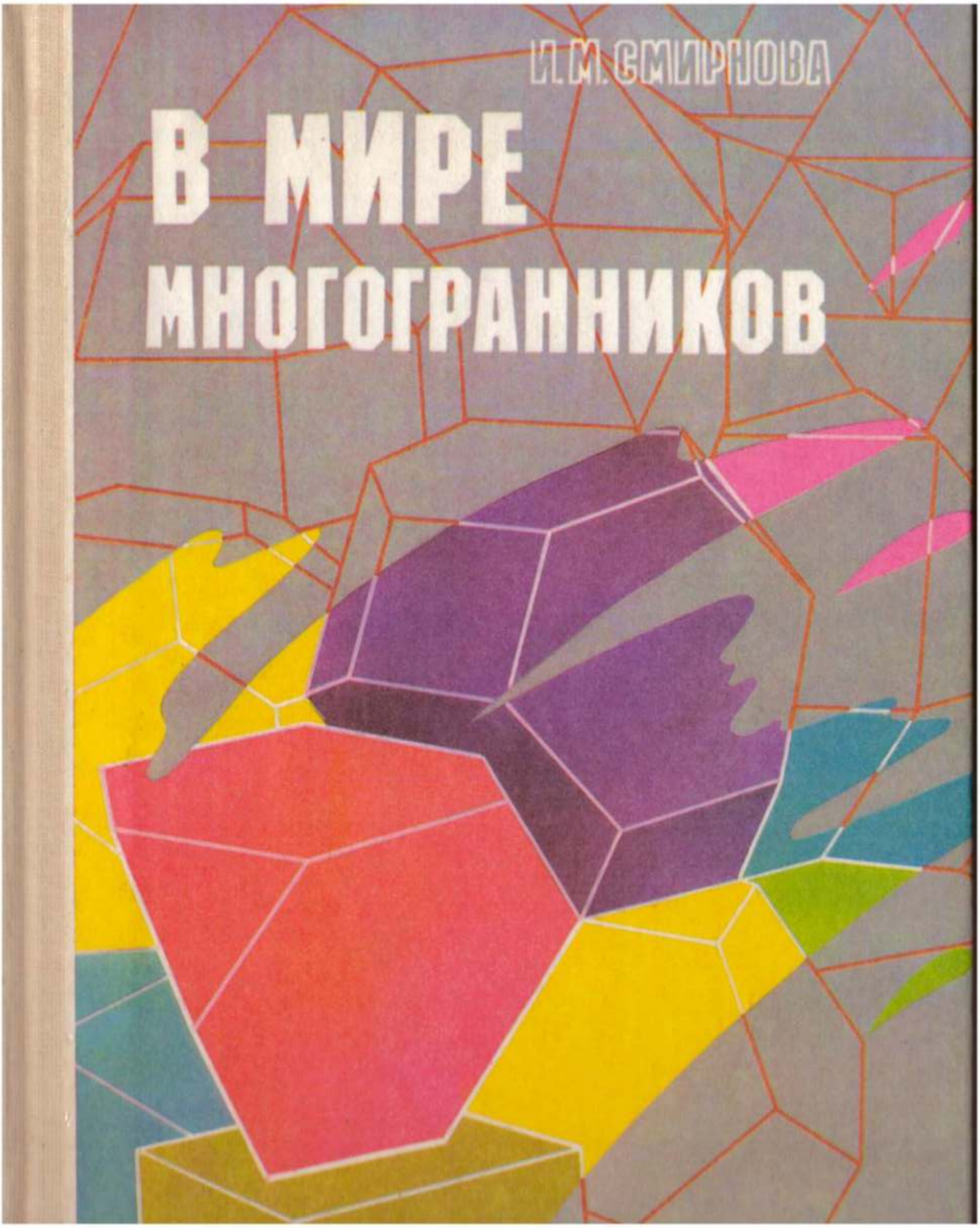

И. М. СМИРНОВА
В МИРЕ
МНОГОГРАННИКОВ

ББК 22.151
С50

Рецензенты

кандидат технических наук,
доцент кафедры геометрии РГПИ *Г. Я. Куприянова*;
учитель-методист школы № 526 Санкт-Петербурга *А. А. Окунев*

Смирнова И. М.

С50 В мире многогранников: Кн. для учащихся.— М.: Просвещение, 1995.— 144 с.: ил.— ISBN 5-09-004620-4.

В книге ведется серьезный и увлекательный разговор о многогранниках, представлены интересные их свойства. Читатель познакомится с яркими приложениями многогранника в кристаллографии, линейном программировании, строительстве, живописи, архитектуре.

Теоретические сведения приводятся с объяснениями, лаконичными доказательствами, с привлечением достаточного количества иллюстраций. Предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Книга адресована учащимся старших классов и всем увлекающимся математикой.

С $\frac{4306020000-116}{103(03)-95}$ Уточн. пл. 1995 г., № 147

ББК 22.151

ISBN 5-09-004620-4

Предисловие

Книга, предлагаемая вашему вниманию, посвящена увлекательному разделу геометрии — теории многогранников.

Чем же так привлекательны многогранники?

С одной стороны, они имеют тысячелетнюю историю. Первые упоминания о многогранниках известны еще у египтян и вавилонян за 3000 лет до нашей эры. В то же время теория многогранников — современный раздел математики. Глубокие результаты в ней получены отечественными математиками: Б. Н. Делоне, А. Д. Александровым, А. В. Погореловым.

Теория многогранников тесно связана с другими разделами современной математики: топологией, теорией графов. Она имеет большое значение не только для теоретических исследований по геометрии, но и для практических приложений в других разделах математики, например в алгебре, теории чисел, в естествознании, в бурно развивающихся в последние десятилетия областях прикладной математики — линейном программировании, теории оптимального управления.

Многогранники интересны и сами по себе. Они выделяются необычными свойствами, самое яркое из которых формулируется, пожалуй, в теореме Эйлера о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника. Многогранники имеют красивые формы, например правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с такими знаменитыми учеными древности, как Пифагор, Евклид, Архимед.

Формы многогранников находят широкое применение в конструировании сложных и красивых многогранных поверхностей, которые используются в реальных архитектурных проектах. Идет это с глубокой древности. Пирамида — это норма тектоники — внутреннего устройства каменных зданий прошлого. Силуэты каменных церквей и соборов, как правило, вписываются в форму пирамиды.

«Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора» — это высказывание принадлежит великому французскому архитектору нашего столетия Ле Корбюзье (1887—1965).

В этой книге вы познакомитесь с удивительно разнообразным миром кристаллов, являющихся природными многогранниками. Будет показано, что свойства кристаллов, рассмотренные на уроках физики и химии, определяются особенностями геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Весь материал книги разбит на отдельные параграфы. В них рассматриваются вопросы истории теории многогранников, ее прикладные аспекты, связь с современностью. Приводятся решения некоторых задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения (задачи или вопросы, помеченные знаком ●, требуют особого размышления).

Приведем другие обозначения, использованные в книге:

A — точка A;

$A \in \Phi$ — точка A принадлежит фигуре Φ;

$A \notin \Phi$ — точка A не принадлежит фигуре Φ;

$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение фигур Φ_1 и Φ_2;

$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — объединение фигур Φ_1 и Φ_2;

$[AB]$ — отрезок AB;

(AB) — прямая AB;

α — плоскость α;

(ABC) — плоскость, проходящая через точки A, B и C.

По мере необходимости в тексте даются рекомендации по литературе для углубленного изучения соответствующего вопроса.

Итак, предлагаем отправиться в путешествие в мир многогранников.

С чего все начиналось?

Вы, дорогой читатель, наверное, знаете, что геометрия как теоретическая наука стала складываться в Древней Греции в период с VII по III век до нашей эры. Известны, правда, и более ранние сведения о геометрии, в частности о многогранниках, но это были отдельные разрозненные факты.

Так, например, многогранники были известны в Древнем Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них — пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой достигает 146,5 м.

Заметим, что над ее сооружением трудились ежедневно около 100 000 человек в течение 20 лет.

Источником наших сведений о египетской математике являются два папируса. Один из них, так называемый Московский, содержит самый замечательный результат в египетских измерениях — формулу для вычисления объема правильной усеченной пирамиды.

После перевода на современный математический язык она принимает следующий вид:

$$V=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right),$$

где h — высота, a и b — стороны верхнего и нижнего оснований правильной усеченной пирамиды.

В Древней Греции основную роль в развитии геометрии сыграли так называемые философские школы, самыми известными были школы Фалеса, Пифагора, Платона, Александрийская и др.

Фалес (635—548 гг. до н. э.) из Милета определил высоту предмета по его тени, пользуясь тем, что ему было известно, что треугольник определяется одной стороной и двумя прилежащими к ней углами. Он измерял высоту пирамиды, «наблюдая тень пирамиды в тот момент, когда наша тень имеет такую же длину, как и мы сами». Фалес измерял высоту пирамиды, считая, что отношение длины вертикально поставленной палки к длине ее тени равно отношению высоты пирамиды к длине ее тени. Этим Фалесу приписывается теорема о том, что равноугольные треугольники имеют пропорциональные стороны.

В V веке до нашей эры центром дальнейшего прогресса математики становится Южная Италия. Ведущая роль в развитии математики этого периода принадлежит Пифагору (570—470 гг. до н. э.).

Пифагорейцы занимались изучением правильных многоугольников. Даже отличительным знаком их братства был правильный звездчатый пятиугольник. Именно школе Пифагора приписывают открытие существования пяти типов правильных выпуклых многогранников, которые использовались для философских космологических теорий. Согласно этим теориям элементы первоосновы бытия: огонь, земля, воздух, вода — имеют форму правильных многогранников, соответственно правильного тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра (рис. 1). Форму правильного додекаэдра (рис. 2) имела вся Вселенная.

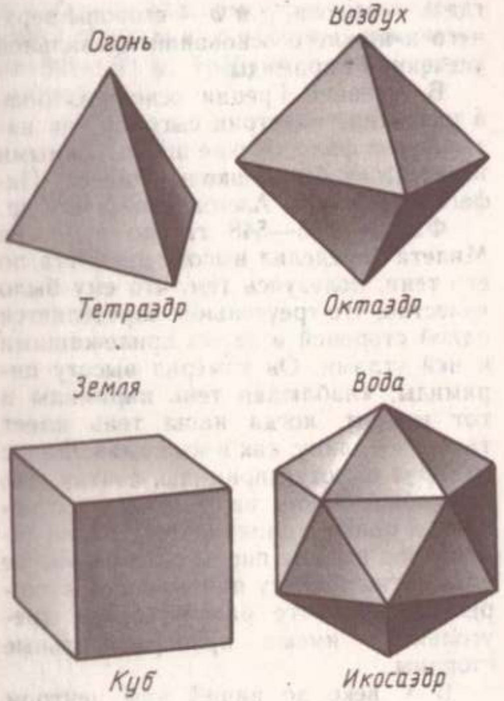
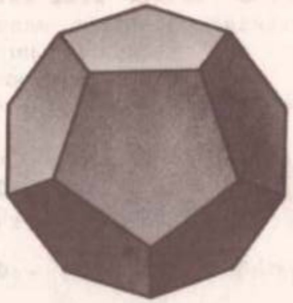


Рис. 1



Додекаэдр

Рис. 2

Пифагорейцы показали также, как заполнить плоскость правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками. Интересно отметить, что Пифагор и его последователи считали наиболее удобным излагать свое учение в книгах по системе кубов. Они установили, что куб состоит из 216 строк и что каждое сочинение не должно превышать трех кубов. Если куб бросить на плоскость, то он встанет на одну из граней и будет устойчиво стоять подобно игральной кости на доске стола. Свою систему пифагорейцы назвали системой кубов, по-видимому, потому, что названное выше число строк, брошенное словно игральная кость в человеческий разум, прочно запечатляется в памяти. (Заметим, что $216 = 6 \cdot 6 \cdot 6$.)

Другой знаменитой философской школой была школа Платона (V—IV вв. до н. э.). Ее основатель — Платон не был математиком и не получил никаких результатов в этой науке, но в своих многочисленных произведениях любил говорить о математике. В частности, в трактате «Тимей» он изложил учение пифагорейцев о правильных многогранниках, которые именно поэтому стали называться платоновыми телами.

Более поздняя школа — Александрийская. В 334 году до нашей эры Александр Македонский начал завоевание Персии. После его смерти в 323 году до нашей эры весь Ближний Восток был в руках греков. Началась эпоха эллинизма, которая дала миру трех знаменитых ученых: Евклида, Архимеда, Аполлония.

К сожалению, сведения о жизни Евклида не дошли до нас. Известно только, что жил он около 300 года до нашей эры, что расцвет его творчества приходится на александрийский период развития эллинской культуры и науки, когда после смерти Александра Македонского и распада его огромной империи на первое место по своему экономическому, политическому и культурному значению выдвинулся город Александрия, новопостроенная столица Египта.

Евклид является центральной фигурой этого периода, а вместе с тем и всей древнегреческой математической науки. При царе Птолемее он преподавал математику в Александрии и был основателем математического отделения музея, учрежденного Птолемеем. Сохранилось несколько достоверных рассказов о Евклиде. В одном из них повествуется о том, что царь Птолемей обратился к Евклиду с вопросом, не существует ли более короткого пути к познанию геометрии, чем изучение «Начал». Евклид гордо ответил царю, что в геометрии нет особого — царского пути. Из работ, написанных Евклидом, главным произведением являются «Начала». Оно состоит из 13 книг. Из них книги I—VI посвящены планиметрии, книги VII—IX — арифметике, книга X — несоизмеримым величинам. Книги XI—XIII посвящены стереометрии. В них излагаются начала стереометрии, определяются отношения площадей кругов, объемов пирамид и других тел, излагается теория правильных выпуклых многогранников.

Книга XI начинается с определений, среди которых, например, определение тела и его поверхности, а именно: «Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину. Граница же тела есть его поверхность». Далее в книге идут определения пирамиды, призмы, правильных многогранников. Это описательные определения, например: «Куб есть телесная фигура, заключающаяся между шестью равными квадратами».

В книге XII приводится вычисление объема пирамиды с помощью метода исчерпывания (получившего это название лишь в XVII веке).

Книга XIII посвящена теории правильных многогранников.

«Начала» Евклида имеют огромное историческое значение. Их даже сопоставляли с Библией по влиянию на науку и культуру цивилизованных народов. Переведенные на все языки «Начала» почти до конца XVIII столетия оставались единственным учебником, по которому изучали геометрию в университетах и школах Европы, единственным источником всякого геометрического познания.

Кроме Евклида, крупным ученым эпохи эллинизма был Архимед (287—212 гг. до н. э.), живший в Сиракузах, где он был советником царя Герона. Архимед — один из немногих ученых античности, которых мы знаем не только по имени: сохранились некоторые сведения о его жизни и личности. Мы знаем, что он был убит, когда римляне взяли Сиракузы, при осаде которых техническое искусство Архимеда было использовано защитниками города. Архимед был уникальным ученым — механиком, физиком, математиком. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение его трудов интересным для ученых многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема находится в трактате по гидростатике «О плавающих телах»; в современных школьных учебниках по физике она называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений ученого известна катапульта — «архимедов винт», иногда его называют еще «кохлея» (улитка). Использовалось это устройство как оборонное сооружение.

Наиболее существенный вклад Архимед внес все же в математику. Ему принадлежат теоремы о площадях плоских фигур, объемах тел. В работе «Измерение круга» он нашел приближенное выражение для вычисления длины окружности с помощью вписанных и описанных многоугольников. В книге «О шаре и цилиндре» мы находим выражение для вычисления площади поверхности сферы и т. д.

Вслед за Евклидом Архимед занимался изучением правильных многогранников. Убедившись в том, что нельзя построить шестой многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число ребер. Получились так называемые равноугольно полуправильные многогранники. До нас дошла работа самого ученого, которая называется «О многогранниках», подробно описывающая тринадцать таких многогранников, получивших название тела Архимеда. (Более подробно теория этих многогранников будет представлена в разделе «Тела Архимеда и Кеплера — Пуансо».) Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и, хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на своей могиле начертить цилиндр и содержащийся в нем шар и указать соотношение между объемами этих тел. Позже именно по памятнику с этим изображением и была найдена могила великого ученого.

Еще одним крупным ученым той эпохи, занимавшимся изучением многогранников, был Аполлоний (260—170 гг. до н. э.). Ему принадлежит теорема о том, что отношение объемов октаэдра и икосаэдра равно отношению площадей их поверхностей (задача Аполлония).

Итак, к началу нашей эры ученые древности накопили достаточно сведений по теории многогранников. Они описали комбинаторные свойства (связанные с количеством граней, вершин, ребер) основных простейших выпуклых многогранников — призм, пирамид, правильных многогранников, знали метрические свойства этих многогранников, в том числе умели вычислять объем пирамиды, применяя метод исчерпывания, использовали многогранники в строительстве и архитектуре.

Литература

Глейзер Г. И. История математики в школе: IX—X кл.: Пособие для учителей.— М.: Просвещение, 1983.

Начала Евклида. Книги XI—XV /Пер. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского; Под ред. И. Н. Веселовского.— М., Л.: Гостехиздат, 1950.

Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики.— 5-е изд.— М.: Наука, 1990.

Что такое многогранник?

В этом параграфе предлагается подробно обсудить определение многогранника, которое дается в современных школьных учебниках геометрии. Например: «*Многогранник* — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников» (Погорелов А. В. Геометрия: Учебник для 7—11 классов средней школы.— М.: Просвещение, 1991.— С. 296).

При этом понятия тела, поверхности тела или его границы нуждаются в уточнении. Хотя они имеют довольно наглядный смысл, их строгое определение является сложным и использует начальные понятия такого раздела математики, как топология. К этим понятиям относятся понятия: внутренняя и граничная точки, внутренность, граница, связность, ограниченность. Рассмотрим их более подробно. Для этого обратимся к рисунку 3.

Точка A пространственной фигуры Ф называется *внутренней*, если вблизи этой точки нет точек, не принадлежащих фигуре Ф, т. е. существует шар с центром в точке A, целиком лежащий в фигуре Ф.

Точка B в пространстве называется *граничной* точкой фигуры Ф, если сколь угодно близко от точки B имеются как точки, принадлежащие фигуре Ф, так и точки, не принадлежащие фигуре Ф, т. е. любой шар с центром в точке B содержит как точки, принадлежащие фигуре Ф, так и точки, не принадлежащие фигуре Ф (рис. 3).

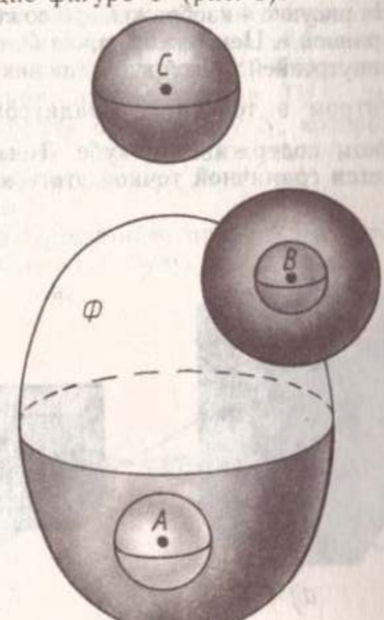


Рис. 3

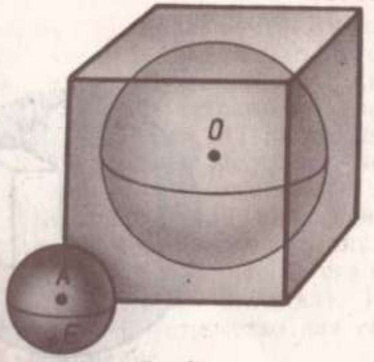


Рис. 4

● На рисунке 3 точка C — *внешняя* точка фигуры Ф. Попытайтесь дать определение внешней точки фигуры.

Итак, для любой точки пространства по отношению к некоторой фигуре Ф есть только три возможности: быть внутренней, граничной или внешней.

На рисунке 4 изображен куб со стороной, равной 1. Центр куба, точка O, является внутренней точкой куба, так как шар с центром в точке O и радиусом $\frac{1}{2}$ целиком содержится в кубе. Точка A является граничной точкой этого куба, поскольку любой шар с центром в точке A содержит точки, принадлежащие кубу (например, точка A), и точки, не принадлежащие кубу (например, точка E).

Внутренностью фигуры Ф называется фигура $\mathring{\Phi}$, состоящая из всех ее внутренних точек. Фигура Ф называется *открытой*, если $\Phi=\mathring{\Phi}$. Примером открытой фигуры является все пространство.

Границей фигуры Ф называется фигура $\Gamma(\Phi)$, состоящая из всех граничных точек фигуры Ф. Фигура Ф называется *замкнутой*, если она содержит свою границу, т. е. $\Gamma(\Phi)\subset\Phi$. Например, куб является замкнутой фигурой, его граница состоит из шести квадратов. Шар также является замкнутой фигурой, его границей является сфера того же радиуса, центр которой совпадает с центром шара.

Фигура Ф называется *связной*, если любые две ее точки можно соединить содержащейся в ней ломаной или даже отрезком.

На рисунке 5, *а*, *б* изображены две связные фигуры — пятиугольная призма и многоугольник с двумя сквозными отверстиями, или дырами (окнами).

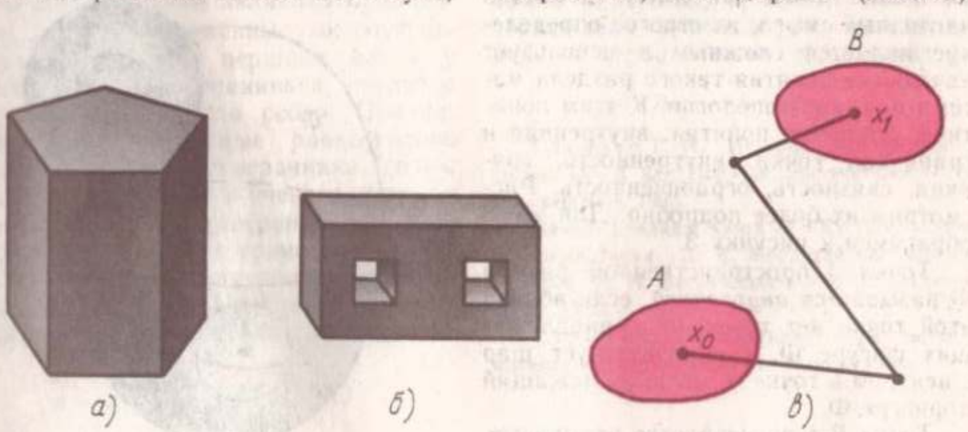


Рис. 5

● Как вы думаете, чем отличается связность фигур, изображенных на рисунках 5, *а* и 5, *б*?

Обратимся теперь к рисунку 5, *в*. Рассмотрим фигуру $\Phi=A\cup B$, где A и B — некоторые фигуры. *Объединением* двух или нескольких фигур называется фигура, состоящая из всех точек этих фигур. Пересечением двух или нескольких фигур называется фигура, состоящая из их общих точек.

Фигура Ф на рисунке 5, *в* не является связной, нашлись две точки, например точка $x_0\in A$ и точка $x_1\in B$, такие, что никакая ломаная, их соединяющая, не будет целиком лежать в Ф.

Из определения связности фигуры и приведенных примеров ясно, что наглядно связность означает, что фигура является как-будто однокусочной, состоит из одного «куска».

Открытая связная фигура называется *пространственной областью*. Например, внутренность куба является пространственной областью.

Фигура Ф называется *ограниченной*, если существует шар, целиком содержащий фигуру Ф. Например, куб на рисунке 4 является ограниченной фигурой, так как содержится в шаре радиуса $\sqrt{3}$ с центром в точке A. Примером неограниченных фигур являются прямая, полуплоскость, плоскость, пространство.

Телом называется ограниченная пространственная область вместе со своей границей. Другими словами, если фигура Т — тело, то выполняются два условия:

1. Т ограничена и связна.
2. $\Gamma(\mathrm{T})=\Gamma(\mathring{\mathrm{T}})$.

Примерами тел могут служить шар, куб, конус, бипирамида (на рисунке 6 изображена пятиугольная бипирамида). Плоские фигуры, полупространство, внутренность какого-нибудь многогранника не являются телами.

Пусть X и Y — тела. Будет ли телом $X\cap Y$? Не всегда; например, на рисунке 7 изображены два тела — две пирамиды, имеющие общую вершину S. Точка S не является телом.

А будет ли телом $X\cup Y$? Не всегда. Обратимся опять к рисунку 7. В данном случае объединение двух пирамид не будет телом, так как внутренность $X\cup Y$ несвязна (X, Y — пирамиды). Чтобы показать это, достаточно взять две точки таким образом, что одна принадлежит X, а другая Y. Тогда любая ломаная, проведенная в $X\cup Y$, должна пройти через точку S, которая не является внутренней точкой $X\cup Y$. Таким образом, $X\cup Y$ не является телом.

● Придумайте примеры, в которых $X\cap Y$ и $X\cup Y$ будут телами, если X и Y — тела.

Рис. 6

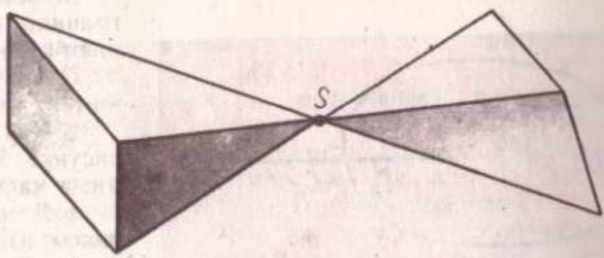


Рис. 7

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть A — внутренняя точка фигуры Ф, B — точка, не принадлежащая фигуре Ф. Тогда отрезок, соединяющий точки A и B, содержит хотя бы одну граничную точку фигуры Ф.*

Доказательство. Разделим отрезок AB пополам и рассмотрим его середину, C_1. Она либо принадлежит, либо не принадлежит фигуре Ф. В первом случае возьмем правую половину отрезка AB, а во втором — его левую половину (рис. 8). В том и другом случае у взятого отрезка левый конец принадлежит фигуре Ф, а правый не принадлежит Ф.

Разделим полученный отрезок пополам точкой C_2 и, повторив описанную выше процедуру, опять получим отрезок, левый конец которого принадлежит фигуре Ф, а правый не принадлежит Ф. Повторяя деление отрезков пополам, получим последовательность отрезков, левые концы которых принадлежат Ф, а правые не принадлежат Ф. Обозначим через C точку, являющуюся пересечением всех этих отрезков. Тогда сколь угодно близко от нее имеются точки, принадлежащие Ф (левые концы отрезков), и сколь угодно близко от нее имеются точки, не принадлежащие Ф (правые концы отрезков). Следовательно, C — искомая граничная точка фигуры Ф.

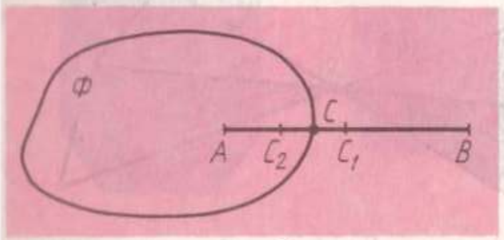


Рис. 8

Задачи

1. Для перечисленных ниже пространственных фигур Ф укажите точки, которые являются граничными, и точки, которые не являются граничными: а) Ф — шар; б) Ф — сфера; в) Ф — плоскость; г) Ф — пространство.

