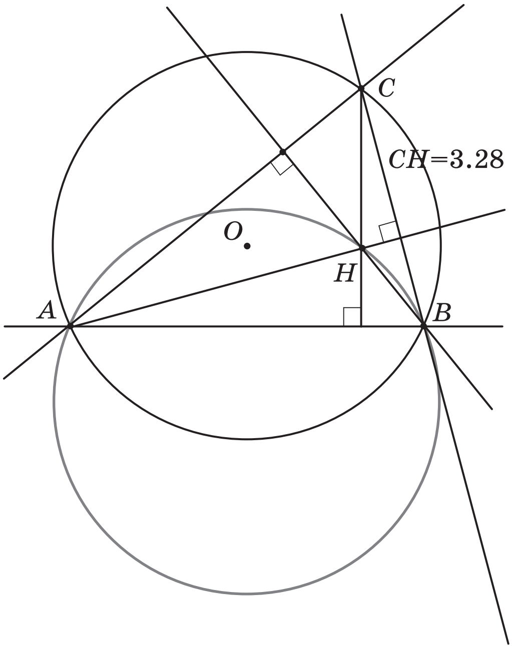

Рис. 12

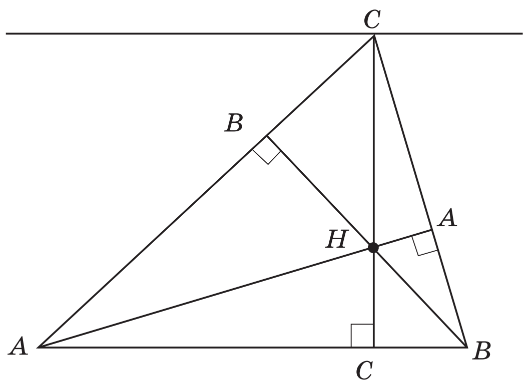

Рис. 13

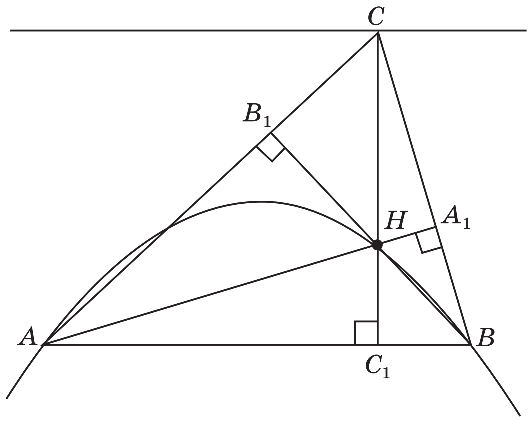

Рис. 14

параллельной прямой AB. Выясним, какую траекторию будет описывать точка H пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1 или их продолжений (рис. 13).

Введём систему координат, считая точку A в этой системе началом координат с координатами (0, 0) и $B(b, 0)$, $C(x, c)$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет координаты (x, c). Он является вектором нормали прямой, содержащей высоту BB_1. Следовательно, уравнение этой прямой имеет вид $x(x - b) + cy = 0$, или

$$y = \frac{bx - x^2}{c}.$$

Последнее уравнение задаёт параболу. Таким образом, траекторией, которую описывает точка H, является парабола (рис. 14).

Данную траекторию можно получить как след точки H в программе GeoGebra (рис. 15).

Попробуйте самостоятельно выяснить, какие траектории описывают точка пересечения медиан и точка пересечения биссектрис треугольника ABC, когда вершина C перемещается по прямой, параллельной прямой AB.

Получите эти траектории в программе GeoGebra.

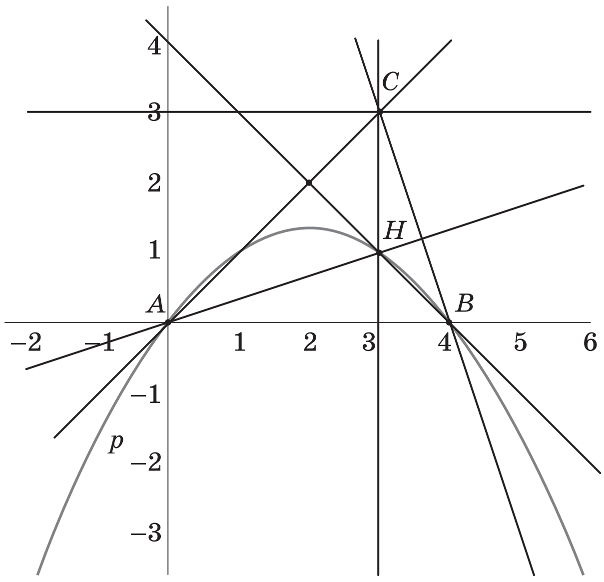

Рис. 15

Литература

1. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Как сделать изучение теорем геометрии более эффективным? // Математика в школе. – 2017. – № 3. – С. 34–39.

2. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Визуализация задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми // Математика в школе. – 2019. – № 6. – С. 10–16.

3. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. – М.: Прометей, 2018. – 206 с.