2. Из перечисленных в задаче 1 фигур укажите те, для которых $Ф = \bar{Ф}$, и те, для которых $Ф \neq \bar{Ф}$.

3. Укажите фигуры, рассмотренные в задаче 1, которые являются ограниченными, не являются ограниченными.

4. Докажите, что объединение двух ограниченных фигур является ограниченной фигурой.

5. Укажите фигуры, рассмотренные в задаче 1, которые являются замкнутыми.

6. Укажите фигуры, рассмотренные в задаче 1, которые являются: а) связными; б) несвязными. Приведите пример связной фигуры, в которой не любые пары точек можно соединить отрезком.

7. Укажите фигуры, рассмотренные в задаче 1, которые являются: а) телом; б) не являются телом. Почему?

● Чем отличаются многогранники от других тел, например шара, цилиндра, конуса?

Итак, с учетом всего вышесказанного дадим следующее определение многогранника:

Многогранником называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.

Пользуясь этим определением, скажите:

● Какие из фигур, указанных на рисунке 9, являются многогранниками, а какие нет? Почему?

● Всегда ли является многогранником: а) объединение двух многогранников; б) пересечение двух многогранников?

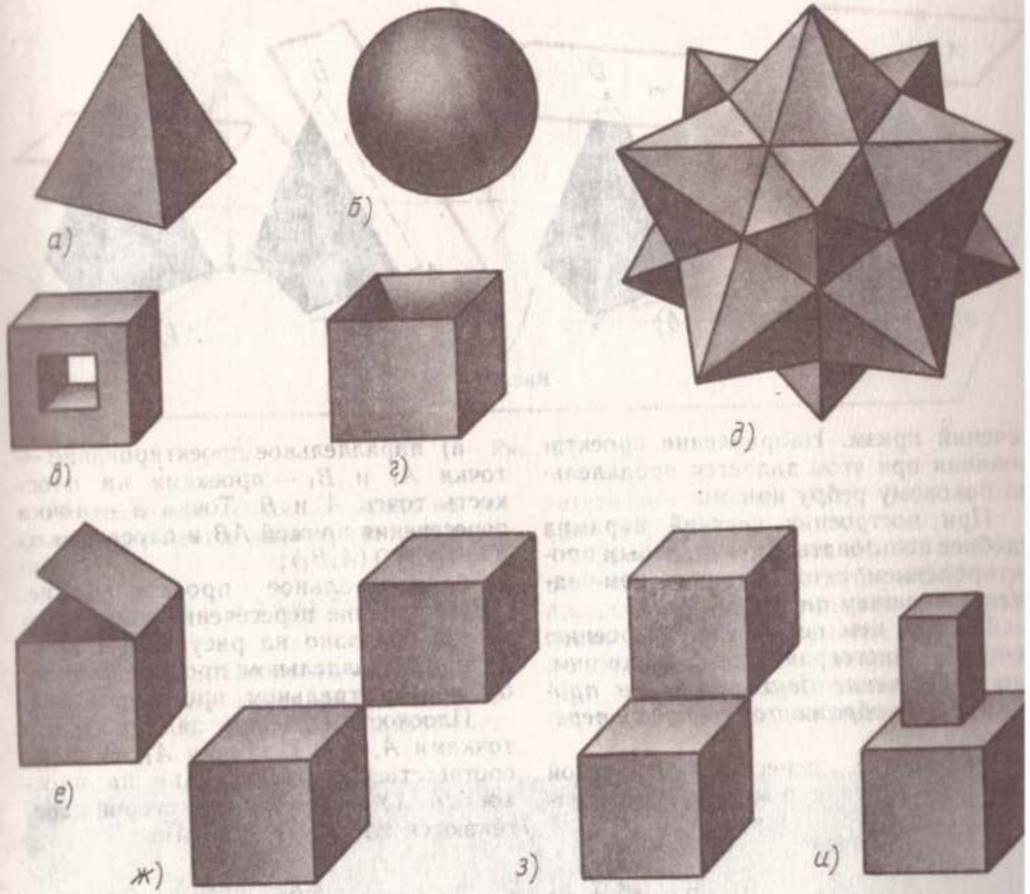


Рис. 9

● Приведите примеры, подтверждающие ответ на предыдущий вопрос, и примеры, когда объединение и пересечение многогранников являются многогранником.

Какой же фигурой является пересечение многогранника и плоскости? Пересечением многогранника и плоскости может быть пустое множество (рис. 10, *а*), точка (рис. 10, *б*), отрезок (рис. 10, *в*), многоугольни (рис. 10, *г*).

Если пересечением многогранник и плоскости является многоугольни он называется *сечением многогранни ка плоскостью*. На этом случае мы остановимся более подробно.

Один из методов построения сеч ния — параллельное проектировани Его удобно применять для построени

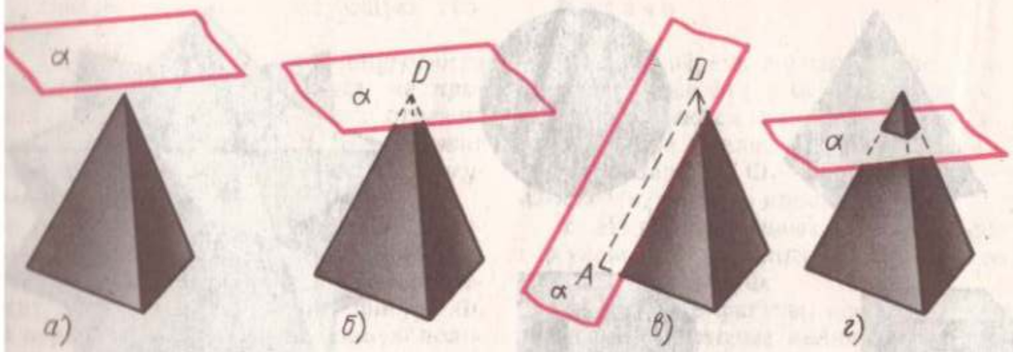


Рис. 10

ечений призм. Направление проекти-
ования при этом задается параллель-
о боковому ребру призмы.

При построении сечений пирамид
добнее пользоваться центральным про-
ктированием, центр которого помеща-
этся в вершину пирамиды.

Прежде чем перейти к построению
ечений многогранников, напомним,
то *пересечение двух прямых в про-*
транстве изображается точкой их пере-
ечения.

Построение пересечения прямой
B и плоскости α показано на рисун-
е 11, *а, б*:

а) параллельное проектирование — точки A_1 и B_1 — проекции на плоскость точек A и B. Точка X — точка пересечения прямой AB и плоскости α: $X=(AB)\cap(A_1B_1)$;

б) центральное проектирование.

Построение пересечения двух плоскостей показано на рисунке 12, *а, б*: а) при параллельном проектировании; б) при центральном проектировании.

Плоскость сечения задана тремя точками A, B и C. Точки A_1, B_1 и C_1 соответственно их проекции на плоскость α. XY — прямая, по которой пересекаются плоскости ABC и α.

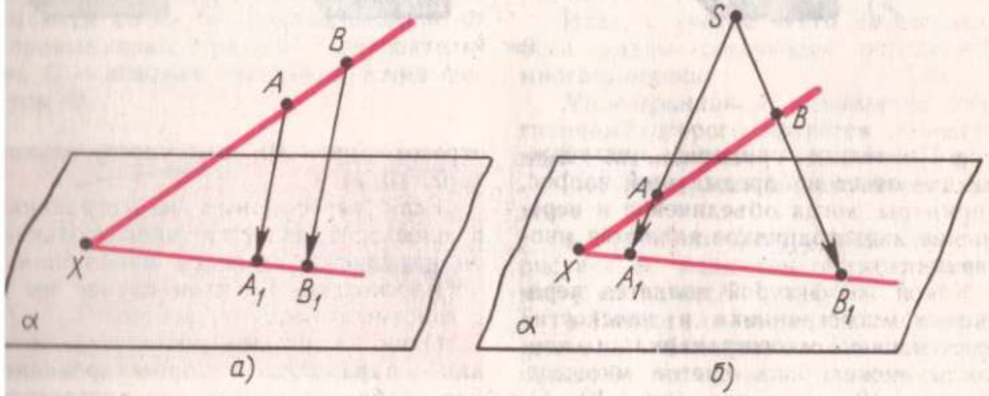


Рис. 11

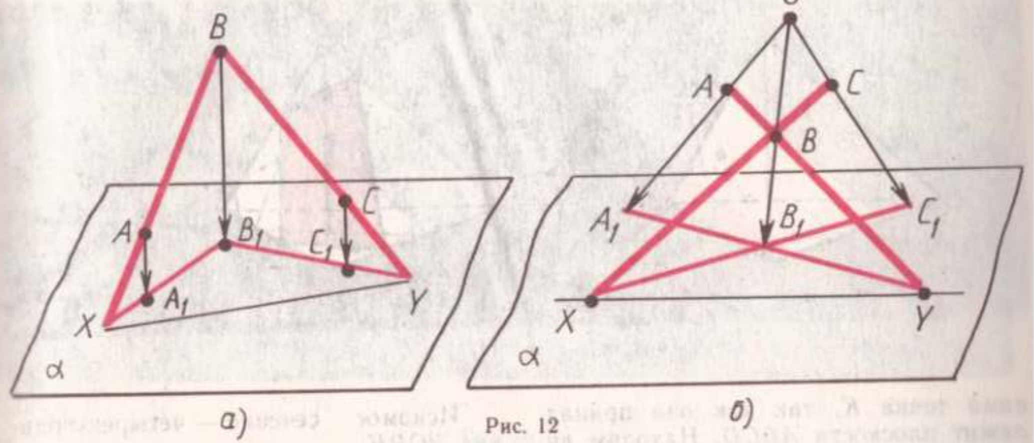


Рис. 12

Рассмотрим несколько задач на построение сечения многогранника плоскостью.

Сечение задается тремя точками.

Задача 8. Построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, заданное тремя точками M, N и K, принадлежащими соответственно ребрам AA_1, B_1C_1 и DC (рис. 13, *а*).

Проектируем точки M, N и K на плоскость основания куба $ABCD$ при параллельном проектировании, направление которого выбирается параллельно боковому ребру (например, AA_1). При этом проекциями точек M, N и K будут соответственно точки M_1, N_1 и

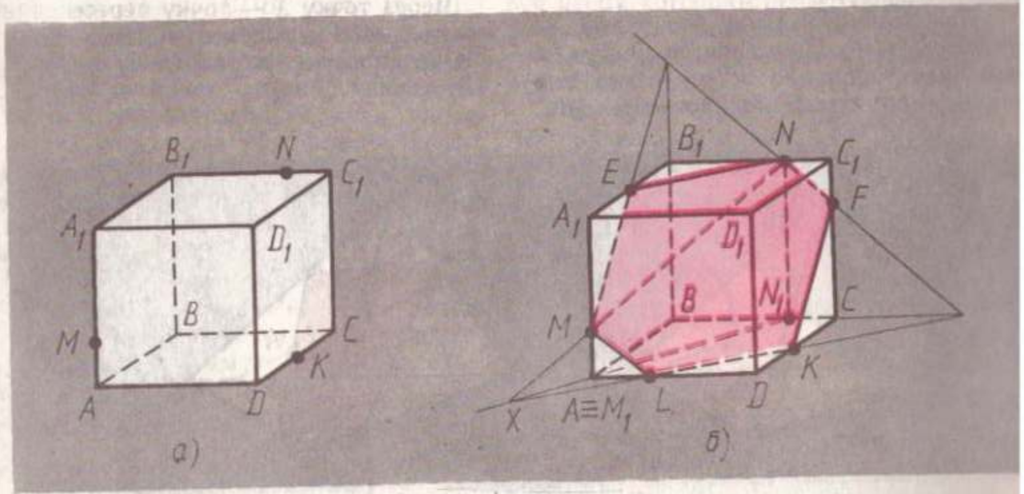


Рис. 13

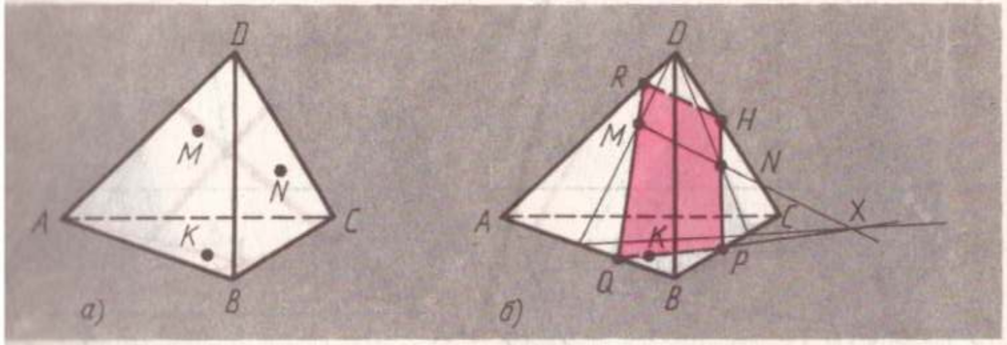


Рис. 14

...ма точка K, так как она принад-...жит плоскости $ABCD$. Находим ли-...ю пересечения плоскостей MNK и ...BCD. Это прямая XK. После этого ...аходим отрезки, которые являются ...ересечениями плоскости MNK с гра-...ми куба (рис. 13, *б*).

Шестиугольник $KLMENF$ — иско-...е сечение.

Задача 9. Построим сечение тре-...ольной пирамиды $ABCD$, заданное ...емя точками $M \in (ADB)$, $N \in (BDC)$, ...$\in (ABC)$ (рис. 14, *а*).

Построение сечения показано на ...сунке 14, *б*. Применяется централь-...е проектирование относительно вер-...ины пирамиды D на плоскость ABC.

Искомое сечение — четырехугольник $PQRH$.

Сечение задается с помощью свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве

Задача 10. Построим сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точку $M \in (ADC)$ и точку $N \in (CDB)$ параллельно ребру AB (рис. 15, *а*).

Через точку X — точку пересечения прямой MN и плоскости ABC — проводим прямую, параллельную ребру AB, точки K и L — точки ее пересе-

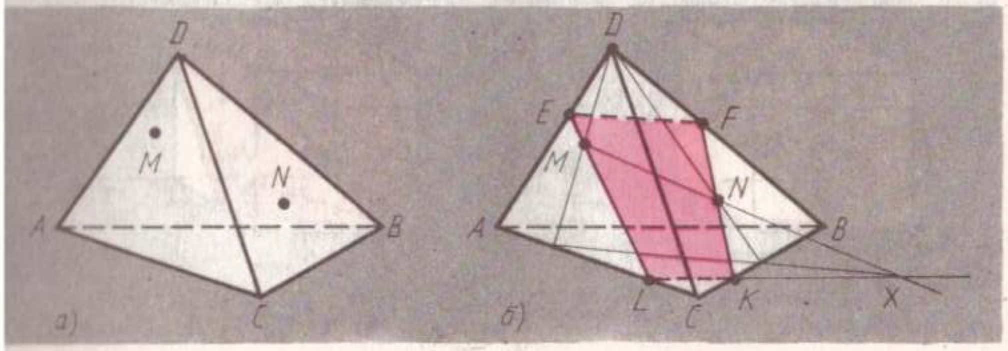


Рис. 15

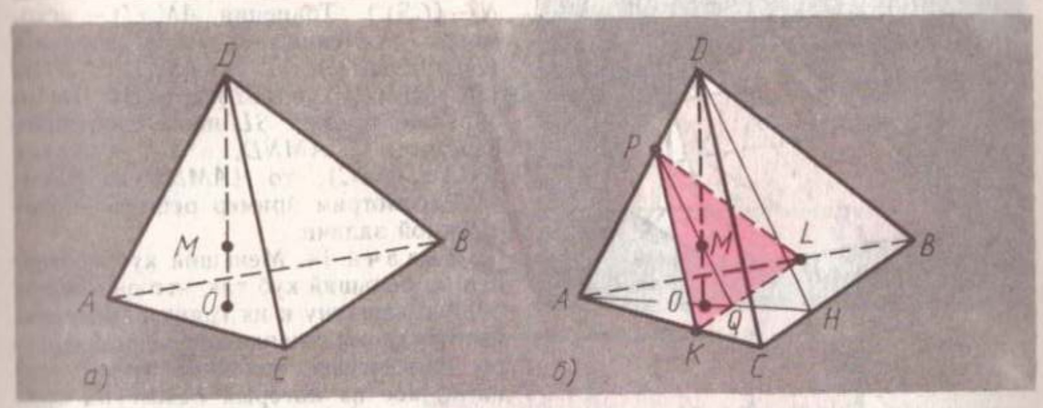


Рис. 16

чения соответственно с BC и AC (если плоскость параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то линия пересечения плоскостей должна быть параллельна этой прямой).

$KLEF$ — искомое сечение.

Задача 11. Построим сечение треугольной пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точку $M \in (DO)$ параллельно грани CDB (рис. 16, *а*).

Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной из них параллельны другой плоскости (признак параллельности двух плоскостей). Используя этот факт, в плоскости DCB рассмотрим две пересекающиеся прямые CB и высоту DH (рис. 16, *б*). В плоскости ADH (в которой лежит DO, а значит, и точка M) через точку M проведем прямую $PQ \parallel DH$ (точка $P \in (AD)$, точка $Q \in (AH)$). Через точку Q в плоскости ABC проведем прямую KL, параллельную прямой CB (точка $K \in (AC)$, точка $L \in (AB)$). Треугольник KPL будет искомым сечением. Действительно, во-первых, точка M принадлежит плоскости треугольника KPL, во-вторых, прямая DH параллельна плоскости KPL и прямая CB параллельна плоскости KPL (по признаку параллельности прямой и плоскости; прямые DH и CB по построению параллельны соответственно прямым PQ и KL). Следовательно, плоскость сечения KPL параллельна плоскости грани CDB.

Задача 12. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны (правильный тетраэдр), проведем сечение, перпендикулярное противоположному боковому ребру пирамиды.

Например, через сторону основания AC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 17) проведем сечение, пер-

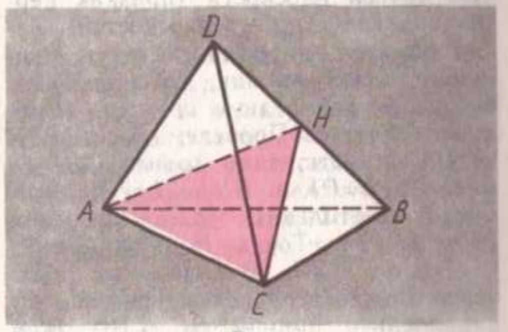


Рис. 17

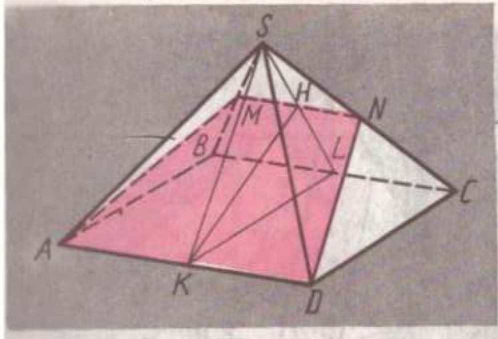


Рис. 18

пендикулярное ребру DB. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямой достаточно быть перпендикулярной двум пересекающимся прямым этой плоскости. Проведем AH и CH — высоты треугольников ADB и CDB на сторону DB $(BH=DH)$. Треугольник AHC — искомое сечение.

Задача 13. Через сторону основания правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны, проведем сечение, перпендикулярное противоположной грани пирамиды.

Пусть дана пирамида $SABCD$. Нужно провести сечение через сторону основания AD, перпендикулярное боковой грани BSC (рис. 18). Две плоскости перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости (признак перпендикулярности двух плоскостей). Таким образом, надо найти такую прямую в одной из них, которая будет перпендикулярна двум прямым, лежащим в другой. Проведем высоты SK и SL соответственно граней ASD и BSC $(AK=DK$ и $BL=CL)$. В плоскости треугольника KSL проведем $(KH)\perp(SL)$. Точка H принадлежит плоскости BSC. В плоскости BSC через точку H проведем прямую MN параллельно прямой BC $(M\in(BS)$, $N\in(CS))$. Трапеция $AMND$ — искомое сечение. Действительно, $(SL)\perp(MN)$ $((SL)\perp(BC)$, $(BC)\parallel(MN))$ и $(SL)\perp(KH)$. Таким образом, прямая SL перпендикулярна плоскости $AMND$, а так как $(SL)\subset(BSC)$, то $(AMND)\perp(BSC)$.

Рассмотрим пример решения более сложной задачи.

Задача 14. Меньший куб поставлен на больший куб так, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Построим сечение полученной фигуры плоскостью, заданной тремя точками, все из которых лежат на трех скрещивающихся ребрах меньшего куба.

Решение. Пусть сечение задано тремя точками M, N, K, которые лежат на трех скрещивающихся ребрах соответственно B_2L_2, F_1L_1, E_1E_2 меньшего куба (рис. 19).

Принцип построения сечения такой же, как в предыдущих задачах. Сначала проектируем точки M, N, K параллельно боковым ребрам обоих кубов на плоскость основания $ABCD$ большого куба. Находим прямую XY пересечения плоскости MNK и основания $ABCD$. Затем находим линии пересечения со всеми гранями фигуры. Как это делается, показано на рисунке 19. $H_1H_2H_3H_4NH_5MH_6KH_7H_8H_9$ — искомое сечение.

Задачи

15. Проведите сечение через три точки, лежащие на несмежных боковых гранях прямой шестиугольной призмы.

16. Через точку, лежащую внутри треугольной пирамиды, проведите сечение параллельно боковому ребру.

17. В фигуре, изображенной на рисунке 19, проведите сечение плоскостью, заданной тремя точками, из которых:

а) все точки лежат внутри трех различных граней большого куба;

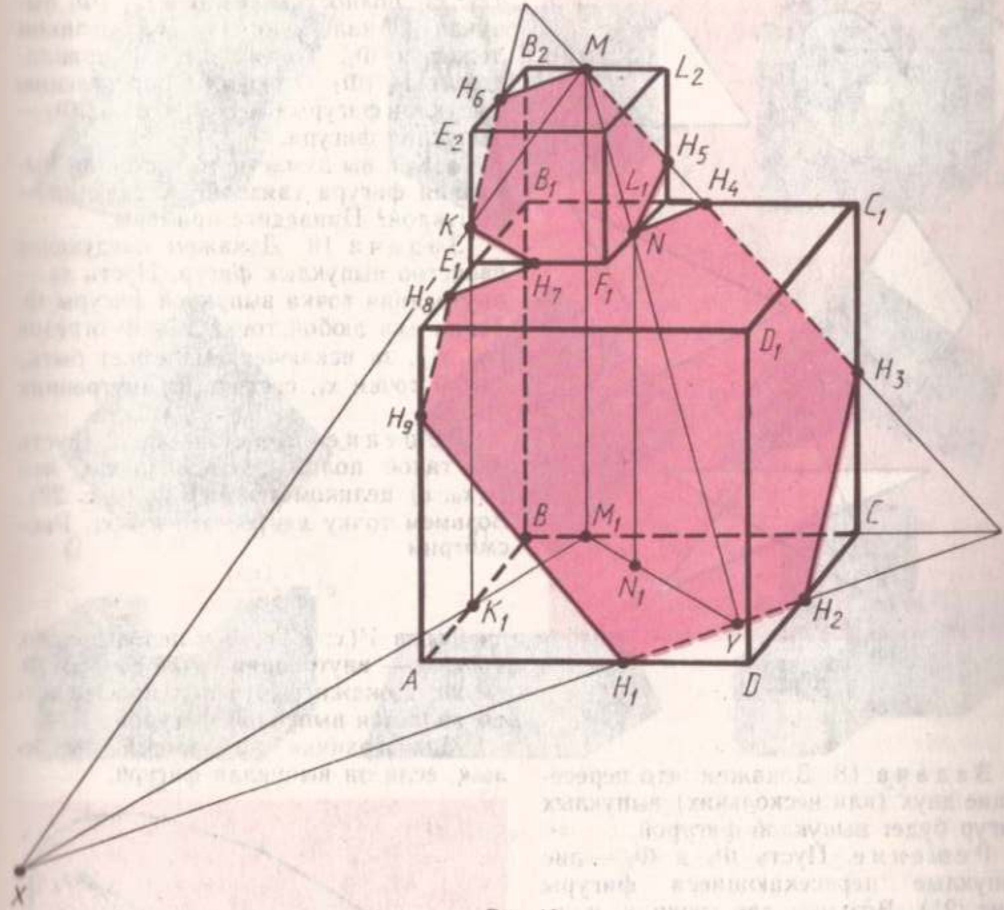


Рис. 19

б) одна точка лежит на верхнем основании маленького куба, а две другие — на различных ребрах большого куба.

Обратимся теперь к определению связной фигуры (см. с. 10). Выделим связные фигуры, у которых вместе с любыми двумя их точками им принадлежит и отрезок, соединяющий эти точки. Такие фигуры называются *выпуклыми*. Например, среди плоских фигур, изображенных на рисунке 20, выпуклыми будут фигуры *б* и *в*, фигуры *а*, *г*, *д* невыпуклые. Для того чтобы показать это, достаточно найти две такие точки, что отрезок, их соединяющий, целиком не лежит в рассматриваемой фигуре. Например, в случае *а* указаны две такие точки A и B.

● Может ли треугольник быть невыпуклой фигурой?

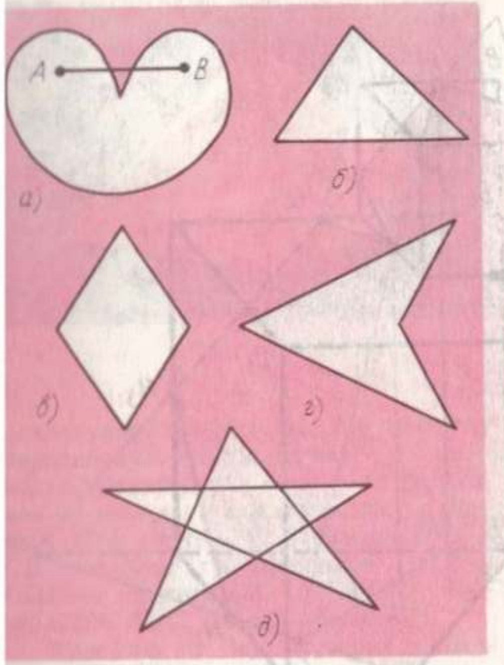


Рис. 20

Задача 18. Докажем, что пересечение двух (или нескольких) выпуклых фигур будет выпуклой фигурой.

Решение. Пусть Φ_1 и Φ_2 — две выпуклые пересекающиеся фигуры (рис. 21). Возьмем две точки x_1 и x_2, которые принадлежат $\Phi_1 \cap \Phi_2$, т. е. $x_1, x_2 \in \Phi_1$ и $x_1, x_2 \in \Phi_2$. Отрезок $[x_1; x_2]$ полностью лежит в Φ_1 (Φ_1 выпукла). Аналогично $[x_1; x_2]$ целиком лежит в Φ_2. Тогда $[x_1; x_2]$ принадлежит $\Phi_1 \cap \Phi_2$. Отсюда по определению выпуклой фигуры следует, что $\Phi_1 \cap \Phi_2$ — выпуклая фигура.

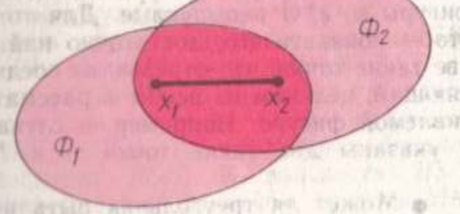


Рис. 21

● Как вы думаете, является ли выпуклая фигура связной? А связная — выпуклой? Приведите примеры.

Задача 19. Докажем следующее свойство выпуклых фигур. Пусть x_0 — внутренняя точка выпуклой фигуры Φ. Тогда для любой точки $x_1 \in \Phi$ отрезок $[x_0; x_1]$, за исключением, может быть, самой точки x_1, состоит из внутренних точек.

Решение. Действительно, пусть ε — такое положительное число, что $V(x_0; \varepsilon)$ целиком лежит в Φ (рис. 22). Возьмем точку $x \in [x_0; x_1]$, $x \neq x_1$. Рассмотрим

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{|x_1 x|}{|x_0 x_1|}.$$

Тогда $V(x; \varepsilon') \subset \Phi$. Следовательно, точка x — внутренняя точка фигуры Φ.

20. Докажите, что полупространство является выпуклой фигурой.

Многогранник называется *выпуклым*, если он выпуклая фигура.

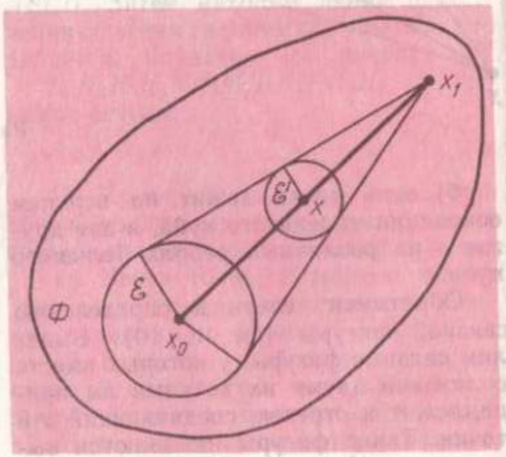


Рис. 22

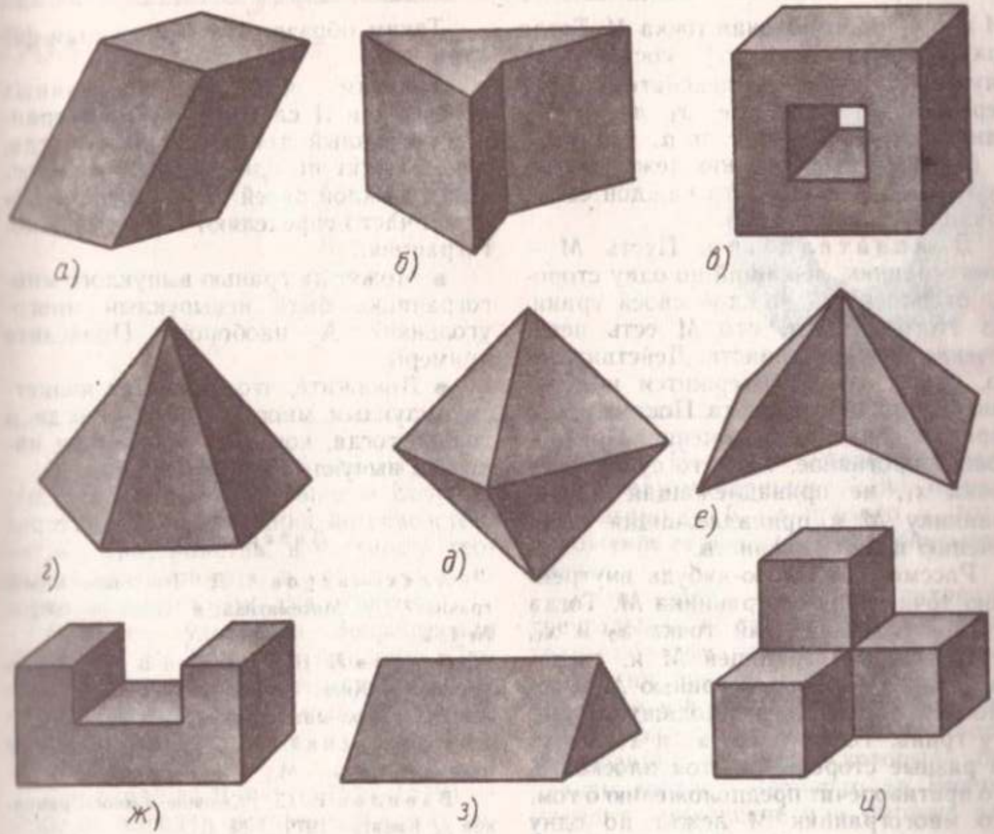


Рис. 23

Задача 21. Определим, какие из многогранников, изображенных на рисунке 23, являются выпуклыми и какие — невыпуклыми. Почему?

Решение. Выпуклые многогранники: *а, г, д, з*. Невыпуклые многогранники: *б, в, е, ж, и*.

Задача 22. Является ли пересечение выпуклых многогранников выпуклым многогранником?

Решение. Не всегда. Достаточно обратиться к примеру на рисунке 9, *ж* и рисунке 9, *з* (см. с. 13). В первом случае пересечением двух кубов (выпуклых многогранников) является точка, во втором — отрезок.

Выделим следующие **свойства выпуклых многогранников.**

I. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Доказательство. Пусть M — выпуклый многогранник и α — его произвольная грань, α — плоскость, в которой лежит многоугольник α. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка

M и x_1 — произвольная точка M. Тогда олуинтервал $[x_0; x_1[$ состоит из нутренних точек и, следовательно, не ересекается с α, т. е. x_1 лежит по дну и ту же сторону от α, что и x_0.

II. Если многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то он выпуклый.

Доказательство. Пусть M — многогранник, лежащий по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Из этого следует, что M есть пересечение полупространств. Действительно, ясно, что M содержится в пересечении полупространств. Покажем, что верно и обратное включение. Предположим противное, т. е. что существует точка x_1, не принадлежащая многограннику M и принадлежащая пересечению полупространств.

Рассмотрим какую-нибудь внутреннюю точку x_0 многогранника M. Тогда отрезок, соединяющий точки x_0 и x_1, пересекается с границей M и, следовательно, с некоторой гранью M. Рассмотрим плоскость, проходящую через эту грань. Тогда точки x_0 и x_1 лежат по разные стороны от этой плоскости, что противоречит предположению о том, что многогранник M лежит по одну сторону от каждой своей грани, чем и завершается доказательство того, что M является пересечением полупространств. Так как полупространства являются выпуклыми фигурами, то их пересечение также является выпуклой фигурой.

Таким образом, M — выпуклая фигура.

Заметим, что из доказанных свойств I и II следует, что многогранник выпуклый тогда и только тогда, когда лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Этим свойством часто определяют выпуклый многогранник.

● Может ли гранью выпуклого многогранника быть невыпуклый многоугольник? А наоборот? Приведите примеры.

● Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основанием является выпуклый многоугольник.

Литература

Александров А. Д. Что такое многогранник? // Математика в школе. — 1981.— № 1, 2.

Бескин Л. Н., Бескин В. Л. Многогранники.— Киев: Вища школа, 1984.— (Библиотека физико-математической школы).

Болтянский В. Г., Яглом И. М. Выпуклые фигуры.— М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Вавилов В. С. Сечение многогранников // Квант.— 1979.— № 1.

Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники.— М.; Л.: Гостехиздат, 1956.

Савин А. П. Кое-что о выпуклости // Квант.— 1979.— № 1.

Энциклопедический словарь юного математика.—2-е изд., испр. и доп.— М.: Педагогика, 1989.— С. 43, 195.

Великие художники Возрождения

3

В средние века (XV—XVII), которые иначе называются эпохой Возрождения, необычайно возрос интерес к геометрии пространства, в частности теории многогранников, в кругах скульпторов, архитекторов, художников.

Великие художники Возрождения Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер занимались изучением свойств правильных и полуправильных многогранников, изображали их на своих полотнах.

Леонардо да Винчи (1452—1519) — одна из загадок истории: ученый, художник, скульптор. Математика занимала видное место в его творчестве. «Пусть никто, не будучи математиком, не дерзнет читать мои труды»,— говорил Леонардо. Он изучал симметрию правильных многоугольников и правильных многогранников, отчетливо сознавал все возможности, которые несет в себе симметрия.

Об этом говорят его рисунки, сделанные для проектирования здания (рис. 24).

Леонардо да Винчи предложил интересный способ построения эллипса. Он заключается в следующем: проведем на плоскости прямые x и y (рис. 25), сделаем шаблон некоторого треугольника ABC. Поместим теперь произвольным образом вершину A на прямую x, а вершину B на прямую y, тогда положение вершины C будет описывать эллипс.

Если теперь, наоборот, закрепить треугольник и перемещать плоскость таким образом, чтобы точка A лежала всегда на прямой x, а точка B — на прямой y, а в точку C поместить карандаш, то он опишет эллипс. Этот способ построения эллипса, который был назван «патрон Леонардо да Винчи», находит применение при обточке различных деталей.

С именем Леонардо да Винчи связано открытие центра масс (центра тяжести или, как иногда называют, центроида) тетраэдра. В треугольнике аналогичной точкой — центром масс — является точка пересечения его медиан. Практически это означает, что если вырезать треугольник из какого-нибудь материала и прибить его гвоздем к стене в указанной точке, то треугольник, как бы его ни повесили, будет находиться в равновесии. Как вам известно из курса планиметрии, в этой точке каждая медиана делится в отношении $2:1$, считая от соответствующей вершины треугольника. Кста-

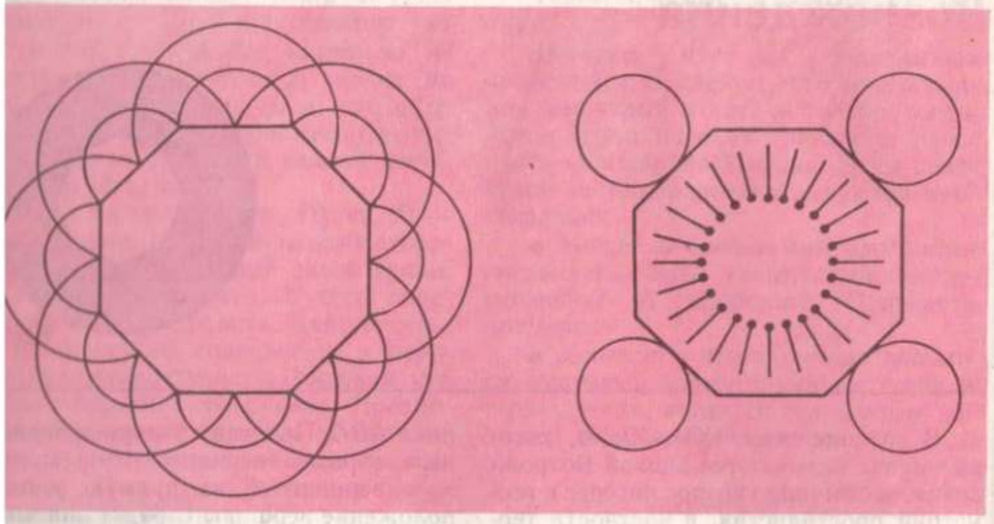


Рис. 24

заметим, что эта теорема была доказана еще Архимедом.

Аналогично центр тяжести тетраэдра — это точка пересечения прямых,

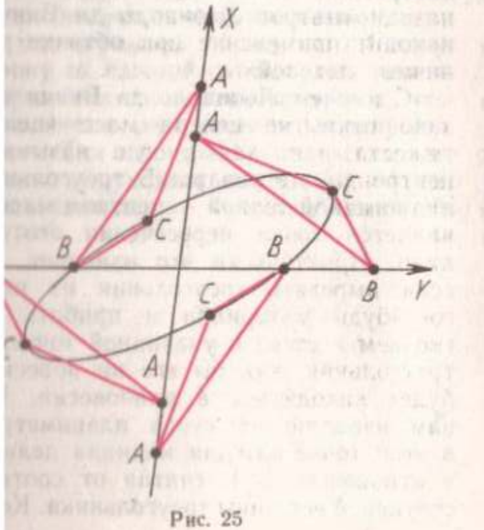


Рис. 25

каждая из которых проходит через центр масс основания и противолежащую вершину тетраэдра и этой точкой делится в отношении 3:1, считая от соответствующей вершины.

Леонардо да Винчи увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Например, он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга францисканского монаха Луки Пачоли (1445— ок. 1514), которая называется «О божественной пропорции» (1509).

Напомним читателям, что божественной пропорцией или золотым сечением (этот термин возник в Германии в первой половине XIX в.) называется деление отрезка на две части так, что бо́льшая из них есть среднее геометрическое между меньшей частью и всем отрезком. Таким образом, если обозначить через a длину всего отрезка, через x длину большей части, то золотое сечение можно записать в

виде следующей пропорции:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}.$$

Решим это уравнение относительно x. Получим $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Отсюда по отрезку a легко построить отрезок $a\sqrt{5}$, а затем и отрезок x (рис. 26). На рисунке 26 $AB=a$; $BC=\frac{a}{2}$; $CD=\frac{a}{2}$; $AD=AE$; $AE=x$.

● Проверьте, действительно ли это так.

Божественная пропорция используется для построения правильных пяти- и десятиугольников. Действительно, пусть нам нужно построить сторону x правильного десятиугольника по известному радиусу окружности R (рис. 27).

Точка O — центр окружности; $OA=OB=R$; $AB=x$ — сторона правильного десятиугольника; $\angle AOB=360°:10=36°$; $\angle A=\angle B=\frac{180°-36°}{2}=72°$.

Проведем AX — биссектрису угла A. Тогда $\triangle AOB \backsim \triangle XAB$ (по трем углам). Отсюда следует, что

$$\frac{AB}{XB}=\frac{AO}{XA};\ AB=AX=OX=x;$$

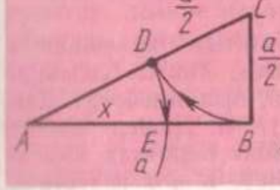


Рис. 26

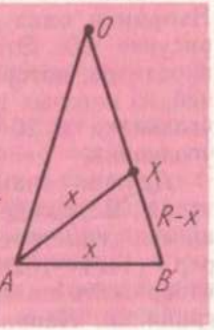


Рис. 27

$$XB=R-x;$$

$$\frac{x}{R-x}=\frac{R}{x};\ x^2+Rx-R^2=0,$$

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R,$$

т. е. получили золотое сечение.

Если $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, то $\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Обозначим $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ через b и рассмотрим геометрическую прогрессию

$$1;\ b;\ b^2;\ b^3;\ \ldots;\ b^n$$

со знаменателем, равным b. Заметим, что $b^2=b+1$;

$$b^3=b^2b=(1+b)b=b+b^2=$$
$$=b+(1+b)=2b+1;$$
$$b^4=b^3b=(2b+1)b=2b^2+b=$$
$$=2(1+b)+b=3b+2;$$
$$b^5=b^4b=(3b+2)b=3b^2+2b=$$
$$=3(1+b)+2b=5b+3;$$

$$b^6=b^5b=(5b+3)b=$$
$$=5(b+1)+3b=8b+4 \text{ и т. д.}$$

Заметим, что коэффициенты при b образуют последовательность чисел: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , каждое из которых, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Эта последовательность чисел имеет свою интересную историю. Она называется *числами Фибоначчи* в честь своего первооткрывателя — купца Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи (1180—1240), который в 1202 году пришел к этой последовательности в связи с решением задачи о разведении кроликов. (Любознательного читателя отсылаем к статье: Я г л о м И. М. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики // Квант.—1984.— № 7.— С. 15.)

Золотое сечение, как было сказано, связано с построением правильного пятиугольника. Отсюда и числа Фибоначчи имеют прямое отношение к этому. Возьмем правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 28) со стороной, равной 1.

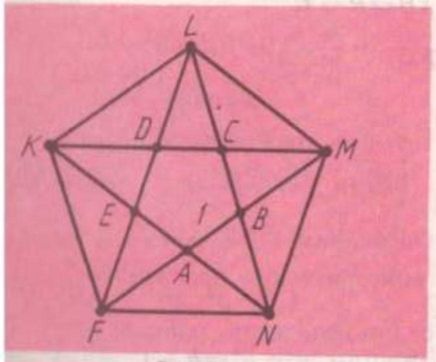


Рис. 28

роим его звездчатую форму. Тогда на рисунке 28 будет равно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. этого достаточно рассмотреть ольник CMB, у которого $\angle C = B = 72°$, $\angle M = 36°$, и провести ждения, аналогичные тем, которые сделаны для треугольника AOB исунке 27. В нашем обозначении $= b$. Далее построим опять вы-

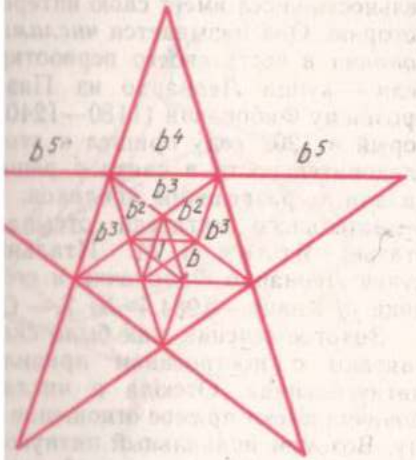


Рис. 29

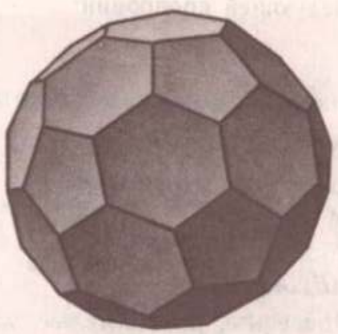


Рис. 30

пуклый многоугольник $FKLMN$. Сторона этого пятиугольника будет равна в нашем обозначении b^2. Для получения многоугольника строим опять звездчатую форму и т. д. (рис. 29).

В геометрии пространства золотое сечение используется для построения правильных выпуклых и звездчатых додекаэдров — двенадцатигранников, у которых все грани — пятиугольники, и икосаэдров — двадцатигранников, у которых все грани — треугольники. Именно поэтому Леонардо да Винчи изобразил такие многогранники в книге «Божественная пропорция».

Причем сначала ему приходилось изготавливать модели многогранников. Например, одна из них изображена на рисунке 30. Это модель усеченного икосаэдра, который состоит из 32 граней, из которых 12 — правильные пятиугольники и 20 — правильные шестиугольники.

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер (1471—1528). А. Дюрер любил изображать на своих полотнах многогранники. Например, в его известной гравюре «Меланхолия» среди всевозможных атрибутов геометрии и зод-

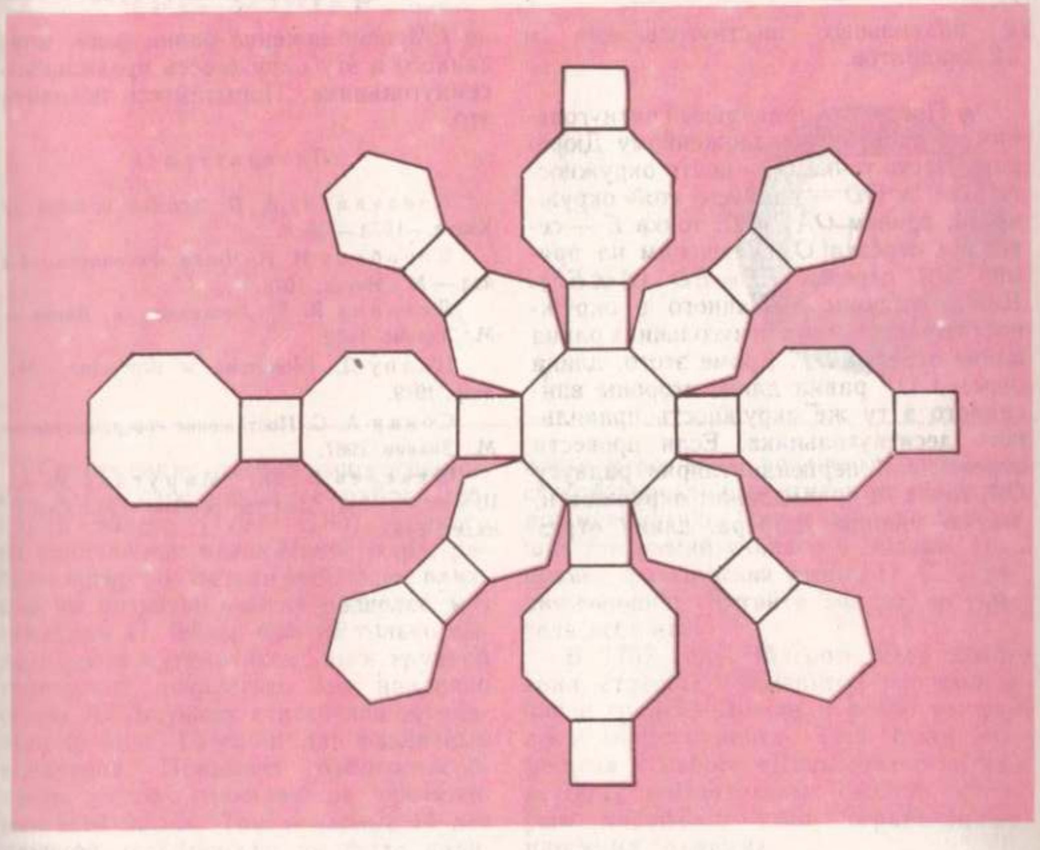


Рис. 31

чества изображен неправильный многогранник.

В 1525 году художник написал трактат, полное название которого по обычаям того времени весьма пространное и звучит следующим образом: «Руководство к измерению при помощи циркуля и линейки в линиях, плоскостях и целых телах, составленное Альбрехтом Дюрером и напечатанное на пользу всем любящим знания с надлежащими рисунками в 1525 году».

В этой книге художник представил пять правильных выпуклых многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы. Кроме того, автор рассмотрел полуправильные многогранники и предложил ранее неизвестный способ построения моделей многогранников из разверток. Например, на рисунке 31 дана развертка ромбоусеченного кубооктаэдра. Этот многогранник состоит из 26 граней, из которых 6 правильных восьмиугольников, правильных шестиугольников и квадратов.

● Постройте правильный пятиуголь-
к по способу, предложенному Дюре-
м. Пусть точка O — центр окружнос-
OA и OD — радиусы этой окруж-
ти, причем $OA \perp OD$; точка E — се-
дина отрезка OA. Отложим на пря-
й OA отрезок $EF = ED$ ($A \notin EF$).
ина стороны вписанного в окруж-
ть правильного пятиугольника равна
не отрезка DF. Кроме этого, длина
езка OF равна длине стороны впи-
ного в ту же окружность правиль-
о десятиугольника. Если провести
езок EM перпендикулярно радиусу
, точка M принадлежит окружности,
по мнению Дюрера, длина отрезка EM приближенно равна длине вписанного в эту окружность правильного семиугольника. Попытайтесь показать это.

Литература

Бендукидзе А. Д. Золотое сечение // Квант.—1973.— № 8.

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи.—4-е изд.— М.: Наука, 1978.

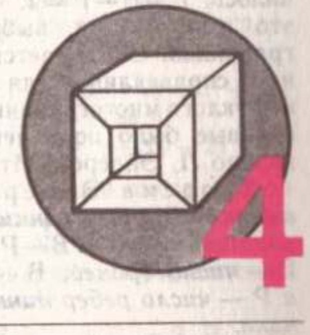
Дитякин В. Т. Леонардо да Винчи.— М.: Знание, 1952.

Пидоу Д. Геометрия и искусство.— М.: Мир, 1979.

Сонин А. С. Постижение совершенства.— М.: Знание, 1987.

Шевелев И. Ш., Марутаев М. А., Шмелев И. П. Золотое сечение.— М.: Стройиздат, 1990.

Леонард Эйлер и его знаменитая теорема



Современная теория многогранников берет свое начало с работ Леонарда Эйлера (1707—1783) — одного из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих разделов математики. Л. Эйлер был не только выдающимся математиком, но и крупной творческой личностью. Им написано около 760 научных статей для журналов, 40 книг, 15 работ для различных конкурсов. Поражает работоспособность ученого, росшая на протяжении всей жизни. Так, в первые 14 лет научной деятельности им было написано 80 работ объемом около 4000 печатных листов, а в последние 14 лет жизни, несмотря на тяжелую болезнь — слепоту, опубликовано свыше 359 работ общим объемом приблизительно 8000 печатных листов. Многие рукописи Эйлера сохранились до наших дней. Эйлер долгое время (с 1727 по 1741 год и с 1766 года до конца жизни) жил и работал в России, был действительным членом Петербургской академии наук, оказал большое влияние на развитие русской математической школы, на подготовку кадров-ученых — математиков и педагогов России.

Работы Эйлера дали толчок к постановке и решению различных проблем, способствовали развитию многих разделов математики. Математики последующих поколений учились у Эйлера. Например, французский ученый П. С. Лаплас говорил: «Читайте Эйлера, он учитель всех нас».

В 1752 году Эйлером была доказана ставшая знаменитой теорема о числе граней, вершин и ребер выпуклого многогранника. Она была помещена в работе «Доказательство некоторых замечательных свойств, которым подчинены тела, ограниченные плоскими гранями».

Прежде чем рассматривать доказательство этой теоремы, обратимся к следующей таблице (Г — число граней многогранника, В — вершин, Р — ребер):

Название многогранника	Г	В	Р
Тетраэдр	4	4	6
Четырехугольная призма	6	8	12
Семиугольная пирамида	8	8	14
Пятиугольная бипирамида	10	7	15
Правильный додекаэдр	12	20	30

Теперь найдем сумму Г+В−Р для аждого из представленных в таблице ногогранников. Во всех случаях полулось: Г+В−Р=2. Справедливо ли о только для выбранных многоранников? Оказывается, это соотношее справедливо для произвольного ыпуклого многогранника. Это свойство ервые было подмечено и затем доазано Л. Эйлером. Итак,

Теорема Эйлера. *Для любого ыпуклого многогранника справедливо оотношение* Г+В−Р=2 (∗), *где — число граней,* В *— число вершин* Р *— число ребер данного многогранника.*

Доказательство. Существует ножество различных доказательств еоремы Эйлера. Мы предлагаем рассмотреть три наиболее интересных из их.

I. Наиболее распространенный спооб, берущий свое начало в работе амого Эйлера и развитый в работе ранцузского математика Огюста Кои (1789—1857) «Исследование о многогранниках» (1811 г.), заключается следующем.

Представим поверхность данного ногогранника сделанной из эластичого материала. Удалим (вырежем) дну из его граней и оставшуюся поерхность «растянем» на плоскость. огда на плоскости получается сетка рис. 32), содержащая Г′=Г−1 обастей (которые по-прежнему назовем анями), В вершин и Р ребер (коорые могут искривляться).

Для данной сетки нужно доказать оотношение

$$\text{Г}'+\text{В}-\text{Р}=1, \qquad (**)$$

огда для многогранника будет справедливо соотношение (∗).

Докажем, что соотношение (∗∗) е меняется, если в сетке провести ка-

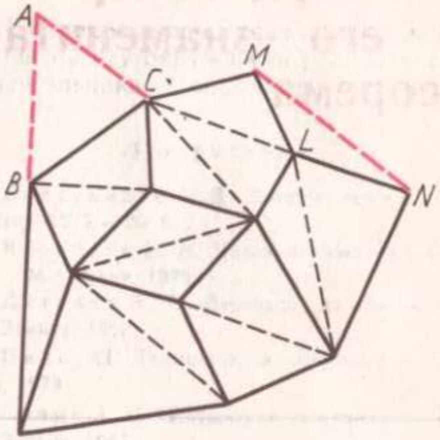


Рис. 32

кую-нибудь диагональ. Действительно, после проведения некоторой диагонали в сетке будет Г′+1 граней, В вершин и Р+1 ребро, т. е.

$$(\text{Г}'+1)+\text{В}-(\text{Р}+1)=\text{Г}'+\text{В}-\text{Р}.$$

Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диагонали, разбивающие ее на треугольники (на рисунке 32 диагонали изображены пунктирами), и докажем соотношение (∗∗) методом математической индукции по числу n треугольников в сетке.

Пусть $n=1$, т. е. сетка состоит из одного треугольника. Тогда Г′=1, В=3, Р=3 и выполняется соотношение (∗∗). Пусть теперь соотношение (∗∗) имеет место для сетки, состоящей из n треугольников. Присоединим к ней еще один треугольник. Его можно присоединить следующими способами:

1) как $\triangle ABC$ (рис. 32). Тогда сетка состоит из Г′+1 граней, В+1 вершин и Р+2 ребер, и, следовательно,

$$(\text{Г}'+1)+(\text{В}+1)-(\text{Р}+2)=\text{Г}'+\text{В}-\text{Р};$$

2) как $\triangle MNL$. Тогда сетка состоит из Г′+1 граней, В вершин и Р+1 ребер, и, следовательно,

$$(\text{Г}'+1)+\text{В}-(\text{Р}+1)=\text{Г}'+\text{В}-\text{Р}.$$

Таким образом, в обоих случаях, т. е. при любом присоединении $(n+1)$-го треугольника, выражение (∗∗) не меняется, и если оно равнялось 1 для сетки из n треугольников, то оно равняется 1 и для сетки из $(n+1)$ треугольника. Итак, соотношение (∗∗) имеет место для любой сетки из треугольников, значит, для любой сетки вообще. Следовательно, для данного многогранника справедливо соотношение (∗). Такое доказательство предложено в «Методике преподавания геометрии» (Столяр А. А. и др. Под ред. Фетисова А. И.— М.: Просвещение, 1967).

II. Способ доказательства теоремы Эйлера, связанный с нахождением суммы плоских углов выпуклого многогранника. Обозначим ее Σ_α. Напомним, что плоскими углами многогранника являются внутренние плоские углы его граней.

Например, найдем Σ_α для таких многогранников:

а) тетраэдр имеет 4 грани — все треугольники. Таким образом, $\Sigma_\alpha=4\pi$;

б) куб имеет 6 граней — все квадраты. Таким образом, $\Sigma_\alpha=6\cdot 2\pi=12\pi$;

в) возьмем теперь произвольную пятиугольную призму. У нее две грани — пятиугольники и пять граней — параллелограммы. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна 3π. (Напомним, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n-2)$.) Сумма углов параллелограмма равна 2π. Таким образом,

$$\Sigma_\alpha=2\cdot 3\pi+5\cdot 2\pi=16\pi.$$

Итак, для нахождения Σ_α мы вычисляли сначала сумму углов, принадлежащих каждой грани. Воспользуемся этим приемом и в общем случае.

Введем следующие обозначения: S_1, S_2, S_3, ..., $S_\text{Г}$ — число сторон в 1, 2, 3-й и т. д. последней грани многогранника. Тогда

$$\Sigma_\alpha=\pi(S_1-2)+\pi(S_2-2)+\ldots+\pi(S_\text{Г}-2)=\pi(S_1+S_2+S_3+\ldots+S_\text{Г}-2\text{Г}).$$

Далее найдем общее число сторон всех граней многогранника. Оно равно $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_\text{Г}$. Так как каждое ребро многогранника принадлежит двум граням, имеем:

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_\text{Г}=2\cdot\text{Р}.$$

(Напомним, что через Р мы обозначили число ребер данного многогранника.) Таким образом, получаем:

$$\Sigma_\alpha=2\pi(\text{Р}-\text{Г}). \qquad (1)$$

Сосчитаем теперь Σ_α другим способом. Для этого будем менять форму многогранника таким образом, чтобы у него не менялось число Г, В, и Р. При этом может измениться каждый плоский угол в отдельности, но число Σ_α останется прежним. Выберем такое преобразование многогранника: примем одну из его граней за основание, расположим его горизонтально и «растянем» для того, чтобы на него можно было спроектировать другие грани многогранника. Например, на рисунке 33, *а* показано, к чему мы придем в случае тетраэдра, а на рисунке 33, *б* — в случае куба. На рисунке 34 показан многогранник произвольного типа.

Заметим, что спроектированный многогранник представляет слившиеся две наложенные друг на друга многоугольные пластины с общим контуром, из которых верхняя разбита на (Г−1) многоугольник, а нижняя на грани не делится. Обозначим число сторон внеш-

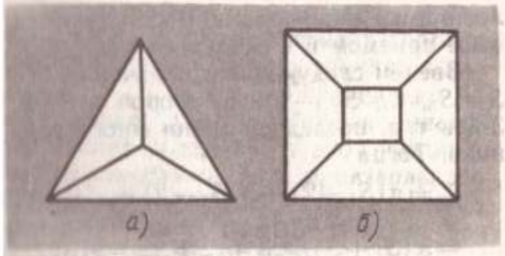


Рис. 33

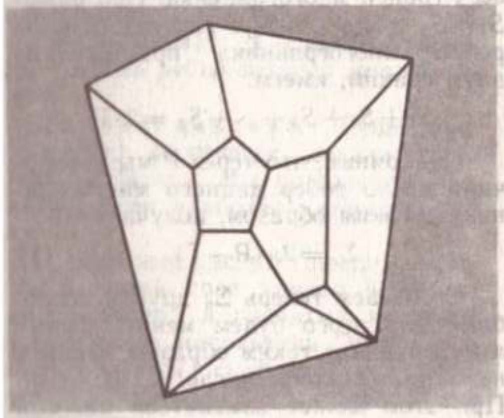


Рис. 34

него окаймляющего многоугольника через r. Теперь найдем Σ_α спроектированного многогранника. Σ_α состоит из следующих трех сумм:

1) Сумма углов нижней грани, у которой r сторон, равна $\pi(r-2)$.

2) Сумма углов верхней пластины, вершинами которых являются вершины нижней грани, тоже равна $\pi(r-2)$.

3) Сумма «внутренних» углов верхней пластины равна $2\pi(\text{В}-r)$, так как верхняя пластина имеет $(\text{В}-r)$ внутренних вершин и все углы группируются около них. Итак,

$$\Sigma_\alpha=\pi(r-2)+\pi(r-2)+2\pi(\text{В}-r)= =2\pi\text{В}-4\pi. \qquad (2)$$

Таким образом, сравнивая выражения (1) и (2), получаем:

$$\text{Г}+\text{В}-\text{Р}=2,$$

что и требовалось доказать.

Этот способ доказательства теоремы Эйлера рассмотрен в книге американского математика и педагога Джорджа Пойа «Математическое открытие» (М.: Наука, 1976.— С. 343).

III. Способ, предложенный математиком Л. Н. Бескиным (Стереометрия.— М.: Просвещение, 1971.— С. 195).

Здесь, как и в случае I, вырезаем одну грань многогранника и оставшуюся поверхность растягиваем на плоскость. При этом на плоскости получается некоторая плоская фигура, например, изображенная на рисунке 35.

Представим себе, что эта плоская фигура изображает собой остров, который со всех сторон окружен морем и состоит из отдельных полей — граней, отделенных друг от друга и от воды плотинами — ребрами.

Начнем постепенно снимать плотины, чтобы вода попала на поля. Причем

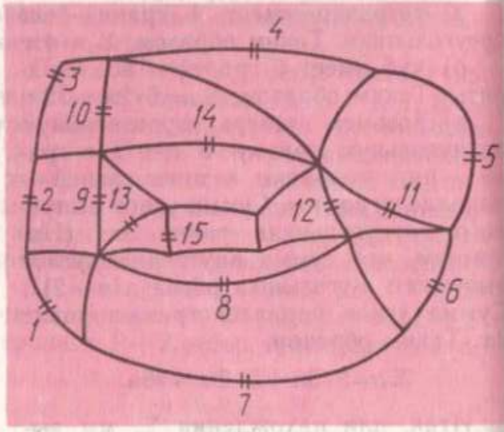


Рис. 35

плотину можно снять только в том случае, если она граничит с водой лишь с одной стороны. Снимая очередную плотину, мы орошаем ровно одно поле. Покажем теперь, что число всех плотин (т. е. Р — число ребер взятого многогранника) равно сумме чисел снятых и оставшихся плотин.

Итак, число снятых плотин равно (Г — 1). Действительно, снимая плотины, которые омывает вода только с одной стороны, мы оросили все поля (т. е. грани, число которых равно (Г — 1), так как одна грань была сначала вырезана). На рисунке 35 номера 1, 2, 3, ..., 15 показывают порядок снятия плотин. Число оставшихся плотин равно (В — 1). Покажем это. На рисунке 36 наша система изображена после снятия всех возможных плотин. Больше ни одну плотину снять нельзя, так как они омываются с двух сторон. Далее, никакие две вершины системы, например B и D (рис. 36), не могут соединяться двумя путями, так как в противном случае получился бы замкнутый контур (рис. 37), внутри которого не было бы воды, что противоречит тому, что все поля орошены водой. Отсюда следует, что в оставшейся системе плотин должен быть тупик, т. е. вершина, в которую ведет одно-единст-

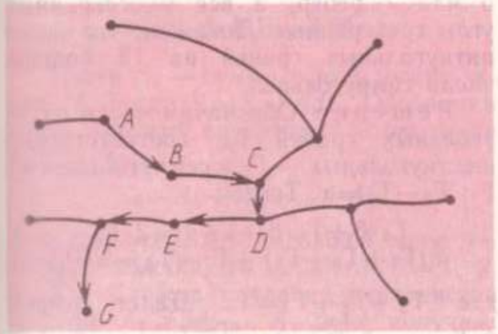


Рис. 36

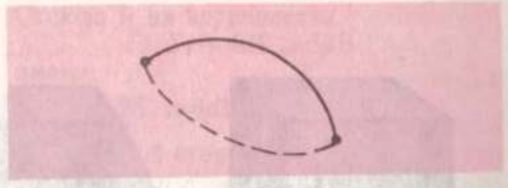


Рис. 37

венное ребро. Выберем какую-нибудь вершину, например вершину A (рис. 36), и пойдем по пути, составленному из плотин, причем не будем проходить никакую вершину дважды. В конце концов, так как число вершин конечно, мы придем в тупик (например, придем в вершину G на рис. 36). Тогда отрезок-тупик, т. е. вершину G и прилежащее к ней ребро-плотину, отрежем. В оставшейся системе опять выберем какую-нибудь вершину, пойдем от нее и отрежем получившийся тупик. Поступая так, мы наконец придем к системе, в которой нет плотин, а имеется только одна вершина, которая останется после отрезания последнего тупика. Таким образом, число оставшихся плотин равно (В — 1).

Окончательно получаем:

$$\text{Р}=(\text{Г}-1)+(\text{В}-1),$$

откуда

$$\text{Г}+\text{В}-\text{Р}=2.$$

Теорема доказана.

Решим несколько задач.

Задача 1. Выпуклый многогранник имеет своими гранями только четырехугольники. Сколько он имеет вершин и граней, если: а) Р = 12; б) Р = 15? Изобразим эти многогранники.

Решение. Обозначим число сторон в каждой грани через n. По условию $n=4$. Тогда $\text{Г}\cdot n=2\text{Р}$, так как

2 Зак. 3885 И. М. Смирнова

а) б)

Рис. 38

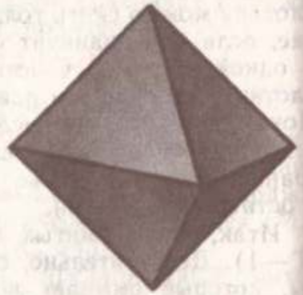


Рис. 39

каждое ребро принадлежит двум граням. Отсюда имеем $Г=\frac{2\cdot Р}{n}$. Количество вершин многогранника можно найти, применив теорему Эйлера:

$$Г+В-Р=2;\ В=2+Р-Г;$$
$$В=2+Р-\frac{2\cdot Р}{n}.$$

В случае а) $В=2+12-\frac{2\cdot 12}{4}=8$. Таким образом, $Г=6$, $В=8$, $Р=12$. Это может быть любая четырехугольная призма, например куб (рис. 38, *а*), а также любая усеченная четырехугольная пирамида (рис. 38, *б*).

В случае б) $В=2+12-\frac{2\cdot 15}{4}=6{,}5$. Такого многогранника не существует.

Задача 2. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если: а) $Р=12$; б) $Р=20$? Изобразим такие многогранники.

Решение. Пусть из каждой вершины выходит m ребер. По условию $m=4$. Тогда $В\cdot m=2\cdot Р$, так как каждое ребро принадлежит двум вершинам. Отсюда $В=\frac{2\cdot Р}{m}$. Подставляя это выражение в формулу Эйлера, получим количество граней многогранника:

$$Г+В-Р=2;\quad Г=2+Р-В;$$
$$Г=2+Р-\frac{2\cdot Р}{m}.$$

В случае а) $Г=2+12-\frac{2\cdot 12}{4}=8$. Таким образом, $Г=8$, $В=6$, $Р=12$. Многогранник — октаэдр или четырехугольная бипирамида (рис. 39).

В случае б) $Г=2+20-\frac{2\cdot 20}{4}=12$. Таким образом, $Г=12$, $В=10$, $Р=20$.

Задача 3. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 ребер, а все многогранные углы трехгранные. Докажем, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

Решение. Обозначим число пятиугольных граней $Г_5$, соответственно шестиугольных — $Г_6$ и семиугольных — $Г_7$; $Г_5-Г_7=x$. Тогда

$$Г_5\cdot 5+Г_6\cdot 6+Г_7\cdot 7=2\cdot Р;$$
$$6(Г_5+Г_6+Г_7)+Г_7-Г_5=2\cdot Р,$$

где $Г_5+Г_6+Г_7=Г$. Далее имеем $6\cdot Г-x=2\cdot Р$; $Р=\frac{6Г-x}{2}$, но $2\cdot Р=$

$=В\cdot 3$, так как по условию задачи все многогранные углы трехгранные. Тогда $В=\frac{6Г-x}{3}$. Подставляя выражение для В и Р через число граней в формулу $Г+В-Р=2$, имеем:

$$Г+\frac{6Г-x}{3}-\frac{6Г-x}{2}=2;$$
$$6\cdot Г+12\cdot Г-2\cdot x-18\cdot Г+3x=12;$$
$$x=12;\ Г_5-Г_7=12,$$

что и означает, что в данном многограннике число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных граней.

Задача 4. Докажем, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная грань или трехгранный угол.

Решение. Допустим, что существует многогранник M, не имеющий ни треугольных граней, ни трехгранных углов. Пусть В — число его вершин. Выберем внутри каждой грани α_i точку O_i и соединим ее со всеми вершинами α_i. Тогда все грани разобьются на треугольники. Из каждой вершины исходит не менее четырех ребер, каждое ребро соединяет две вершины. Отсюда $Р\geqslant\frac{4\cdot В}{2}=2\cdot В$. Так как каждому ребру принадлежат два треугольника на двух смежных гранях, то общее число треугольников не меньше $4\cdot В$, и, следовательно, сумма всех их углов

$$S\geqslant 2\cdot d\cdot 4\cdot В=8dВ.$$

Пусть S_1 — сумма всех плоских углов M. Тогда $S=S_1+4dГ$. Обозначим через A_i сумму внутренних углов грани α_i, тогда

$$S_1=A_1+A_2+...+A_Г.$$

Так как все A_i по меньшей мере четырехугольники, то $A_i\geqslant 4\cdot d$ ($i=1, 2, ..., Г$). Сложив почленно неравенства $A_1\geqslant 4d$, $A_2\geqslant 4d$, ..., $A_Г\geqslant 4d$, получим:

$$S_1=A_1+A_2+...+A_Г\geqslant 4dГ.$$

Отсюда и из неравенства

$$S_1+4dГ\geqslant 8dВ$$

имеем:

$$2S_1\geqslant 8dВ,\ \text{т. е. }\ S_1\geqslant 4dВ.$$

С другой стороны, так как M — выпуклый многогранник, сумма плоских углов при каждой вершине меньше $4d$, и, следовательно, сумма всех плоских углов $S_1<4dВ$. Получили противоречие.

Итак, доказано, что в любом выпуклом многограннике имеется треугольная грань или трехгранный угол.

Задачи

5. Может ли выпуклый многогранник иметь 21 плоский угол?

6. Докажите, что не существует многогранника с семью ребрами.

7. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько он имеет вершин и граней, если: а) $Р=12$; б) $Р=15$? Изобразите такие многогранники.

8. Из каждой вершины выпуклого многогранника исходят три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если: а) $Р=12$; б) $Р=15$? Изобразите такие многогранники.

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии — крупного раздела современной математики. Давайте разберемся почему.

Представим поверхность многогранника сделанной из тонкого эластичного материала. Тогда при различных ее деформациях — сжатиях и растяжениях, не допускающих, однако, разрывов, число граней, вершин и ребер не изменится. Таким образом, не изменится и соотношение Эйлера:

$$Г+В-Р=2.$$

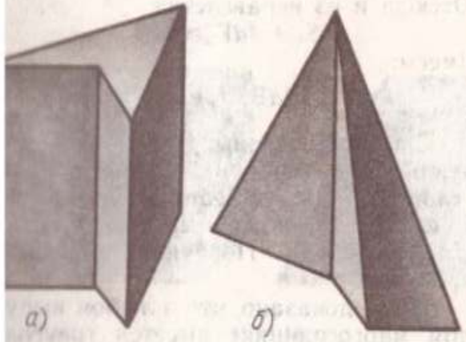


Рис. 40

юйства фигур, которые не изменяют-, или, как говорят, инвариантны от-осительно всевозможных деформаций, допускающих разрывов и склеива-й, изучаются в топологии и назы-ются топологическими свойствами. менно таким свойством многогранни-в является теорема Эйлера.

Заметим, что термин «топология» ервые появился в 1847 году в работе Предварительные исследования по то-логии» геттингенского математика и изика Иоганна Бенидикта Листинга 808—1882). Этот термин, ныне обще-инятый, применялся до 20-х годов X столетия довольно редко.

Л. Эйлер доказал свою теорему для пуклых многогранников. Позже было мечено, что формула Эйлера верна только для выпуклых многогран-ков, но и для некоторых невыпук-х, например для призмы и пира-ды, изображенных соответственно на сунках 40, *а* и 40, *б*.

Для случая *а*: Г=6, В=8, Р=12. ким образом, Г+В−Р=2.

В случае *б*: Г=6, В=6, Р=10, т. е., к и в первом случае,

$$Г+В-Р=2.$$

Все многогранники, для которых справедлива теорема Эйлера, называются *эйлеровыми многогранниками* или *многогранниками нулевого рода*. Наглядно их поверхность, сделанную из тонкого эластичного материала, можно «натянуть» на сферу. В этом случае говорят, что поверхность многогранника *гомеоморфна сфере*.

Вообще две фигуры называются гомеоморфными, если между ними можно установить *взаимно однозначное* (т. е., во-первых, никакие две различные точки первой фигуры не переходят в одну и ту же точку второй фигуры и, во-вторых, каждая точка второй фигуры поставлена в соответствие некоторой точке первой фигуры) и *взаимно непрерывное* отображение (т. е. если f — непрерывное отображение, то и f^{-1} — непрерывное отображение). Рассмотрим несколько примеров гомеоморфных фигур:

1. Полуокружность с центром в точке O и диаметром AB, из которой исключены точки A и B, гомеоморфна касательной CD, параллельной AB (рис. 41).

Отображение построено таким образом, что точке X полуокружности соответствует такая точка X' на касательной, которая является точкой пересечения прямых OX и CD, где O — центр полуокружности.

2. Поверхности куба, цилиндра гомеоморфны поверхности шара. Однако все эти поверхности не гомеоморфны

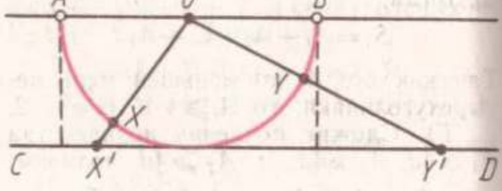


Рис. 41

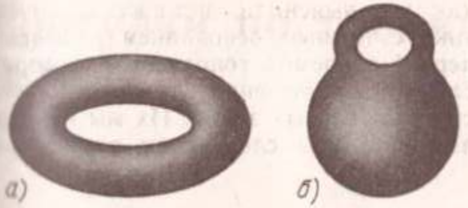


Рис. 42

тору. Тор наглядно можно представить себе в виде баранки или автомобильной камеры (рис. 42, *а*). Поверхность тора гомеоморфна поверхности гири (рис. 42, *б*).

3. Будем представлять буквы русского алфавита в виде линий. Тогда буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Аналогично буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны первому набору букв. Буква О не гомеоморфна ни одной другой букве русского алфавита.

(Любознательного читателя отсылаем к книге: Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология.— М.: Наука, 1982.)

Наглядно многогранники, гомеоморфные сфере, можно представить себе без «дыр» в отличие от многогранника с одной «дырой» (рис. 43, *а*), многогранника с двумя «дырами» (рис. 43, *б*) и т. д. с *p* «дырами», поверхность которых не гомеоморфна сфере и которые называются соответственно многогранниками первого рода, второго рода и т. д. *p*-го рода.

Для произвольного многогранника *p*-го рода было доказано следующее соотношение: $Г+В-Р=2-2p$, где Г — число граней, В — вершин и Р — ребер многогранника. Покажем справедливость этого соотношения для многогранников, изображенных на рисунке 43, *а*, *б*. Для этого разобьем каждую грань многогранника с одной «дырой» так, как показано на рисунке 44, *а*. Тогда

$$Г=16,\ В=16,\ Р=32$$

и

$$Г+В-Р=0;$$

$$2-2\cdot p=2-2\cdot 1=0.$$

Таким образом,

$$Г+В-Р=2-2p.$$

Аналогично для многогранника второго рода (рис. 44, *б*) имеем

$$Г=30,\ В=24,\ Р=56$$

и

$$Г+В-Р=30+24-56=-2;$$

$$2-2\cdot p=2-2\cdot 2=-2,$$

т. е.

$$Г+В-Р=2-2p.$$

Различные обобщения теоремы Эйлера сыграли существенную роль в создании и развитии современной тео-

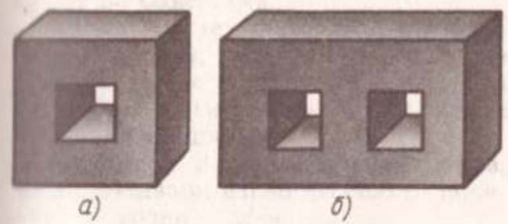


Рис. 43

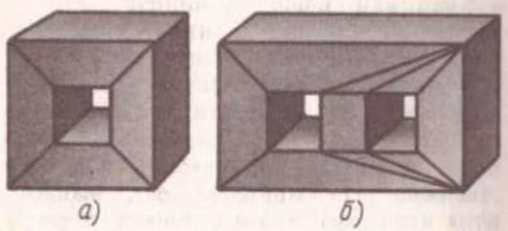


Рис. 44

рии многогранников. Впервые обратил внимание на то, что теорема Эйлера справедлива не для всех многогранников, швейцарский математик, профессор Женевского университета Симон Люилье (1750—1840). В 1813 году им была написана работа «Мемуар по полиэдрометрии», в которой были найдены условия, при которых справедлива теорема Эйлера, и установлено, что для многогранников с p сквозными отверстиями — «дырами», многогранников p-го рода, справедливо соотношение

$$Г+В-Р=2-2p.$$

Итак, в данном параграфе мы рассмотрели одно из самых интересных и удивительных свойств многогранников — теорему Эйлера, которую, как мы выяснили, историки математики с полным основанием называют первой теоремой топологии и которая служит для решения большого класса содержательных задач. Их мы и предлагаем вам в следующем параграфе.

Литература

Гиндикин С. Г. Леонард Эйлер // Квант.— 1983.— № 10, 11.

Рюдигер Тиле. Леонард Эйлер.— Киев: Вища школа, 1983.

Юшкевич А. П. Леонард Эйлер и математическое просвещение в России // Математика в школе.— 1983.— № 5.

Яковлев А. Я. Леонард Эйлер.— М.: Просвещение, 1983.

Проблема четырех красок, прогулки по тропинкам и мостам

5

В одном из доказательств теоремы Эйлера поверхность многогранника «растягивают» на плоскости. При этом грани и ребра многогранника деформируются, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются. На плоскости при этом образуется сетка, состоящая из точек и отрезков, которые их соединяют. Такое множество точек и множество отрезков (или даже дуг) называется *графом*. Точки называются *вершинами* графа, а отрезки (или дуги) — *ребрами* графа.

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, схемы железных или шоссейных дорог, структурные формулы молекул, планы выставок и т. д., т. е. схемы, планы, карты без указания их масштабов, показывающие лишь связи между принадлежащими им объектами.

Граф, соответствующий выпуклому многограннику, называется *плоским графом* (у него никакие два ребра не имеют других общих точек, кроме их общей вершины).

Приведем примеры таких графов, введя предварительно несколько понятий из теории графов.

Путь — последовательность ребер графа, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза. *Простой путь* — это путь, не проходящий ни через одну вершину графа более одного раза. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 45.

Последовательность ребер A_1A_2; A_2A_9; A_9A_8; A_8A_7; A_7A_5; A_5A_{10} является простым путем от вершины A_1 до вершины A_{10}.

Последовательность же ребер A_1A_2, A_2A_8, A_8A_9, A_9A_2, A_2A_6, A_6A_5, A_5A_{10} не является простым путем от вершины A_1 до вершины A_{10}, так как путь проходит дважды через вершину A_2. Понятие «путь» приводит в теории графов к важному в математике понятию «связность» (см. «Что такое многогранник?»).

Две вершины графа называются *связными*, если в графе существует путь с концами в этих вершинах. Если в графе не существует ни одного такого пути, то вершины графа называются *несвязными*.

Граф называется *связным*, если каждые две вершины его связные. Граф называется *несвязным*, если хотя бы две вершины его несвязные.

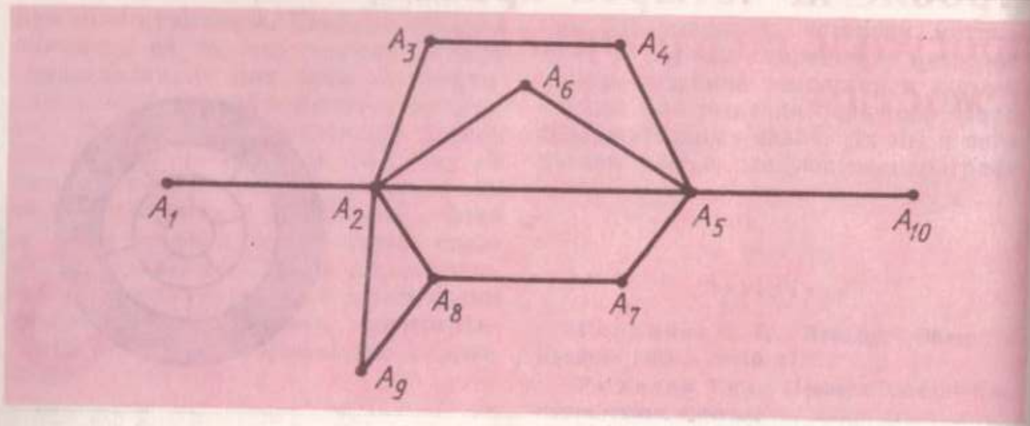


Рис. 45

Графы на рисунках 46, *а* и 46, *б* являются связными, на рисунках 46, *в* и 46, *г* — несвязными.

Рисунок графа, в котором никакие два его ребра не пересекаются, кроме имеющих общие вершины, называется *плоским представлением графа*. Ясно, что плоское представление имеет только плоский граф. Обратно, у всякого плоского графа обязательно найдется плоское представление.

На рисунках 47, *а* и 47, *в* представлены примеры плоских графов, а на рисунках 47, *б* и 47, *г* — соответственно их плоские представления.

В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани.

Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым путем и не содержащая внутри других путей.

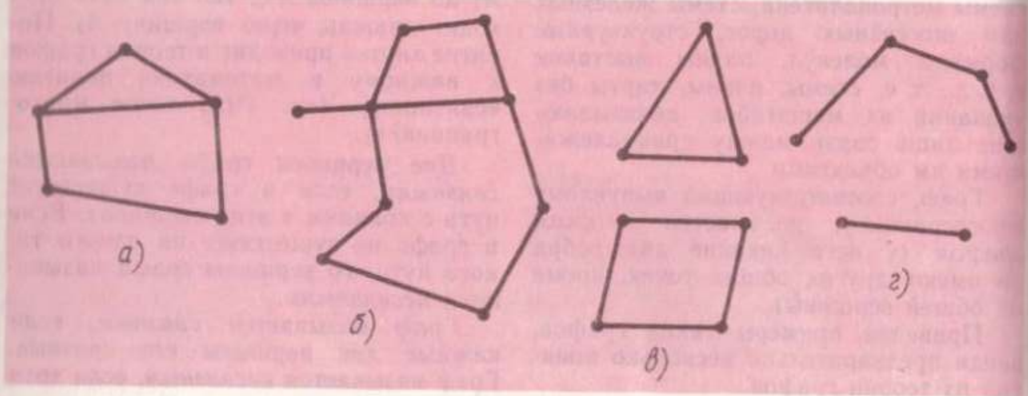


Рис. 46

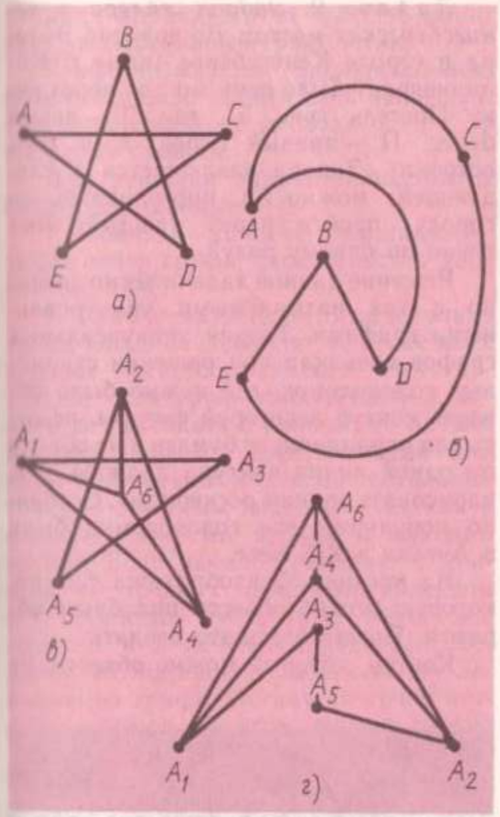


Рис. 47

На рисунке 48 изображенный граф имеет следующие грани: *MNHP*, *NKH*, *KLH*, *LPH*.

В теории графов доказывается, что для любого плоского представления связного плоского графа выполняется соотношение Эйлера:

$$\Gamma + B - P = 2,$$

где Г — число граней, В — вершин и Р — число ребер в плоском представлении плоского графа.

Таким образом, мы установили связь

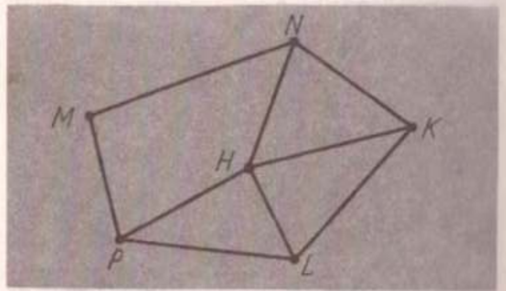


Рис. 48

теории многогранников еще с одним разделом математики — теорией графов (рис. 49).

Теория графов, формула Эйлера используются для решения многих интересных задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. *О трех домиках и трех колодцах.* Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками D_1, D_2, D_3, а колодцы точками K_1, K_2, K_3. Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять отрезков, которые попарно пересекаются (рис. 50).

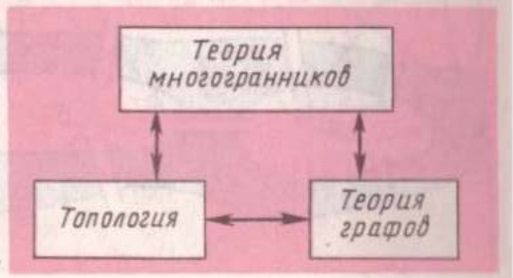


Рис. 49

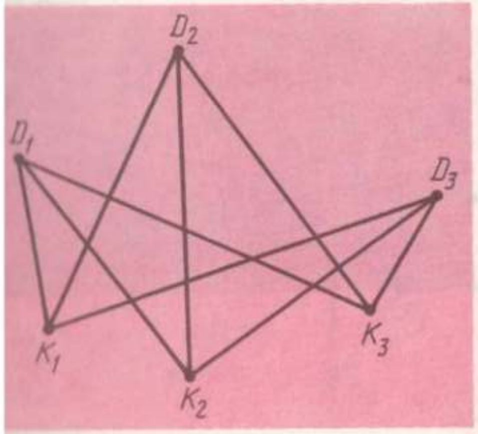


Рис. 50

Всякие две точки, изображающие омики и колодцы, будут соединены епочкой отрезков, и в силу теоремы йлера эти девять отрезков разделяют лоскость на пять граней, В=6, Р=9. аждая из пяти граней ограничена по райней мере четырьмя отрезками, покольку по условию задачи ни одна з дорожек не должна непосредственo соединять два дома или два колода. Поэтому число отрезков должно ыть не меньше $\frac{5 \cdot 4}{2}=10$, и, следоваельно, наше предположение неверно.

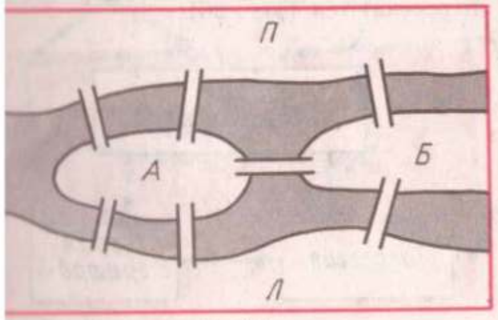


Рис. 51

• Задача 2. *Задача Эйлера о кенигсбергских мостах.* Во времена Эйлера в городе Кенигсберге (ныне г. Калининград) было семь мостов через реку Прегель (рис. 51, где Л — левый берег, П — правый берег, А и Б — острова). Задача заключается в следующем: можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост точно по одному разу?

Решение данной задачи тесно связано с так называемыми уникурсальными графами. Теория уникурсальных графов возникла при решении старинных головоломок, где нужно было обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. нарисовать «одним росчерком». Особенно популярны эти головоломки были в Англии в XIX веке.

На рисунке 52 изображена фигура, которую можно обвести подобным образом. Попытайтесь это сделать.

Контур, который можно обвести, не

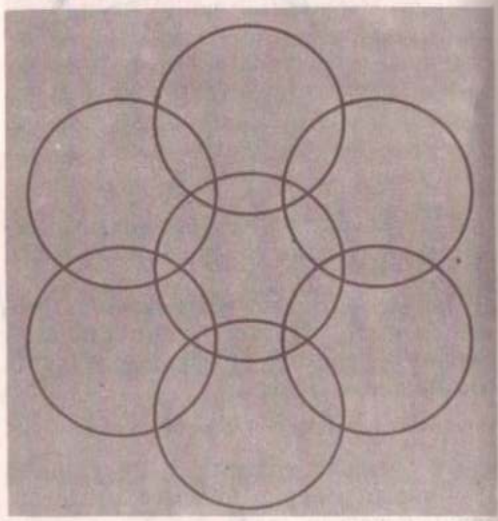


Рис. 52

отрывая карандаша от бумаги, образует уникурсальный граф. Итак:

Граф называется *уникурсальным*, если его можно пройти весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды.

Для решения задачи понадобятся следующие данные:

1. Понятие «индекс вершины» — число ребер графа, сходящихся в данной вершине.

2. Граф уникурсален тогда и только тогда, когда он содержит не более двух вершин нечетного индекса. Действительно, если граф уникурсален и начало не совпадает с концом, то начало и конец являются единственными точками с нечетным индексом, остальные точки — с четным индексом, так как в каждую точку мы входим и выходим из нее. Если начало совпадает с концом, то точки с нечетным индексом нет. Обратно, пусть граф имеет две точки A и B нечетного индекса. Соединим их ломаной и выбросим эту ломаную из графа. Останутся точки четного индекса. В этом случае можно начать из любой точки и в нее же вернуться. Выбросив образованный таким образом граф из основного графа, получим граф с четными вершинами и меньшим их количеством. Повторяя эту процедуру, мы обойдем весь граф. Таким образом, граф уникурсален. Значит, имеет не более двух вершин нечетного индекса.

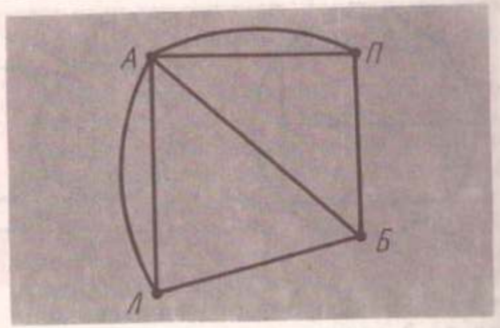


Рис. 53

Решение. Сопоставим с планом мостов города граф, изображенный на рисунке 53. Определим четность всех вершин графа. Вершина А имеет четность 5, Б — 3, П — 3, Л — 3. Таким образом, граф имеет более двух вершин нечетного индекса и, следовательно, не является уникурсальным. Отсюда следует, что нельзя пройти во время

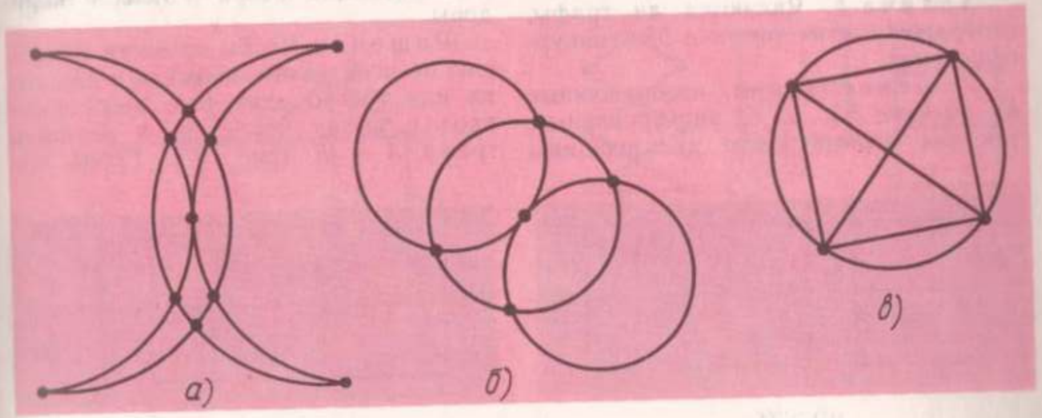


Рис. 54

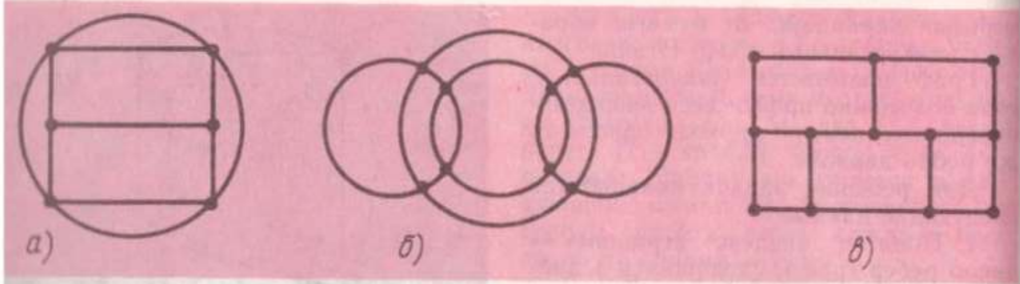


Рис. 55

прогулки по городу по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

Задача 3. Можно ли нарисовать «одним росчерком» графы, изображенные на рисунке 54, *а, б, в*?

Решение. Графы, изображенные на рисунке 54 *а, б*, можно нарисовать «одним росчерком». Они уникурсальны, так как все вершины четного индекса.

Граф на рисунке 54, *в* не является уникурсальным, так как все его вершины, а их четыре, имеют нечетный индекс, равный 5, поэтому его нельзя нарисовать «одним росчерком».

Задача 4. Являются ли графы, изображенные на рисунке 55, уникурсальными?

Решение. Графы, изображенные на рисунке 55, *а, б*, уникурсальные, так как первый имеет две вершины нечетного индекса (найдите их сами), а у второго таких вершин нет; на рисунке 55, *в* изображен неуникурсальный граф, он содержит больше двух вершин нечетного индекса.

Попробуйте обвести контуры этих уникурсальных графов.

Задача 5. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Где на выставке следует при этом сделать вход и выход? Соответствующий граф изображен на рисунке 56. Вершины графа — это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра — залы и коридоры.

Решение. Чтобы провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них только один раз, необходимо вход и выход поместить в вершины графа *A* и *B* (рис. 57). Граф уникурсален — все вершины имеют четный индекс.

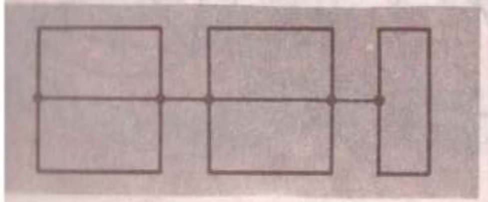


Рис. 56

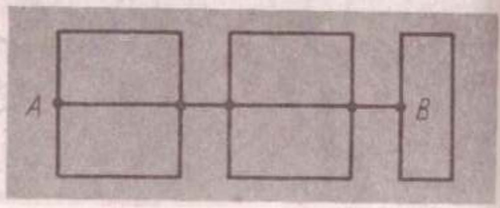


Рис. 57

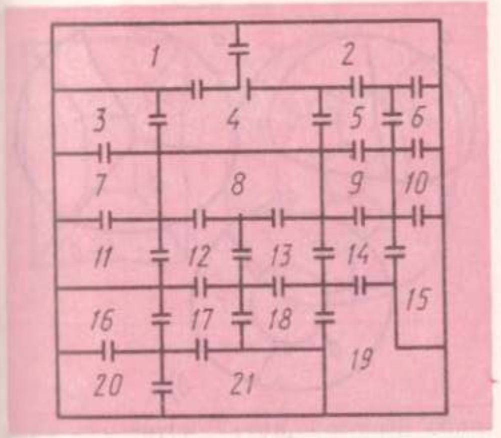


Рис. 58

Задача 6. На рисунке 58 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После смерти рыцаря его наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую; сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

Решение. Начертим граф, соответствующий плану подземелья. Его вершины — комнаты, а ребра соединяют те вершины, которые соответствуют комнатам, связанным дверью (рис. 59). Тогда все вершины, кроме 6 и 18, имеют четный индекс. Следовательно, граф уникурсален. Вершина 6 — крайняя, вершина 18 — некрайняя. Значит, путь начинается с вершины 6, а заканчивается в вершине 18. Таким образом, сокровища находятся в комнате 18.

● Следующие задачи попытайтесь решить самостоятельно.

Задача 7. Можно ли нарисовать графы, изображенные на рисунке 60, «одним росчерком»? Если да, обведите их контур.

Задача 8. Нарисуйте уникурсальный граф с восемью вершинами.

Задача 9. На рисунке 61 изображена схема зоопарка. (Вершины графа — вход, выход, перекрестки, повороты, тупики, ребра — дорожки, вдоль которых расположены клетки.) Найдите маршрут, по которому экскурсовод мог бы провести посетителей, показав им

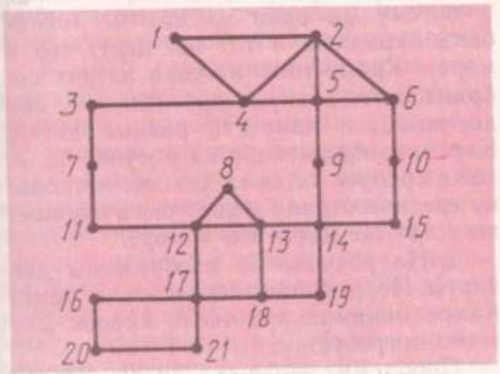


Рис. 59

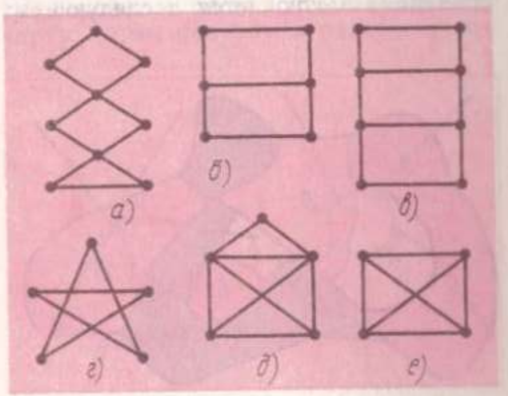


Рис. 60

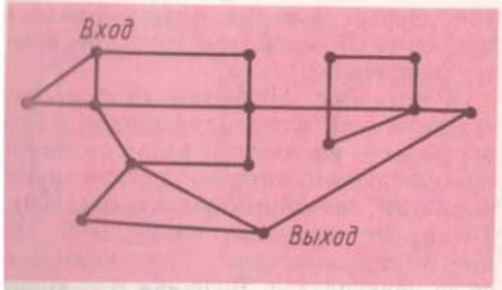


Рис. 61

всех зверей и не проходя более одного раза ни одного участка пути.

Самой интересной из всех великих математических гипотез, не доказанных, но и не опровергнутых на сегодняшний день, является знаменитая проблема четырех красок. Она заключается в следующем. На рисунке 62 изображен граф. Области, на которые этот граф разбивает плоскость, называются странами. Страны А и Б пограничны (примыкают друг к другу по общему ребру). Страны Б и В также пограничны (у них даже по два общих ребра). Страны А и В не являются пограничными, хотя у них есть общая точка, но нет общих ребер.

Задача заключается в следующем:

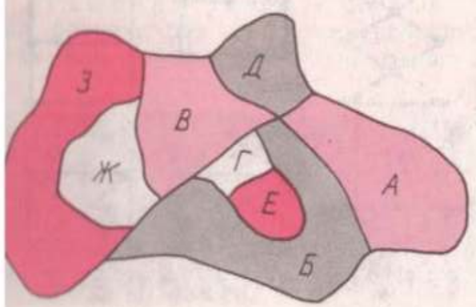


Рис. 62

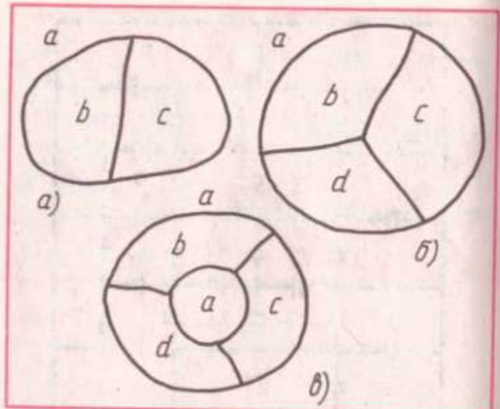


Рис. 63

раскрасить страны в разные цвета так, чтобы пограничные страны были окрашены в разные цвета, непограничные страны можно окрашивать одним цветом. Спрашивается: какое минимальное количество красок нужно взять, чтобы можно было раскрасить таким образом любую карту на плоскости? Например, чтобы показать две страны на острове и море (рис. 63, *а*), нужны три краски (на рисунке они названы *a*, *b*, *c*). На рисунке 63, *б* карта требует четырех красок (*a*, *b*, *c*, *d*, так как все три страны примыкают к морю, а потому ни одна из них не может быть окрашена в тот же цвет, что и море). Кроме того, каждая из них соприкасается с двумя другими, т. е. они должны все получить разные цвета. Карта, изображенная на рисунке 63, *в*, тоже требует четырех красок, поскольку средняя страна может быть окрашена в тот же цвет, что и море.

● На рисунке 64 изображены две карты. Попробуйте раскрасить их сами. Какое минимальное число красок для этого потребуется?

Проблема четырех красок была сформулирована в 1852 году лондон-

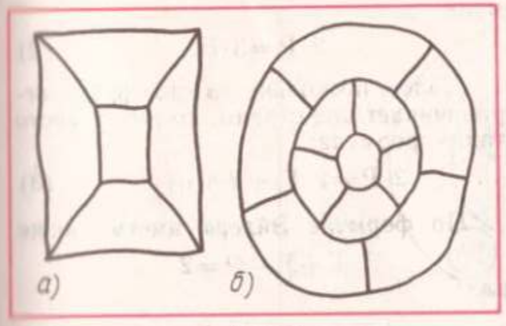


Рис. 64

ским студентом Гутри, который обнаружил, что для различия графств на карте Англии достаточно четырех красок, и выдвинул гипотезу о том, что четырех красок достаточно для раскраски любой карты. Спустя сорок лет английский математик Хивуд доказал, что любую карту на плоскости можно раскрасить в пять цветов. Постепенно проблема четырех красок приобретала все больший интерес. В 1968 году американские математики Оре и Стемпл показали, что любую карту, имеющую не более 40 стран, можно раскрасить в четыре цвета.

В настоящее время для решения этой проблемы существенно используют компьютеры, что связано с выполнением огромного количества вычислений.

В 1976 году американскими учеными К. Аппелем и В. Хакеном было получено первое машинное решение. С помощью машины они просматривали различные типы карт, и для каждого из них машина решала, может ли в данном типе найтись карта, которая не раскрашивается в четыре цвета. Учеными было просмотрено почти 2000 типов карт, и для всех был получен ответ: «Нет», что и позволило объявить о машинном решении проблемы четырех красок. Однако, так как нельзя гарантировать, что все типы карт определены и просмотрены, нельзя и считать полученное решение окончательным. Так что проблема четырех красок, которая более 100 лет будоражит умы математиков, остается пока открытой. Зато доказано, что любую карту можно раскрасить пятью красками. Заметим, что при этом ни одна пара стран, имеющих общую границу, не получает одинаковой раскраски. Однако для стран, соприкасающихся лишь в одной точке, допускается одна общая краска, как на шахматной доске. Рассмотрим это доказательство.

Теорема. *Любую карту можно раскрасить пятью красками.*

Доказательство. Рассмотрим карту на плоскости. Без ограничения общности можно предполагать, что в каждой вершине этой карты сходятся ровно три ребра. Действительно, если в каких-нибудь вершинах сходится большее число ребер, как показано на рисунке 65, *а*, то проведем небольшие окружности с центрами в этих точках и образуем новую карту, в которой вместо этих вершин появятся новые страны в форме кругов. Причем число ребер, сходящихся в каждой вершине такой карты, уже будет равно трем. Если удастся раскрасить полученную карту, то мы получим и раскраску ис-

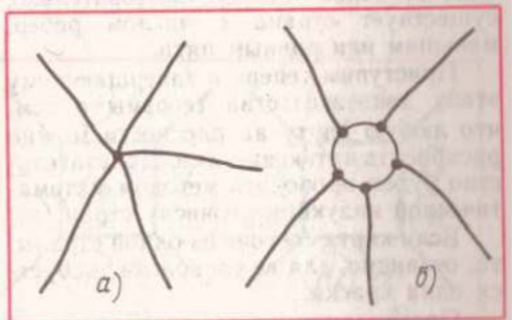


Рис. 65

ходной карты, убрав страны в форме кругов.

Используя теорему Эйлера, покажем, что для любой карты на плоскости, в каждой вершине которой сходятся три ребра, существует страна с числом ребер, меньшим или равным пяти. Обозначим через Γ_n число стран в такой карте с числом ребер, равным n. Тогда общее число стран Г вычисляется по формуле

$$\Gamma=\Gamma_2+\Gamma_3+\ldots \quad (1)$$

Обозначим через Р общее число ребер и через В общее число вершин в карте.

Тогда поскольку у каждого ребра две вершины и в каждой вершине сходятся три ребра, то имеет место формула

$$2\cdot P=3\cdot B. \quad (2)$$

Далее, поскольку каждое ребро ограничивает две страны, то имеет место такая формула:

$$2\cdot P=2\cdot\Gamma_2+3\cdot\Gamma_3+\ldots \quad (3)$$

По формуле Эйлера имеем также

$$\Gamma+B-P=2$$

или

$$6\cdot\Gamma+6\cdot B-6\cdot P=12. \quad (4)$$

Выразим В через Р по формуле (2), Р через Γ_2, Γ_3, ... по формуле (3) и Г через Γ_2, Γ_3, ... по формуле (1). Подставляя эти выражения в формулу (4), получим равенство

$$6\cdot\Gamma_2+6\cdot\Gamma_3+\ldots-(2\cdot\Gamma_2+3\cdot\Gamma_3+\ldots)=12$$

или

$$4\cdot\Gamma_2+3\cdot\Gamma_3+2\cdot\Gamma_4+\Gamma_5+0\cdot\Gamma_6-\Gamma_7-\ldots=12.$$

Так как вся сумма в левой части этого равенства положительна, а все слагаемые в ней, начиная с шестого, отрицательны, то среди чисел Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 обязательно должно найтись хотя бы одно отличное от нуля. Следовательно, существует страна с числом ребер, меньшим или равным пяти.

Приступим теперь к завершающему этапу доказательства теоремы о том, что любую карту на плоскости можно раскрасить пятью цветами. Доказательство будем проводить методом математической индукции по числу стран.

Если карта состоит из одной страны, то, очевидно, для ее раскраски требуется одна краска.

Предположим, мы доказали, что любую карту на плоскости, состоящую не более чем из n стран, можно раскрасить пятью красками.

Рассмотрим карту, состоящую из $(n+1)$ страны, и покажем, что ее также можно раскрасить пятью красками. В силу доказанного выше можно предполагать, что в каждой вершине карты сходятся три ребра и существует страна C с числом ребер, меньшим или равным пяти. Возможны несколько следующих случаев:

Случай 1. Страна C имеет два ребра, граничащие с двумя странами C_1 и C_2 (рис. 66, *а*).

Удалим общую границу между странами C и C_1. Получим карту, в которой вместо стран C и C_1 имеется одна страна $\tilde{C}_1$. По предположению индукции ее можно раскрасить пятью красками.

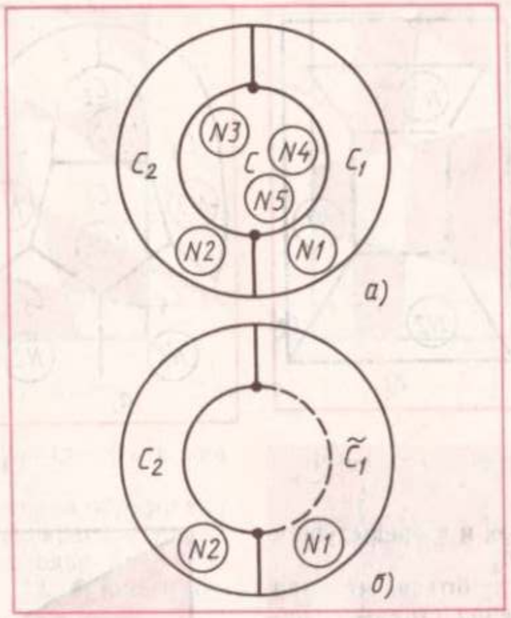


Рис. 66

Если страна $\tilde{C}_1$ покрашена краской № 1, а страна C_2 — краской № 2, то, восстанавливая прежнюю границу и перекрашивая в исходной карте страну C любой из оставшихся красок — № 3, № 4 или № 5, получим требуемую раскраску нашей карты.

Случай 2. Страна C имеет три ребра. Доказательство этого случая аналогично предыдущему и опирается на рисунки 67, *а* и 67, *б*.

Случай 3. Страна C имеет четыре ребра. Если разные ребра страны C являются границами разных стран, то

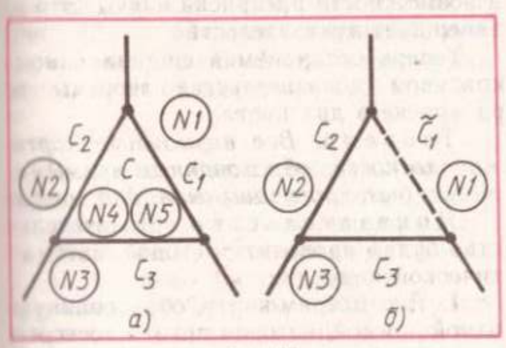


Рис. 67

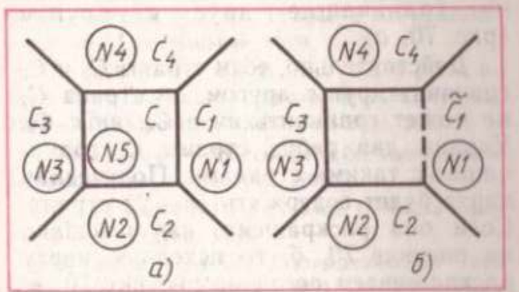


Рис. 68

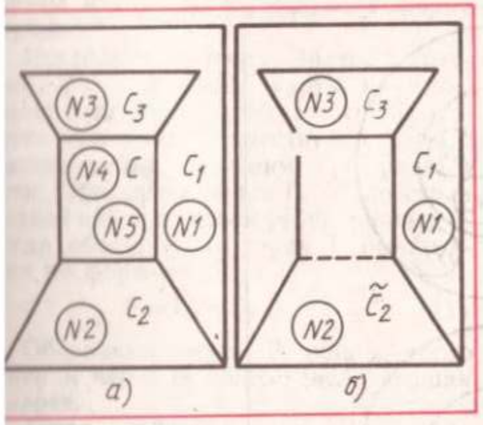


Рис. 69

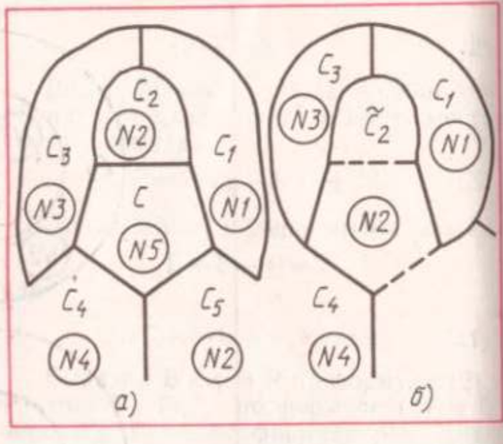


Рис. 70

оступаем так же, как и в предыдущем лучае (рис. 68, *а*, *б*).

Однако может случиться, что два ротивоположных ребра страны C являются границами одной и той же траны. В этом случае никакое из этих ебер удалить нельзя. Однако в этом лучае два соседних ребра не могут ыть границами одной страны, и, следовательно, одно из этих ребер можно удалить и далее поступать, как в преыдущих случаях (рис. 69).

Случай 4. Страна C имеет пять ребер. Граничащие с C страны обознаим соответственно C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Среди этих стран всегда найдутся две е граничащие друг с другом рис. 70, *а*).

Действительно, если страны C_1 и C_3 граничат друг с другом, то страна C_2 е может граничить ни с C_4, ни с C_5. Удалим два ребра страны C, граничащие с такими странами. Полученная карта будет содержать $(n-2)$ страну. Если она раскрашена, как показано а рисунке 70, *б*, то исходную карту раскрашиваем согласно рисунку 70, *а*.

Таким образом, мы рассмотрели все

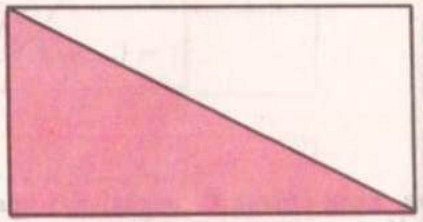


Рис. 71

случаи и в каждом из них убедились в возможности раскраски карты. Это и завершает доказательство.

Теперь остановимся еще на одном красивом доказательстве теоремы о раскраске в два цвета.

Теорема. *Все возможные карты на плоскости, образованные прямыми, могут быть раскрашены в два цвета.*

Доказательство. Доказательство будем проводить методом математической индукции.

1. Рассмотрим карту, образованную одной прямой, которая делит плоскость на две области (рис. 71). Ясно, что

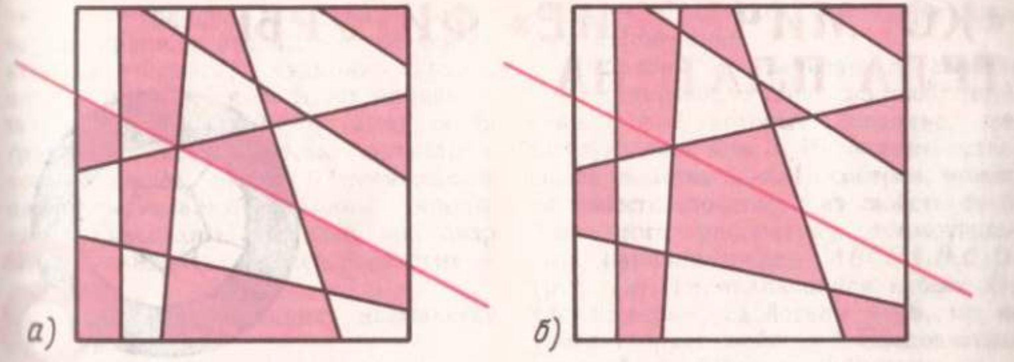


Рис. 72

такую карту можно раскрасить в два цвета.

2. Пусть карту, которая образована n прямыми, можно раскрасить в два цвета. Проведем еще одну $(n+1)$-ю прямую (на рисунке 72, *б* она показана красной линией).

Новая прямая разделила плоскость на две новые карты. Каждая из них в отдельности раскрашена правильно — в два цвета, но к новой прямой — границе — примыкают пары областей, раскрашенных в один и тот же цвет. Для того чтобы восстановить правильную раскраску всей карты в целом, нужно перекрасить одну из карт (безразлично, какую именно), изменив цвет каждой области на противоположный (рис. 72, *а*). Получим, очевидно, всю карту, раскрашенную правильно в два цвета. Теорема доказана.

Задачи

10. На плоскости начерчен граф, все вершины которого имеют четные индексы. Докажите, что получившаяся карта может быть раскрашена в два цвета.

11. Сколько красок должен взять художник, чтобы раскрасить абстрактную картину, представленную на рисунке 73?

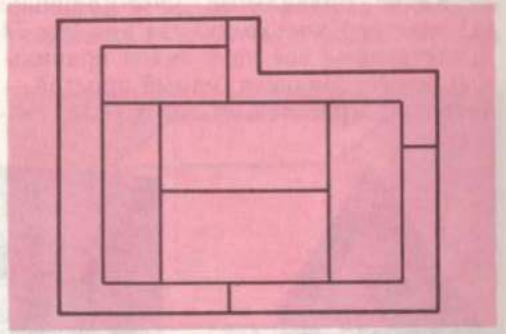


Рис. 73

Литература

Бекламов Б. В. Применение теоремы Эйлера к некоторым задачам // Квант.— 1974.— № 10.

Березина Л. Ю. Графы и их применение.— М.: Просвещение, 1979.

Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Наглядная топология.— М.: Наука, 1982.— (Библиотечка «Квант».— Вып. 21).

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.— М.: Мир, 1971.

Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры.— М.: Наука, 1966.

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.— М.: Наука, 1981.— (Библиотечка «Квант».— Вып. 8).

«ИДЕАЛЬНЫЕ», «КОСМИЧЕСКИЕ» ФИГУРЫ — ТЕЛА ПЛАТОНА

Какие правильные многогранники вы знаете? Сколько их? На рисунке 74 представлены все пять видов правильных многогранников: самый простой — тетраэдр (рис. 74, *а*), куб, или гексаэдр (рис. 74, *б*), октаэдр (рис. 74, *в*), додекаэдр (рис. 74, *г*), икосаэдр (рис. 74, *д*).

Почему правильные многогранники получили такие имена? Это связано с

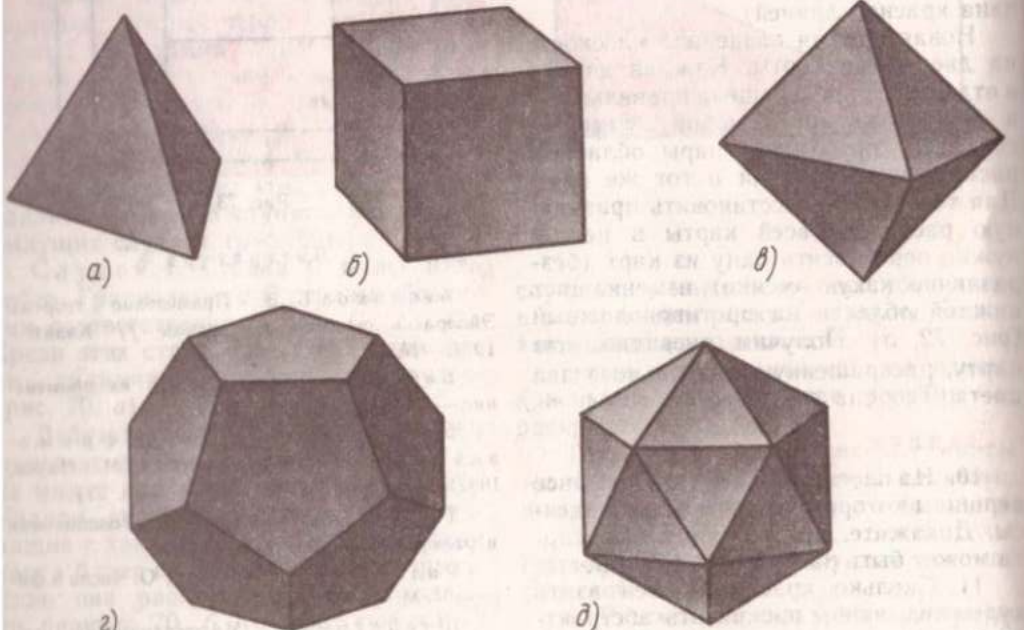


Рис. 74

числом их граней. Так, тетраэдр имеет четыре грани, в переводе с греческого «тетра» — четыре, «эдрон» — грань, вот и получается четырехгранник — тетраэдр. Гексаэдр (куб) имеет шесть граней, «гекса» — шесть; октаэдр — восьмигранник, «окто» — восемь; додекаэдр — двенадцатигранник, «додека» — двенадцать; наконец, икосаэдр имеет двадцать граней, «икоси» — двадцать.

Какой многогранник называется правильным?

Чтобы ответить на этот вопрос, давайте сначала перечислим свойства правильных многогранников. Итак:

1. Все ребра равны.
2. Все плоские углы равны.
3. Все грани — равные правильные многоугольники.
4. Все двугранные углы равны.
5. Все многогранные углы равны.
6. Все многогранные углы имеют одно и то же число граней, и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

Какие же свойства правильных многогранников отнести к определению правильного многогранника? При этом необходимо помнить, что определения должны удовлетворять следующим требованиям:

I. Определение должно быть полным, т. е. перечисленные в нем свойства должны полностью определять данное понятие. Другими словами, любое свойство данного понятия выводится из свойств, перечисленных в определении.

II. Определение должно быть экономным — оно не должно содержать лишних свойств, т. е. ни одно из перечисленных свойств не должно выводиться из остальных.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы отбросить лишние свойства, т. е. которые можно будет вывести из оставшихся. Рассмотрим различные ситуации.

Отбросим из выписанных свойств 1—6 правильного многогранника свойства 1 и 2, которые, очевидно, следуют из свойства 3. Исследуем оставшиеся свойства 3—6. Посмотрим, можно ли вывести свойство 3 из свойств 4—6. Для этого рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 75), не являющийся кубом. Он удовлетворяет свойствам 4—6, но не удовлетворяет свойству 3. Следовательно, свойство 3 нельзя отбросить.

Рассмотрим свойство 4. Иногда считают, что это свойство выводится из свойства 5, т. е. из равенства всех многогранных углов следует равенство всех

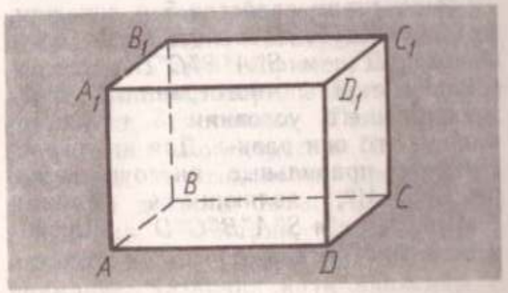


Рис. 75

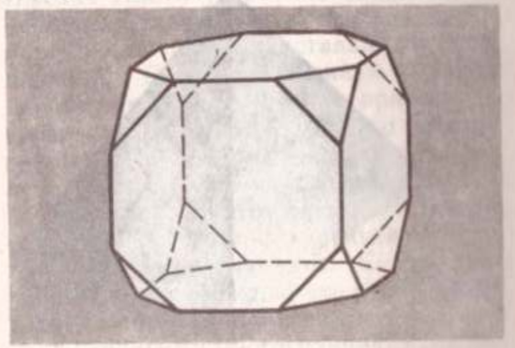


Рис. 76

югранных углов. Покажем, что свой-
во 4 не следует из свойства 5.

Действительно, рассмотрим много-
ранник, который называется усечен-
ым кубом (рис. 76) и получается из
уба, если отсечь от его углов равные
ирамиды. Все многогранные углы этой
игуры равны, а двугранные углы
меются двух типов: те, которые обра-
ованы гранями куба и являющиеся
оэтому прямыми двугранными углами,
те, которые образованы гранью куба
отсекающей плоскостью и являющие-
поэтому тупыми двугранными угла-
и. Таким образом, из равенства всех
ногогранных углов не следует ра-
енство всех двугранных углов, а сле-
ует только равенство соответствующих
вугранных углов.

Рассмотрим свойство 5 и докажем,
то оно следует из свойств 3 и 4. Пусть
$'A'B'C'D'$... и $S''A''B''C''D''$...— мно-
огранные углы многогранника, удов-
етворяющего условиям 3 и 4. До-
ажем, что они равны. Для этого рас-
мотрим правильные многоугольники
M' и M'', являющиеся гранями
$'A'B'C'D'$... и $S''A''B''C''D''$... и лежа-
ие в плоскостях α' и α'' соответст-
венно. Тогда так как M' и M'' равны, то существует перемещение пространства, переводящее M' в M'', причем это перемещение можно выбрать таким образом, чтобы S' переводилось в S'', A' переводилось в A'' и B' переводилось в B'' (рис. 77).

Из равенства двугранных углов $S'B'$ и $S''B''$ следует, что плоскость $B'S'C'$ при этом отображении перейдет в плоскость $B''S''C''$, а из равенства углов $B'S'C'$ и $B''S''C''$ и ребер $S'C'$ и $S''C''$ следует, что точка C' при этом отображении перейдет в точку C''.

Аналогично доказывается, что точка D' перейдет в точку D'' и т. д. Следовательно, многогранный угол $S'A'B'C'D'$... перейдет при этом отображении в многогранный угол $S''A''B''C''D''$..., что и завершает доказательство.

Свойство 6, очевидно, следует из свойства 5. Следовательно, из свойств 3 и 4 можно вывести все остальные, т. е. 1, 2, 5, 6. Таким образом, свойства 3 и 4 удовлетворяют требованиям I и II.

Итак, мы пришли к следующему определению правильного многогранника:

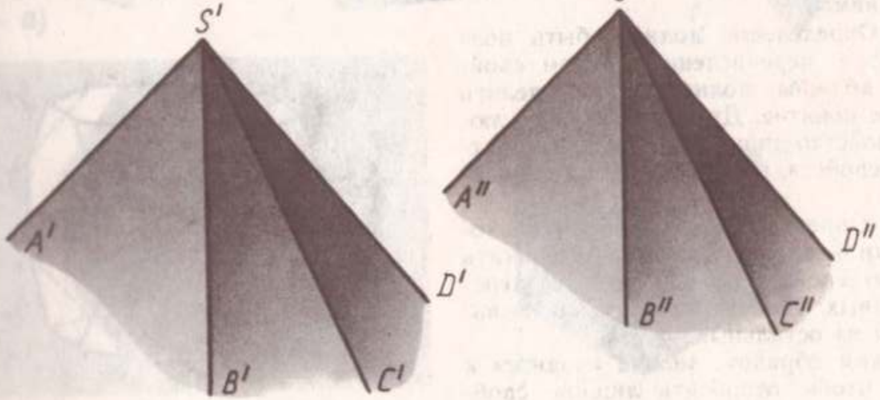


Рис. 77

Определение 1. Правильным многогранником называется многогранник, у которого все грани — правильные равные многоугольники и все двугранные углы равны.

Если взять за основу свойства 3 и 6 и из них вывести остальные, то придем к определению:

Определение 2. Выпуклый многогранник называется правильным, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Это определение приводится в некоторых учебниках по геометрии для средней школы. Определение 1 кажется нам наиболее удачным, так как является пространственным аналогом определения правильного многоугольника на плоскости.

Действительно, рассмотрим определение правильного многоугольника: «Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны».

Аналогом стороны является грань, угла — двугранный угол:

Многоугольник → *Многогранник*
Вершина → Ребро
Сторона → Грань
Угол → Двугранный угол

Таким образом, условие 3 равенства граней в правильном многограннике является пространственным аналогом условия равенства сторон в правильном многоугольнике, а условие 4 равенства двугранных углов является пространственным аналогом равенства углов в правильном многоугольнике. Итак, свойства 3 и 4 являются пространственным аналогом понятия «правильный многоугольник».

История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Мы уже упоминали, что правильными многогранниками увлекались Пифагор и его ученики. Их поражала красота, совершенство, гармония этих фигур. Пифагорейцы считали правильные многогранники божественными фигурами и использовали в своих философских сочинениях о существе мира. Помните, первоосновам бытия — огню, земле, воздуху, воде придавалась форма соответственно тетраэдра, куба, октаэдра, икосаэдра. А вся вселенная имела форму додекаэдра (см. § 1).

Позже учение пифагорейцев изложил в своих трудах другой древнегреческий ученый, философ-идеалист Платон (427—347 гг. до н. э.). Платон не был математиком и не получил никаких результатов в этой науке, но в своих многочисленных произведениях любил говорить о математике и часто ссылался на нее. Например, в трактате «Пир» Платон говорил: «Бог (творец) занимался постоянно Геометрией». В сочинении «Государство» Платон пишет, что необходимыми предметами изучения должны быть: Арифметика, Логистика, Геометрия, Стереометрия, Астрономия и Гармоника. Обратите внимание: названия наук написаны с большой буквы, а под геометрией подразумевается только планиметрия. Именно Платону обязана своим дальнейшим развитием стереометрия, которая до него далеко отставала от планиметрии. До Платона знали теоремы относительно положения прямых и плоскостей в пространстве, о многогранниках, шаре, но о цилиндрах, конусах практически ничего не было известно. В трактате «Тимей» Платон изложил учение пифагорейцев о правильных многогранниках. С тех пор *правильные многогранники* стали называться *платоновыми телами*.

Правильным многогранникам посвящена последняя книга XIII знаменитых «Начал» Евклида. Существует версия, согласно которой Евклид написал первые двенадцать книг для того, чтобы читатель понял написанную в XIII книге теорию правильных многогранников, которую историки математики назвали «венцом «Начал». Здесь установлено существование всех пяти типов правильных многогранников путем их построения и доказано, что других правильных многогранников не существует. На доказательстве этих теорем мы подробно остановимся ниже.

В средние века учение о правильных многогранниках возродил в своих трудах знаменитый Иоганн Кеплер (1571—1630).

Еще в молодые годы Кеплером овладела идея поиска симметрии или гармонии мира. В первой же работе «Тайна мироздания» (1597) Кеплер, опираясь на геометрию, решил вывести число орбит, их относительные размеры и характер движения планет, т. е. проникнуть в замысел самого творца. Любопытно заметить кстати, что название работы, как было принято в те времена, было несколько длиннее приведенного, а именно: «Предвестник космографических исследований, содержащих тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин, числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенных с помощью пяти правильных тел Иоганном Кеплером из Вюртемберга, математиком достославной провинции Штирии». Эта работа принесла Кеплеру большой успех и широкую известность. В ней ученый вывел свой геометрический принцип, по которому с помощью пяти правильных платоновых тел объясняется число известных тогда планет (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн) и относительные размеры их орбит. Геометрия Солнечной системы («тайна мироздания»), по Кеплеру, заключалась в следующем построении: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия».

Эти идеи Кеплер развил в более позднем своем пятитомном труде «Гармония мира», первый вариант которого был закончен в 1618 году. Модель гелиоцентрической системы мира получила название «космический кубок» (рис. 78).

Кеплер считал геометрию «прообразом красоты мира» и в отличие от

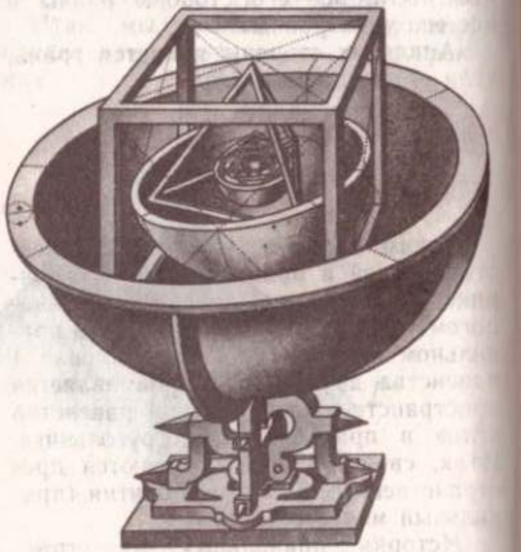


Рис. 78

пифагорейцев искал первопричины гармонии не в числовых соотношениях, а в скрытых за числами геометрических фигурах.

А все-таки почему же правильных многогранников только пять? Ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечное число.

Впервые этот факт установил Евклид. Его доказательство опирается на следующее положение (это предложение 21 из одиннадцатой книги «Начал»): «Всякий телесный угол заключается между плоскими углами, меньшими, чем четыре прямых угла». До недавнего времени телесными углами называли многогранные углы. В современной терминологии имеем следующую теорему:

Теорема 1. *Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше* $4d$.

Прежде чем доказывать этот факт, остановимся на следующей теореме, которую назовем леммой.

Лемма. *Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.*

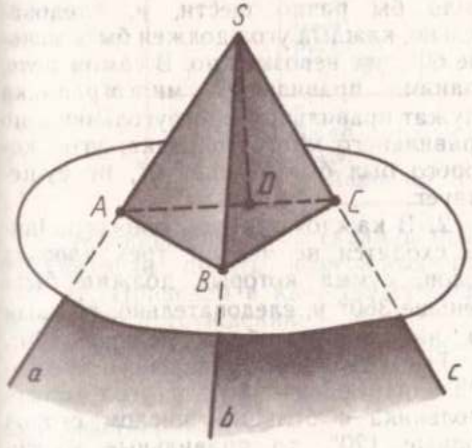


Рис. 79

Дано: (abc) — трехгранный угол; $\angle(ac)$ — его наибольший плоский угол, т. е. $\angle(ac) > \angle(ab)$ и $\angle(ac) > \angle(bc)$.

Доказать:

$$\angle(ac) < \angle(ab) + \angle(bc).$$

Доказательство. 1. Проведем в грани (ac) прямую SD (рис. 79), образующую с ребром c угол, равный (bc). Причем отложим $SD = SB$ (где точка B принадлежит прямой b).

2. Через точки B и D проведем произвольную плоскость, пересекающую ребра a и c соответственно в точках A и C, и рассмотрим образовавшиеся треугольники SBC и SDC.

3. $\triangle CSB = \triangle CSD$ (по двум сторонам и углу, лежащему между ними: $SB = SD$, $\angle BSC = \angle DSC$ и сторона SC общая). Из равенства этих треугольников следует, что $BC = DC$. В $\triangle ABC$ имеем:

$$AC < AB + BC; \quad AD + DC < AB + BC;$$
$$AD < AB \quad (DC = BC).$$

4. Рассмотрим треугольники SAD и SAB. Имеем: SA — общая сторона, $SD = SB$ и $AD < AB$. Следовательно, $\angle ASD < \angle ASB$ (этот факт доказывается в планиметрии: «Если две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника, а третьи стороны у них не равны, то против большей стороны лежит и больший угол». Попробуйте доказать это методом от противного).

Тогда, прибавляя к левой части последнего неравенства $\angle DSC$, а к правой — равный ему $\angle BSC$, получим:

$$\angle ASD + \angle DSC < \angle ASB + \angle BSC;$$
$$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC.$$

Переходя к первоначальному обозначению плоских углов трехгранного угла, получим

$$\angle(ac) < \angle(ab) + \angle(bc),$$

что и требовалось доказать.

Теперь обратимся к доказательству теоремы.

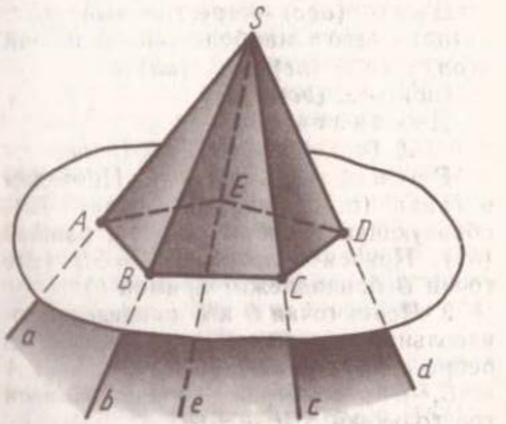


Рис. 80

Доказательство теоремы 1. Дан выпуклый многогранный угол, например пятигранный (*abcde*) (рис. 80).

1. Пересечем грани многогранного угла какой-нибудь плоскостью. Получим в сечении выпуклый многоугольник $ABCDE$.

2. При каждой вершине этого многоугольника получаем трехгранный угол, образованный двумя гранями многогранного угла и секущей плоскостью. Согласно доказанной выше лемме для каждого из этих трехгранных углов имеем:

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC;$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle SCD;$$
$$\angle CDE < \angle CDS + \angle SDE;$$
$$\angle DEA < \angle DES + \angle SEA;$$
$$\angle EAB < \angle EAS + \angle SAB.$$

3. Сложим почленно эти неравенства. Тогда в левой части получим сумму углов многоугольника $ABCDE$, которая, как известно, равна $2d(n-2)$, где n — число сторон многоугольника. В правой части мы, очевидно, получим сумму углов треугольников ASB, BSC, CSD, DSE, ESA без суммы тех углов, которые имеют вершину в точке S, т. е. без суммы плоских углов многогранного угла. Обозначим эту сумму через s малое. Тогда имеем:

$$2d(n-2) < 2dn - s,$$

откуда следует, что $s < 4d$, что и требовалось доказать.

С помощью этой теоремы можно показать, что существует не более пяти типов правильных многогранников, представленных на рисунке 74.

Действительно, во-первых, число ребер, сходящихся в каждой вершине правильного многогранника, не может быть более пяти и, во-вторых, число сторон правильных многоугольников, образующих грани правильного многогранника, не может быть более пяти. Докажем это.

1. Сумма плоских углов (как мы только что показали) многогранного угла меньше $4d$, а потому если бы в какой-нибудь вершине правильного многогранника сходилось шесть ребер, то и число плоских углов при этой вершине правильного многогранника было бы равно шести, и, следовательно, каждый угол должен быть меньше 60°, что невозможно. В самом деле, гранями правильного многогранника служат правильные многоугольники, но правильного многоугольника, угол которого был бы меньше 60°, не существует.

2. В каждой вершине многогранника сходится не меньше трех плоских углов, сумма которых должна быть меньше 360° и, следовательно, каждый из них должен быть меньше 120°.

Так как угол правильного шестиугольника равен 120°, а угол многоугольника с большим числом сторон больше 120°, то правильные многоугольники с числом сторон шесть и

больше не могут служить гранями правильного многогранника.

Другое доказательство теоремы о существовании не более пяти типов правильных многогранников можно провести с помощью теоремы Эйлера.

Теорема 2. *Существует не более пяти типов правильных многогранников.*

Доказательство. 1. Пусть имеется правильный многогранник. Все его грани — правильные n-угольники. В каждой вершине сходится m ребер. При этом $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 3$.

2. Пусть Г — число граней, В — вершин, Р — ребер правильного многогранника. Тогда

$$\text{Г} \cdot n = 2 \cdot \text{Р}; \quad \text{В} \cdot m = 2 \cdot \text{Р};$$
$$\text{Г} = \frac{2 \cdot \text{Р}}{n}; \quad \text{В} = \frac{2 \cdot \text{Р}}{m}.$$

По теореме Эйлера $\text{Г} + \text{В} - \text{Р} = 2$. Подставляя данное соотношение в выражение для Г и В, имеем:

$$\frac{2 \cdot \text{Р}}{n} + \frac{2 \cdot \text{Р}}{m} - \text{Р} = 2; \quad \text{Р}\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1\right) = 2.$$

Так как $\text{Р} > 0$ и $2 > 0$, то

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1 > 0, \quad \frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1.$$

Итак, необходимо найти значения для n и m.

3. Рассмотрим n. Известно, что $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 3$. Пусть $m = 3$. Тогда

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1; \quad \frac{2}{n} > 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

откуда $n < 6$. Итак, $3 \leqslant n < 6$. Аналогично можно показать, что $3 \leqslant m < 6$.

4. Рассмотрим все возможные значения для n и m. Для этого заполним следующую таблицу:

n \ m	3	4	5
3	Г=4; В=4; Р=6; Тетраэдр	Г=8; В=6; Р=12 Октаэдр	Г=20; В=12; Р=30 Икосаэдр
4	Г=6; В=8; Р=12 Куб	Не существует	Не существует
5	Г=12; В=20; Р=30 Додекаэдр	Не существует	Не существует

Для заполнения этой таблицы были рассмотрены девять возможных пар $(n;\ m)$. Приведем в качестве примера несколько рассуждений:

а) $n = 3$, $m = 3$. Проверим условие $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1$: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > 1$ — верное неравенство;

$$\text{Р} = \frac{2 \cdot n \cdot m}{2 \cdot n + 2 \cdot m - m \cdot n}; \quad \text{Р} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3},$$

$$\text{Р} = 6; \quad \text{Г} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4; \quad \text{В} = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4;$$

б) $n = 4$, $m = 3$. Проверим условие $\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{14}{12}$; $\frac{2}{4} + \frac{2}{3} = \frac{14}{12} = 1\frac{1}{6} > 1$ — верное неравенство;

$$\text{Р} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 3}; \quad \text{Р} = 12;$$
$$\text{Г} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6; \quad \text{В} = \frac{2 \cdot 16}{3} = 8$$

и т. д. Для $n=5$, например, и $m=5$ неравенство $\frac{2}{5}+\frac{2}{5}>1$ неверно. Следовательно, многогранник не существует.

● Проверьте правильность заполнения таблицы.

Итак, показано, что существует не более пяти типов правильных многогранников. Однако отсюда еще не следует, что все пять видов правильных многогранников действительно существуют, т. е. что можно проведением плоскостей в пространстве осуществить построение каждого из пяти возможных правильных многогранников.

Чтобы убедиться в существовании какого-нибудь многогранника, в частности какого-нибудь правильного многогранника, достаточно указать способ его построения.

Рассмотрим некоторые возможные способы построения правильных многогранников. Первый из них опирается на доказанную выше теорему 1.

Итак, самый простейший многогранный угол — это трехгранный угол, самый простейший правильный многоугольник — равносторонний треугольник. Таким образом, опираясь на определение многогранного угла и свойства его плоских углов, ясно, что число правильных треугольников, с помощью которых можно образовать многогранный угол, не может быть больше пяти, и, принимая во внимание, что число граней многогранного угла не может быть меньше трех, имеем: многогранный угол правильного многогранника может быть образован только из 3, 4 и 5 правильных треугольников.

1. Пусть трехгранный угол $SABC$ образован тремя правильными треугольниками SAB, SBC, SCA. Для доказательства существования такого трехгранного угла достаточно рассмотреть правильную треугольную пирамиду со стороной основания $AB=a$ и высотой $SO=\frac{\sqrt{6}}{3}a$, тогда $SC=SA=SB=a$ (рис. 81). Следовательно, трехгранный угол $SABC$ искомый. Покажем, что все двугранные углы пирамиды $SABC$ равны. Для этого на произвольном ребре пирамиды возьмем точку P (рис. 82), являющуюся его серединой, и соединим ее с вершинами, не лежащими на этом ребре. Получим равнобедренный треугольник с основанием a, боковой стороной $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, угол при вершине P этого треугольника является линейным углом двугранного угла. Таким образом, ясно, что, при каком бы ребре мы ни взяли точку P, получим равные равнобедренные треугольники с углом при вершине, равным $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$, что является величиной любого двугранного угла в $SABC$. Следовательно, многогранник $SABC$ является правильным. Это правильный тетраэдр.

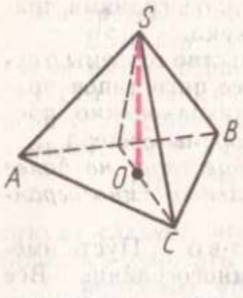


Рис. 81

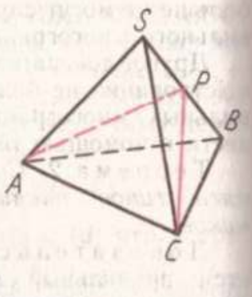


Рис. 82

2. Пусть теперь многогранный угол образуется четырьмя равными правильными треугольниками. В отличие от случая 1 таких многогранных углов существует много, что ясно можно продемонстрировать на модели четырехгранного угла, которая в отличие от

трехгранного угла не является жесткой, а допускает сжатие и растяжение. Выберем среди четырехгранных углов такой, для которого все двугранные углы равны. Для доказательства существования такого угла достаточно рассмотреть правильную пирамиду $SABCD$ со стороной основания $AB=a$ и высотой $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда $SD=SA=SB=SC=a$, и, следовательно, четырехгранный угол состоит из правильных треугольников (рис. 83).

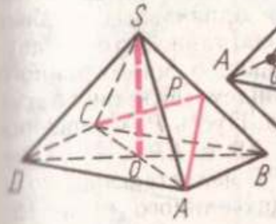


Рис. 83

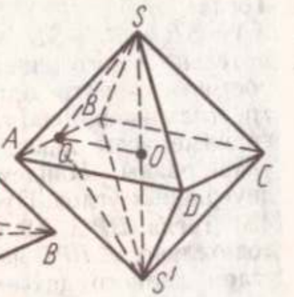


Рис. 84

Далее, если рассмотреть середины ребер этой пирамиды и соединить их соответственно с вершинами, лежащими в плоскостях, содержащих данное ребро и не лежащих на этих ребрах, то получим равные равнобедренные треугольники, угол при вершине которых является линейным углом соответствующего двугранного угла. Таким образом, двугранные углы четырехгранного угла $SABCD$ равны. Величину этих двугранных углов можно легко вычислить:

$$\angle APC=2\arcsin\frac{OA}{AP}=2\arcsin\frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{2a\sqrt{3}}=2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Пирамида $SABCD$ не является правильным многогранником, так как одна из ее граней — квадрат, а все остальные — правильные треугольники. Для того чтобы получить из пирамиды $SABCD$ правильный многогранник, необходимо достроить углы A, B, C, D до многогранных углов, равных углу S. Для этого рассмотрим симметрию пространства относительно плоскости α, в которой лежит квадрат $ABCD$. При этом точки A, B, C, D останутся на месте, а точка S перейдет в точку S', симметричную ей относительно плоскости α. Таким образом, пирамида $SABCD$ симметрична пирамиде $S'ABCD$ относительно плоскости α и, следовательно, равна ей. Тогда фигура $SABCDS'$ является правильным многогранником. Для доказательства этого достаточно проверить, что двугранные углы при сторонах основания пирамид равны двугранным углам при ребрах пирамид.

Пусть Q — середина AB (рис. 84), тогда $\angle SQS'$ является линейным углом соответствующего двугранного угла и его величина равна:

$$\angle SQS'=2\arcsin\frac{SO}{SQ}=2\arcsin\frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{2a\sqrt{3}}=2\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, $SABCDS'$ — правильный многогранник, имеющий восемь граней. Это правильный октаэдр.

Полезно отметить связь между октаэдром и тетраэдром. Если в октаэдре продолжить две противоположные грани одной из пирамид и две противоположные грани другой пирамиды до взаимного пересечения, то получится тетраэдр (рис. 85).

Для доказательства рассмотрим пересечение плоскостей, проходящих через точки S, A, B и S', B, C. В пересечении будет прямая, проходящая через точку B и параллельная $S'C$, так как $S'C\parallel SA$.

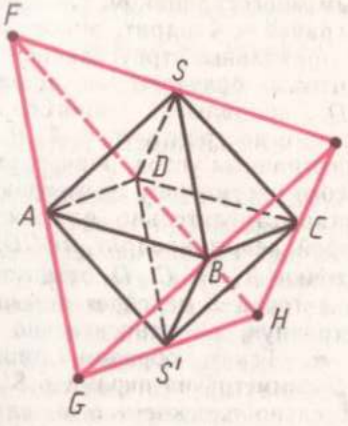


Рис. 85

Аналогично пересечением плоскостей, проходящих через точки S, D, C и S', B, C, будет прямая, проходящая через C и параллельная $S'B$, а пересечением плоскостей, проходящих через S', A, D и S', B, C, будет прямая, проходящая через S' и параллельная BC. Таким образом, эти прямые лежат в одной плоскости и образуют между собой углы в 60°, т. е. треугольник EGH правильный со стороной, равной $2a$. Из соображений симметрии следует, что все остальные треугольники, входящие в $EFGH$, правильные, и, следовательно, $EFGH$ — тетраэдр.

3. Пусть теперь многогранный угол $SABCDE$ образуется пятью правильными равными треугольниками и все его двугранные углы равны (рис. 86). Для доказательства существования такого многогранного угла достаточно взять правильную пятиугольную пирамиду $SABCDE$ со стороной основания $AB=a$ и высотой

$$SO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4\sin^2 36^\circ}}.$$

Тогда $SA=SB=SC=SD=SE=a$, и, следовательно, многогранный угол $SABCDE$ состоит из пяти правильных равных треугольников. Ясно также, что все двугранные углы данного многогранного угла равны. Найдем величину этих двугранных углов. Пусть P — середина AS. Тогда $BP\perp AS$ и $EP\perp AS$. Следовательно, $\angle BPE$ является линейным углом данного двугранного угла AS:

$$BQ=a\sin 54^\circ;\qquad BP=\frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\angle BPE=2\arcsin\frac{a\sin 54^\circ\cdot 2}{a\sqrt{3}}=$$

$$=2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sin 54^\circ,$$

где Q — середина отрезка BE.

Пирамида $SABCDE$ не является правильным многогранником, так как одна из ее граней, а именно $ABCDE$, является правильным пятиугольником, а остальные — правильные треугольники. Если теперь поступить так же, как в случае 2, т. е. взять симметричную ей пирамиду $S'ABCDE$, то получим многогранник $SABCDES'$ (рис. 87), гранями которого являются правильные треугольники. Однако этот многогранник не будет правильным, так как многогранные углы S и S' состоят из пяти плоских углов, а остальные — из четырех. Для того чтобы из пирамиды $SABCDE$ получить правильный многогранник, необходимо достроить углы A, B, C, D, E до многогранных углов, равных данному углу S.

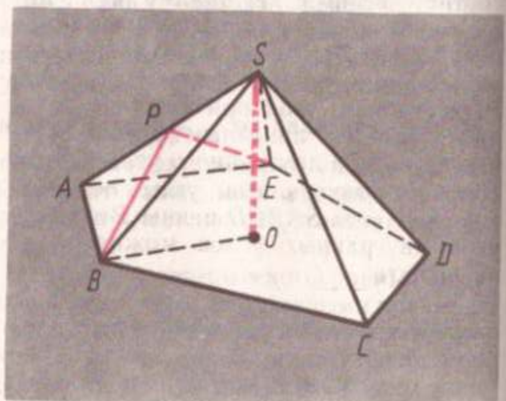


Рис. 86

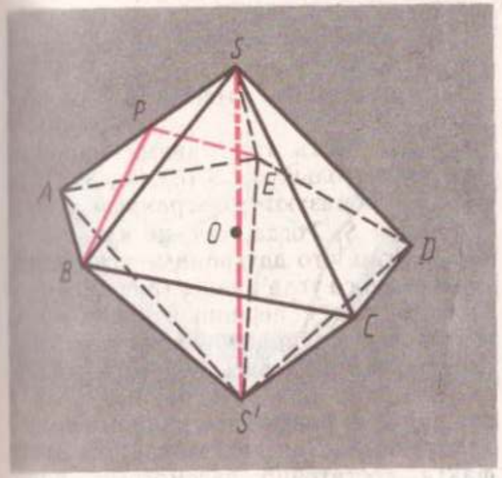


Рис. 87

Покажем, что такие построения возможны. В качестве примера возьмем вершину A пирамиды $SABCDE$. Пусть α — плоскость, проходящая через точки E, B и середину AS. Тогда $\alpha\perp AS$. Рассмотрим симметрию пространства относительно этой плоскости. При этом точки E и B останутся на месте, точка S перейдет в точку A. Обозначим точки, в которые перейдут точки D и C, через A' и B' соответственно (рис. 88). Тогда многогранный угол $SABCDE$ перейдет в равный ему угол $ASEB'A'B$, и, таким образом, мы получаем фигуру $SABCDEA'B'$, состоящую из двух равных пятигранных углов.

Аналогично углы B, C, D, E достраиваются до многогранных углов, равных углу S. В результате получаем фигуру $SABCDEA'B'C'D'E'$, изображенную на рисунке 88.

Покажем, что $A'B'C'D'E'$ — правильный пятиугольник, равный $ABCDE$. Действительно, отрезок $A'B'$ симметричен отрезку CD относительно плоскости α, и, следовательно, $A'B'=CD$. Кроме того, $A'B'\parallel CD$. Аналогично $C'D'=AE$ и $C'D'\parallel AE$; $B'C'=ED$ и $B'C'\parallel ED$; $D'E'=AB$ и $D'E'\parallel AB$; $A'E'=BC$ и $A'E'\parallel BC$. Таким образом, многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$

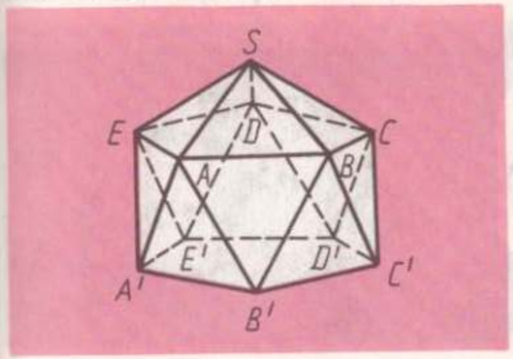


Рис. 88

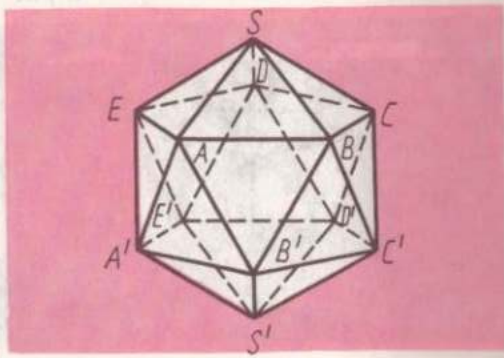


Рис. 89

равны и лежат в параллельных плоскостях. Рассматривая теперь пирамиду $S'A'B'C'D'E'$ с основанием $A'B'C'D'E'$, равную пирамиде $SABCDE$ и такую, что S и S' лежат по разные стороны от плоскости многоугольника $A'B'C'D'E'$, и «достраивая» фигуру $SABCDEA'B'C'D'E'$, получаем правильный многогранник

$$SABCDEA'B'C'D'E'S',$$

состоящий из двадцати равных треугольников. Это икосаэдр (рис. 89).

4. Рассмотрим возможность построения правильных многогранников, гранями которых являются равные квадраты. Так как сумма плоских углов многогранного угла меньше 360°, то только три квадрата могут образовать трехгранный угол. Таким образом, ясно, что единственным многогранником, гранями которого являются квадраты, будет куб, или шестигранник, — гексаэдр.

5. Перейдем к рассмотрению правильного многогранника, гранями которого являются правильные пятиугольники. Из того, что внутренний угол правильного пятиугольника равен 108°, следует, что только три правильных пятиугольника могут образовать многогранный угол. Для доказательства существования такого трехгранного угла достаточно, так же как в случае 1, рассмотреть правильную треугольную пирамиду и подобрать высоту этой пирамиды таким образом, чтобы плоские углы при вершине этой пирамиды равнялись 108°.

Итак, пусть три равных правильных пятиугольника $SABCD$, $SDEFG$, $SGHKA$ образуют трехгранный угол с вершиной S. Тогда, так же как в случае 1, ясно, что двугранные углы этого трехгранного угла равны (рис. 90). Дополним угол с вершиной D до трехгранного угла правильным пятиугольником $DCLME$ (рис. 91). Это можно сделать, так как трехгранный угол с вершиной D равен трехгранному углу с вершиной S. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть плоскость α, проходящую через точки B, F и середину SD. Тогда $SD \perp \alpha$, ребро SG симметрично DE и CD симметрично AS. Таким образом, трехгранный угол с вершиной D симметричен трехгранному углу с вершиной S, и, следовательно, они равны.

Аналогично углы C, B, A можно достроить правильными пятиугольниками до трехгранных углов, равных углу S. В результате получим фигуру, состоящую из шести правильных пятиугольников, изображенных на рисунке 91. Достраивая теперь вершины E, G, K, Q, L этой фигуры правильными

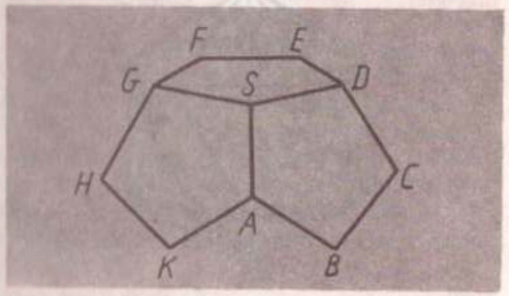


Рис. 90

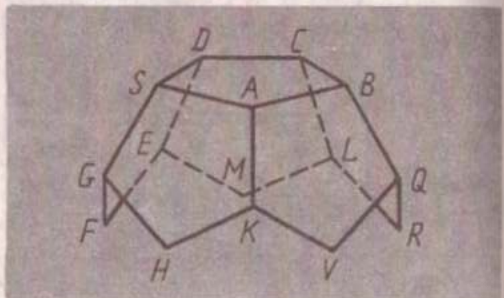


Рис. 91

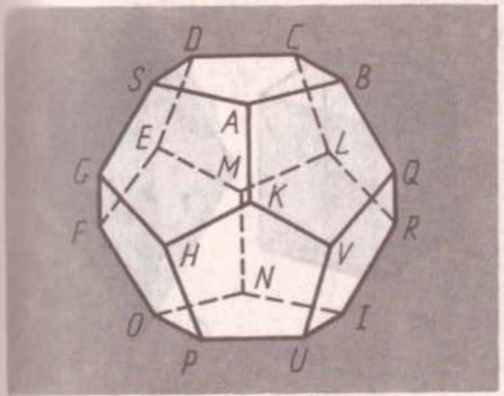


Рис. 92

пятиугольниками до трехгранных углов, равных S, получаем фигуру, изображенную на рисунке 92 и состоящую из одиннадцати правильных пятиугольников.

Так же как и в случае с икосаэдром, можно показать, что пятиугольник $OPUIN$ равен правильному пятиугольнику $ABCDS$. Следовательно, дополняя нашу фигуру пятиугольником $OPUIN$, получаем правильный многогранник, состоящий из двенадцати равных правильных пятиугольников, который является додекаэдром.

Теперь обратимся к другому способу построения правильных многогранников.

Сначала построим куб. В некоторой плоскости строим квадрат $ABCD$. Через его вершины проводим перпендикуляры к данной плоскости, равные стороне квадрата. Получим точки A_1, B_1, C_1, D_1. Многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 93, *а*) — куб (у него все грани — равные квадраты, все двугранные углы прямые).

Интересно, что из данного куба можно получить все остальные правильные многогранники следующим образом.

Возьмем произвольную вершину куба, например D_1 (рис. 93, *а*). Затем возьмем три вершины куба, которые лежат в трех плоскостях, сходящихся в данной точке и лежащих с D_1 на одной диагонали соответствующего квадрата. Это вершины B_1, A и C. Многогранник D_1B_1AC — тетраэдр.

● Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно.

Заметим, что лучше называть рассматриваемые многогранники «правильный тетраэдр», «правильный октаэдр» и т. д. Для краткости речи опустим слово «правильный».

● Докажите, что центры граней данного куба являются вершинами пра-

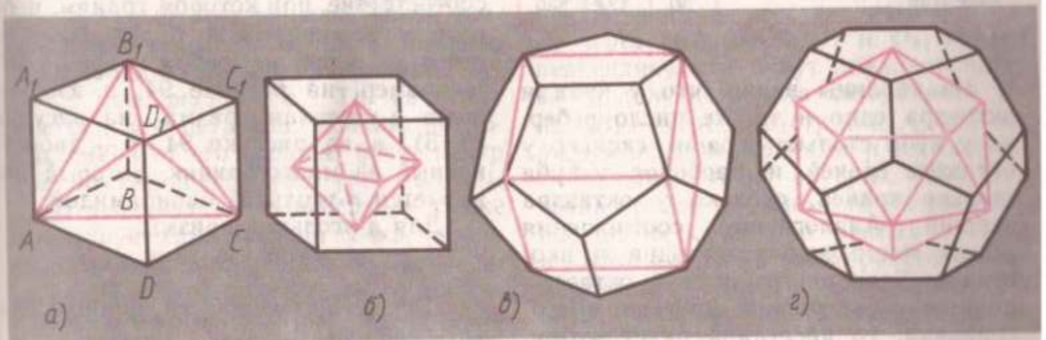


Рис. 93

вильного многогранника — октаэдра (рис. 93, *б*).

Через каждое ребро куба проведем плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек этого ребра. Получим 12 плоскостей, которые образуют некоторый двенадцатигранник. При определенном выборе наклона этих плоскостей к граням куба двенадцатигранник будет правильным додекаэдром (рис. 93, *в*).

Построив додекаэдр, легко построить икосаэдр. Центры граней додекаэдра служат вершинами икосаэдра (рис. 93, *г*).

● Проверьте это.

Из рассмотренного способа построения правильных многогранников вытекает интересное свойство двойственности.

Рассмотрим следующую таблицу, в которой приведено количество граней (Г), вершин (В) и ребер (Р) правильных многогранников.

Правильный многогранник	Р	В	Г
Тетраэдр	6	4	4
Куб	12	8	6
Октаэдр	12	6	8
Додекаэдр	30	20	12
Икосаэдр	30	12	30

Из таблицы видно, что у куба и октаэдра одно и то же число ребер, но у куба столько вершин, сколько у октаэдра граней, и, наоборот, у куба столько граней, сколько у октаэдра вершин. Аналогичные соотношения имеют место для додекаэдра и икосаэдра. Если центры граней октаэдра принять за вершины другого многогранника, то последний будет кубом. Куб и октаэдр называются *взаимно двойственными многогранниками*.

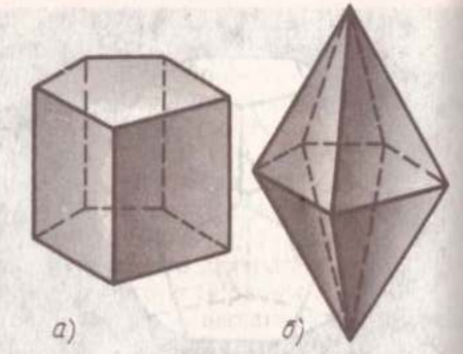


Рис. 94

Взаимно двойственными многогранниками будут также додекаэдр и икосаэдр. Тетраэдр двойствен самому себе.

Отмеченное свойство правильных многогранников относится к принципу двойственности многогранников, который означает следующее: имея какой-нибудь абстрактный многогранник M, назовем его грани вершинами, ребра ребрами, а вершины гранями, получим совокупность вершин, ребер и граней, т. е. получим другой абстрактный многогранник M'. Между элементами M и M' установим взаимно однозначное соответствие, при котором граням, ребрам и вершинам M будут соответствовать вершины, ребра и грани M'. Например, на рисунке 94, *а* изображена n-угольная призма (на рисунке $n=5$), а на рисунке 94, *б* — двойственный ей многогранник, который называется n-угольной бипирамидой.

Для n-угольной призмы

$$Г=n+2,\ В=2\cdot n,\ Р=3\cdot n.$$

Для двойственной ей бипирамиды (n-угольной)

$$Г=2\cdot n,\quad В=n+2,\quad Р=3\cdot n.$$

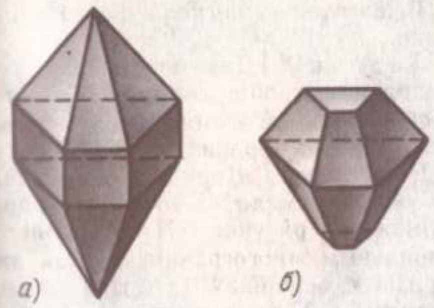


Рис. 95

На рисунке 95, *а*, *б* изображены двойственные многогранники. Для первого из них Г=12, В=10, Р=20. Для второго многогранника, двойственного первому, Г=10, В=12, Р=20.

Рассмотрим еще одно свойство правильных многогранников. Все диагонали куба равны между собой, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам. (● Откуда это следует?) Следовательно, точка пересечения диагоналей куба равноудалена от всех его вершин. Эта точка называется *центром* куба. Легко видеть, что других точек, равноудаленных от всех вершин, куб не имеет.

В правильном тетраэдре также существует единственная точка, равноудаленная от всех вершин. Такой точкой будет центр того куба, с помощью которого мы строили правильный тетраэдр (см. рис. 93, *а*). То же имеет место и для октаэдра. Точкой, равноудаленной от его вершин, будет центр соответствующего куба (рис. 93, *б*).

В додекаэдре и в икосаэдре также существует единственная точка, равноудаленная от всех вершин. В додекаэдре такой точкой будет центр того куба, с помощью которого строится додекаэдр (рис. 93, *в*), в икосаэдре — центр соответствующего додекаэдра (рис. 93, *г*).

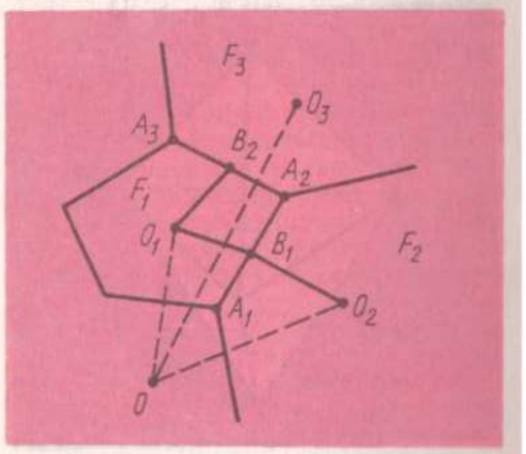


Рис. 96

Итак, во всяком правильном многограннике существует единственная точка, равноудаленная от всех его вершин. Другими словами, около всякого правильного многогранника можно описать сферу. Докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Около всякого правильного многогранника можно описать сферу. Во всякий правильный многогранник можно вписать сферу. Центр вписанной сферы совпадает с центром описанной сферы.*

Доказательство. Если провести в правильном многограннике перпендикуляры к двум его граням F_1 и F_2 через их центры O_1 и O_2, то эти перпендикуляры будут лежать в плоскости линейного угла двугранного угла (B_1 — середина отрезка A_1A_2), образуемого этими гранями, и пересекаться в одной точке O (рис. 96). Эта точка отстоит на одно и то же расстояние от всех вершин взятых граней, а также на одно и то же расстояние от плоскостей граней, в чем можно убедиться из равенства соответствующих треугольников, а именно:

а) $\triangle OA_1B_1=\triangle OA_2B_1$ (треуголь-

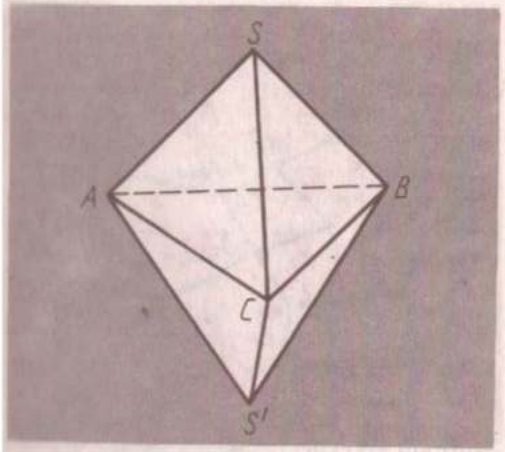


Рис. 97

ники прямоугольные, $A_1B_1 = A_2B_1$, OB_1 — общая), откуда следует, что $OA_1 = OA_2$;

б) $\triangle OO_1B_1 = \triangle OO_2B_1$ (треугольники прямоугольные, $O_1B_1 = O_2B_1$, OB_1 — общая), откуда следует, что $OO_1 = OO_2$.

Если соединить O с серединой третьей смежной грани, то на основании равенства соответствующих треугольников обнаружится, что полученный отрезок перпендикулярен и к этой третьей грани и точка O отстоит от вершин этой третьей грани на такое же расстояние, как и от вершин двух первых граней, и т. д.

Заметим, что отрезки, соединяющие точку O с серединами ребер правильного многогранника, равны, причем каждый из них перпендикулярен соответствующему ребру. Поэтому сфера радиуса OB_1 и с центром в точке O касается всех ребер многогранника в их серединах.

Таким образом, точка O является центром трех сфер. Она называется *центром правильного многогранника.*

Решим теперь несколько следующих задач.

Задача 1. Два правильных тетраэдра имеют общую грань. Является ли образованный этими треугольниками многогранник правильным? Почему?

Решение. Данный многогранник — бипирамида $SABCS'$, изображенная на рисунке 97, не является правильным многогранником, так как в разных вершинах сходится разное число ребер. Так, в вершинах A, B, C сходятся по четыре ребра, а в вершинах S и S' — по три.

Задача 2. Почему гранью правильного многогранника не может быть правильный восьмиугольник?

Решение. По теореме 2 число сторон в каждой грани правильного многогранника не превышает пяти:

$$3 \leqslant n \leqslant 5.$$

Можно рассуждать и следующим образом: угол правильного восьмиугольника равен

$$\frac{2d\,(n-2)}{n} = \frac{180^\circ\,(8-2)}{8} = 150^\circ.$$

Наименьшее число плоских углов при одной вершине три, их сумма равна $150^\circ \cdot 3 = 450^\circ > 360^\circ$, что противоречит теореме 1. Таким образом, правильный восьмиугольник не может быть гранью правильного многогранника.

Задача 3. В правильном тетраэдре попарно соединены середины всех его шести ребер. Какое при этом получится тело?

Решение. На рисунке 98 изображен правильный тетраэдр $ABCD$. Точки S, M, N, K, L, S' — середины его ребер. Рассмотрим многогранник $SMNKLS'$. Во-первых, все его восемь граней — равные правильные треугольники, так как каждое ребро его равно половине ребра $ABCD$. Во-вторых, в каждой из его вершин сходятся по че-

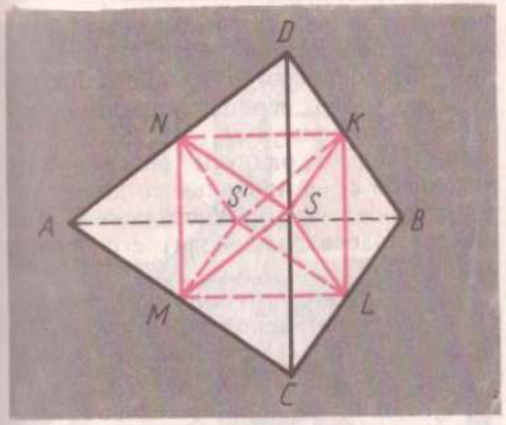


Рис. 98

тыре ребра. Таким образом, $SMNKLS'$ — правильный октаэдр.

Задача 4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 99) с ребром a найдем кратчайшее расстояние между его диагональю BD_1 и скрещивающейся с нею диагональю AC основания куба $ABCD$.

Решение. Кратчайшим расстоянием между BD_1 и AC является отрезок их общего перпендикуляра. Диагональ основания AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1D, так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости ($AC \perp BD$

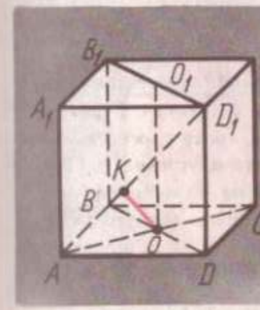


Рис. 99

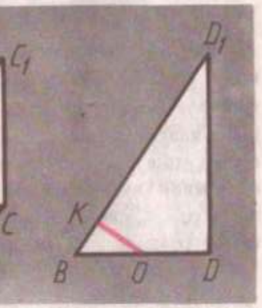


Рис. 100

и $AC \perp OO_1$). Отсюда AC перпендикулярна любой прямой в плоскости BB_1D_1D, проходящей через точку O.

Рассмотрим треугольник BD_1D (рис. 100). Он прямоугольный. Из точки O — середины катета BD опустим перпендикуляр OK на гипотенузу BD_1. Осталось определить длину отрезка OK. Для этого рассмотрим прямоугольные треугольники BDD_1 и BKO: $\triangle BDD_1 \infty \triangle BKO$ (по острому углу). Запишем:

$$\frac{OK}{DD_1} = \frac{BO}{BD_1}, \text{ откуда } OK = \frac{DD_1 \cdot BO}{BD_1} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Задача 5. Построим правильный октаэдр по данной его диагонали.

Решение. *Анализ.* Пусть построен правильный октаэдр $SABCDS'$, у которого диагональ, например, SS' равна заданной величине $2a$ (рис. 101). Плоскость $ABCD$ перпендикулярна SS' и проходит через точку O — середину SS'; $ABCD$ — квадрат; AC и BD — его диагонали; $AC = BD = 2a$.

Построение. 1. Отрезок $SS' = 2a$. Делим пополам: $SO = S'O$.

2. Проводим через точку O плоскость, перпендикулярную SS'. Для это-

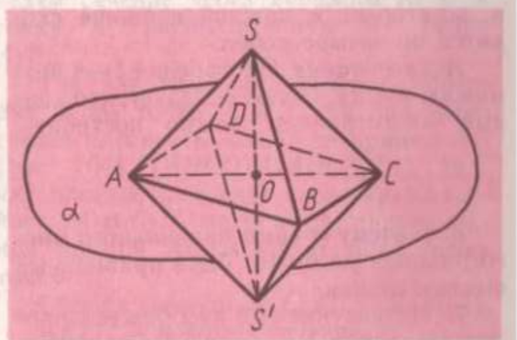


Рис. 101

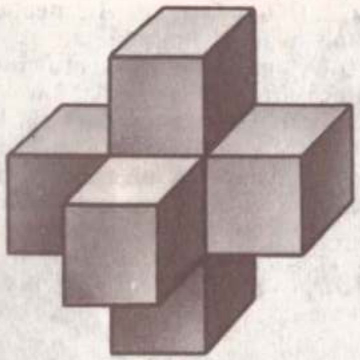


Рис. 102

го через точку O достаточно провести две различные перпендикулярные ей прямые. Затем через эти прямые проведем плоскость α.

3. В плоскости α проводим произвольную прямую AC через точку O, причем $OA=OC=a$.

4. В плоскости α через точку O проводим прямую BD, перпендикулярную прямой AC, причем $OB=OD=a$.

5. Полученный многогранник $SABCDS'$ — правильный октаэдр.

Доказательство. $SABCDS'$ — правильный октаэдр, так как, во-первых, все его грани — правильные треугольники, у которых сторона равна $a\sqrt{2}$, а, во-вторых, в каждой вершине сходятся по четыре ребра.

Исследование. Построения 1—4 возможны всегда. Отсюда следует, что данный многогранник можно построить.

Задачи

6. Почему гранью правильного многогранника не может быть правильный шестиугольник?

7. На рисунке 102 изображена пространственная фигура, составленная из семи кубов (трехмерный крест). Почему такая фигура не может быть названа правильной? Сколько квадратов ограничивают ее поверхность? Сколько ребер, вершин и трехгранных углов у этой фигуры?

8. Найдите радиусы описанной и вписанной сфер правильного додекаэдра, а также сферы, касающейся всех ребер додекаэдра, если его ребро равно a.

9. Докажите, что в правильном октаэдре: а) противоположные ребра параллельны; б) грани попарно параллельны.

10. Найдите кратчайшее расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба, если ребро куба равно a.

11. Найдите двугранные углы правильных многогранников, приняв ребро каждого из них за 1.

В заключении данного параграфа исследуем возможные сечения правильного гексаэдра — куба, предварительно рассмотрев следующие вопросы:

- Что значит построить сечение многогранника плоскостью?
- Как могут располагаться относительно друг друга многогранник и плоскость?
- Какой фигурой может быть сечение? Почему?
- Когда задача на построение сечения многогранника плоскостью считается решенной?

Задача на построение сечения многогранника состоит в построении пересечения двух фигур — многогранника и плоскости. Будем рассматривать только случай, когда плоскость пересекает многогранник по его внутренности. Тогда в сечении куба плоскостью может получиться треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник.

- Как вы думаете, почему в сечении куба плоскостью не может получиться n-угольник, где $n>6$?

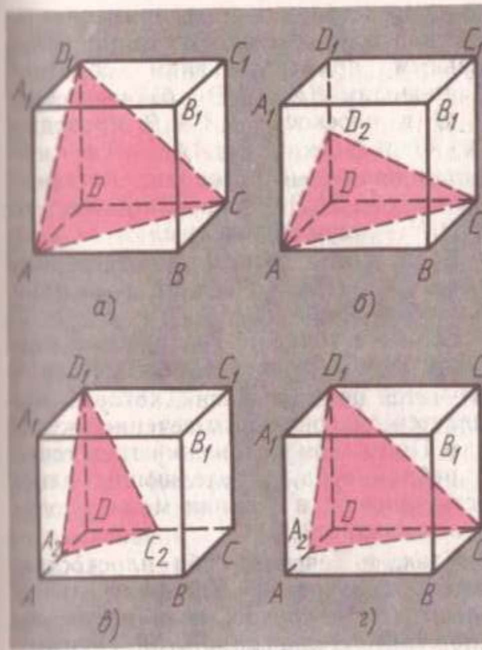


Рис. 103

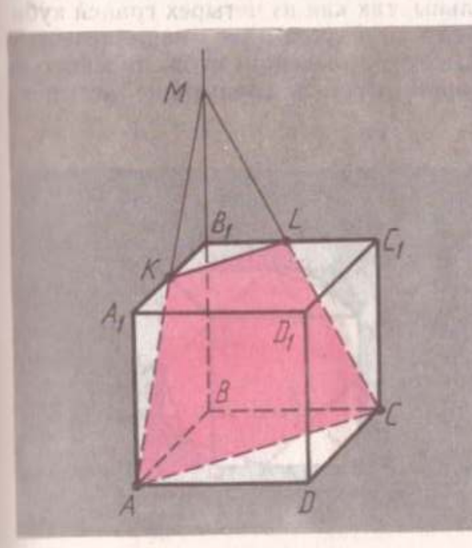


Рис. 104

Как можно задать плоскость сечения?

Будем задавать сечение тремя точками. Рассмотрим несколько ситуаций.

1. Построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, заданное тремя точками A, C и D_1, которые являются его вершинами (рис. 103, *а*). В сечении получили равносторонний треугольник ACD_1.

Если теперь не изменять положение точек A и C, а точку D перемещать вдоль ребра DD_1, то в сечении куба плоскостью будем получать равнобедренные треугольники (например, $\triangle ACD_2$, рис. 103, *б*).

Если D_1 совпадает с точкой D, то плоскость искомого сечения совпадает с плоскостью основания $ABCD$.

Теперь закрепим точку D_1, а будем перемещать точки A и C соответственно вдоль ребер AD и CD. При этом могут получиться как равнобедренные треугольники (если $AA_2=CC_2$, рис. 103, *в*), так и разносторонние (рис. 103, *г*).

Подумайте, какой треугольник получится в сечении куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, если ее провести через вершины A, C и точку D_2, расположенную на середине ребра DD_1 (т. е. $DD_2=D_2D_1$).

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведем сечение через вершины A, C и точку K, расположенную на ребре A_1B_1.

Так как плоскость сечения проходит через точки A и C, то она пересекает плоскость $ABCD$ по прямой AC (рис. 104). $(ABCD)\parallel(A_1B_1C_1D_1)$, значит, плоскость сечения пересекает плоскость $A_1B_1C_1D_1$ по прямой, параллельной прямой AC и проходящей через точку K.

Отсюда проводим $KL\parallel AC$ ($L\in B_1C_1$). $AKLC$ — искомое сечение.

Многоугольник $AKLC$ — равнобедренная трапеция: $AC\parallel KL$ (AC и KL

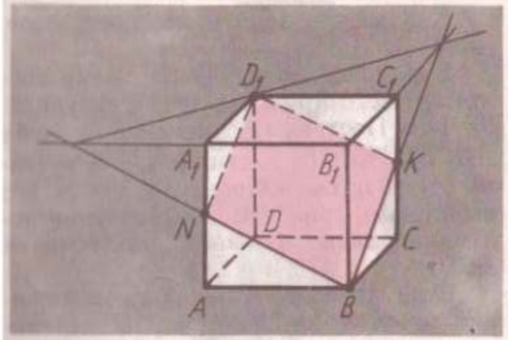


Рис. 105

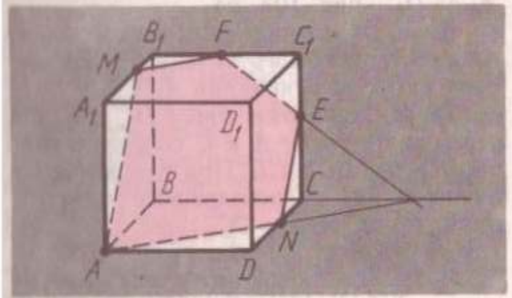


Рис. 106

основания трапеции); $AK=CL$ (продолжив AK и CL до пересечения, получим $\triangle ABM=\triangle CBM$, треугольники прямоугольные, $AB=CB$, BM — общий катет). Отсюда $AM=CM$. Таким образом, $\triangle AMC$ равнобедренный, так как $KL \parallel AC$, $\triangle KML$ равнобедренный, т. е. $KM=LM$, откуда и следует равенство AK и CL.

3. Построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через его вершины B, D_1 и точку K, принадлежащую ребру CC_1.

На рисунке 105 показано построение искомого сечения. Искомое сечение — четырехугольник BKD_1N. Можно было построить сечение, как в предыдущей задаче, воспользовавшись тем фактом, что плоскость (сечения) пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым. Таким образом: а) проводим BK и KD_1; б) через точку B в плоскости AA_1B_1B проводим $BN \parallel KD_1$ (точка $N \in AA_1$). Так как противоположные стороны четырехугольника BKD_1N параллельны, то BKD_1N — параллелограмм.

Если взять точку K на середине ребра CC_1 ($CK=KC_1$), то в сечении получится ромб.

Если же точка K совпадает с вершиной куба — точкой C, то в сечении получится прямоугольник, который называется диагональным сечением куба.

● При каком положении трех точек на ребрах куба, определяющих плоскость сечения, в сечении может получиться квадрат?

Итак, в сечении куба плоскостью может получиться четырехугольник только в том случае, если плоскость пересекает четыре грани куба. Поэтому по крайней мере две противоположные стороны четырехугольника будут параллельны, так как из четырех граней куба всегда найдутся две параллельные. Вывод: в сечении куба плоскостью можно получить следующие четырехугольники: трапецию, параллелограмм, ромб, прямоугольник и квадрат.

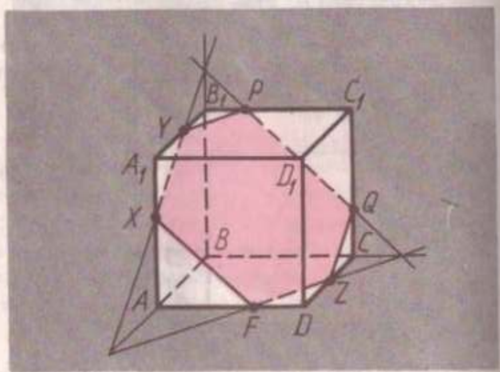


Рис. 107

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через вершину куба A и точки M и N, лежащие соответственно на ребрах A_1B_1 и DC.

На рисунке 106 показано построенное сечение — это пятиугольник $AMFEN$.

● Может ли пятиугольник $AMFEN$ быть правильным?

Наконец, рассмотрим случай, когда плоскость сечения пересекает все шесть граней куба.

5. Построим сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки X, Y, Z, лежащие соответственно на ребрах куба AA_1, A_1B_1, CD. Построенное сечение представлено на рисунке 107. Сечение — шестиугольник $XYPQZF$.

● При каком расположении точек X, Y, Z сечение будет правильным шестиугольником?

● Определите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины двух смежных ребер куба параллельно диагонали куба, пересекающей эти ребра, если ребро куба равно 1.

● В кубе с ребром, равным 1, проведите сечение, проходящее через центр куба и середины двух ребер куба, выходящих из одной вершины. Вычислите площадь полученного сечения.

● Проведите сечение куба через середину его диагонали перпендикулярно к ней. Найдите площадь сечения куба, если его ребро равно 1.

Литература

Березин В. Н. Правильные многогранники // Квант.—1973.— № 5.

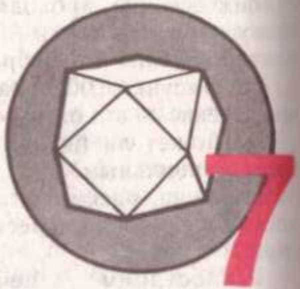
Болтянский В. Г. Транзитивные множества и правильные многогранники // Квант.—1980.— № 7.

Вагутен В. Н. Правильные многогранники и повороты // Квант.—1989.— № 10.

Правильные многогранники // Квант.—1988.— № 11—12.— С. 48.

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.— М.: Наука, 1981.— (Библиотечка «Квант».— Вып. 8).

Тела Архимеда и Кеплера — Пуансо



Мы рассмотрели правильные платоновы тела и доказали, что их существует не более пяти типов. У правильных многогранников все грани — одноименные равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Но есть и такие многогранники, у которых все многогранные углы равны, а грани — правильные, но разноименные правильные многоугольники. Многогранники такого типа называются *равноугольно полуправильными многогранниками*. Впервые многогранники такого типа открыл и описал Архимед (287—212 гг. до н. э.). Им подробно описаны 13 многогранников, которые позже в честь великого ученого были названы *телами Архимеда*. Перечислим их.

Первые пять многогранников очень просто получить из пяти правильных многогранников операцией «усечения», которая состоит в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы правильного тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребра, выходящих из одной вершины, то получится *усеченный тетраэдр*, который имеет восемь граней, из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники, двенадцать вершин. Многогранник выпуклый, в каждой вершине сходятся три ребра. Он называется усеченным тетраэдром (рис. 108, *а*).

Если указанным образом срезать вершины правильных октаэдра и икосаэдра, получим *усеченный октаэдр* (рис. 108, *б*) и *усеченный икосаэдр* (рис. 108, *в*). Обратите внимание, что усеченный икосаэдр очень напоминает изображение футбольного мяча.

Из куба и правильного додекаэдра тоже можно получить *усеченный куб* (рис. 108, *г*) и *усеченный додекаэдр* (рис. 108, *д*). Их плоскости проходят не через треть ребра.

Задача 1. Найдем длину ребра усеченного куба, если длина ребра соответствующего куба равна a.

Решение. Рассмотрим одну восьмиугольную $EFMNKLHP$ грань усеченного куба (рис. 109). Обозначим сторону этого восьмиугольника через x. Выразим x через a. В прямоугольном треугольнике AEP $AE=AP=\frac{a-x}{2}$, $EP=x$. По теореме Пифагора имеем:

$$\frac{(a-x)^2}{4}+\frac{(a-x)^2}{4}=x^2;$$

$$x^2+2ax-a^2=0; \quad x=a(\sqrt{2}-1).$$

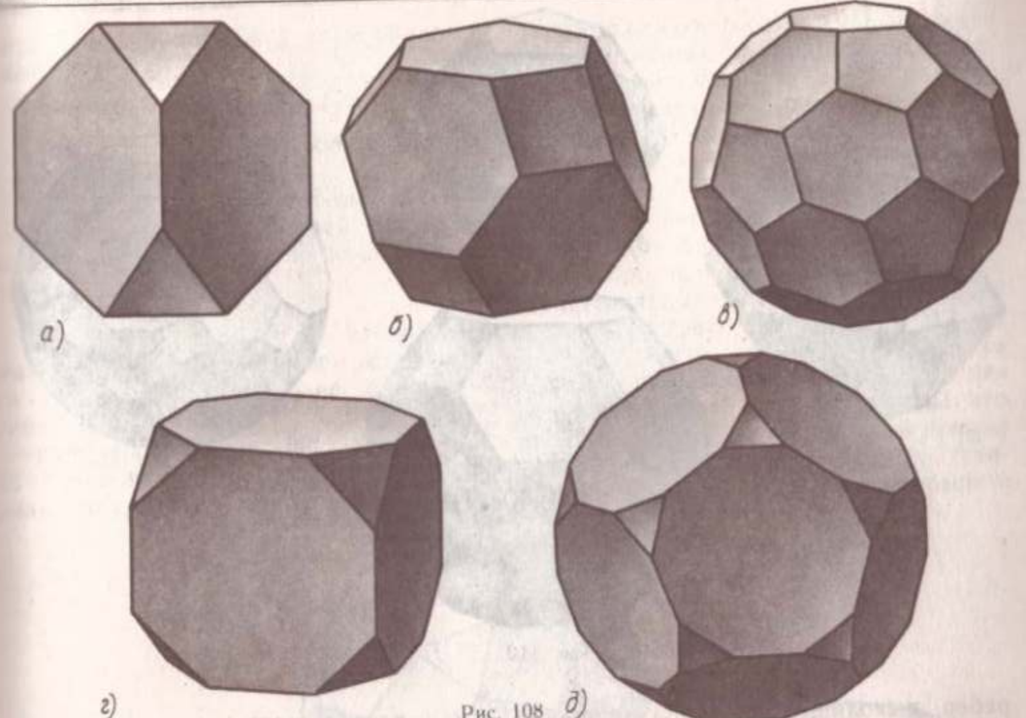


Рис. 108

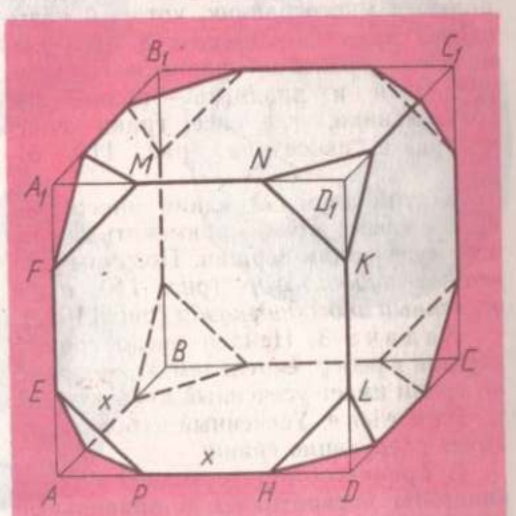


Рис. 109

Итак, длина ребра усеченного куба равна $a(\sqrt{2}-1)$, где a — длина ребра основного куба.

Задача 2. Попробуйте выразить длину ребра усеченного додекаэдра, если длина ребра соответствующего додекаэдра равна a.

Если теперь в кубе провести плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины, получим еще один — шестой равноугольно полуправильный многогранник — *кубооктаэдр* (рис. 110, *а*). Его гранями являются шесть квадратов и восемь правильных треугольников, т. е. грани куба и октаэдра, отсюда и название многогранника.

Аналогично, если в додекаэдре провести плоскости через середины его

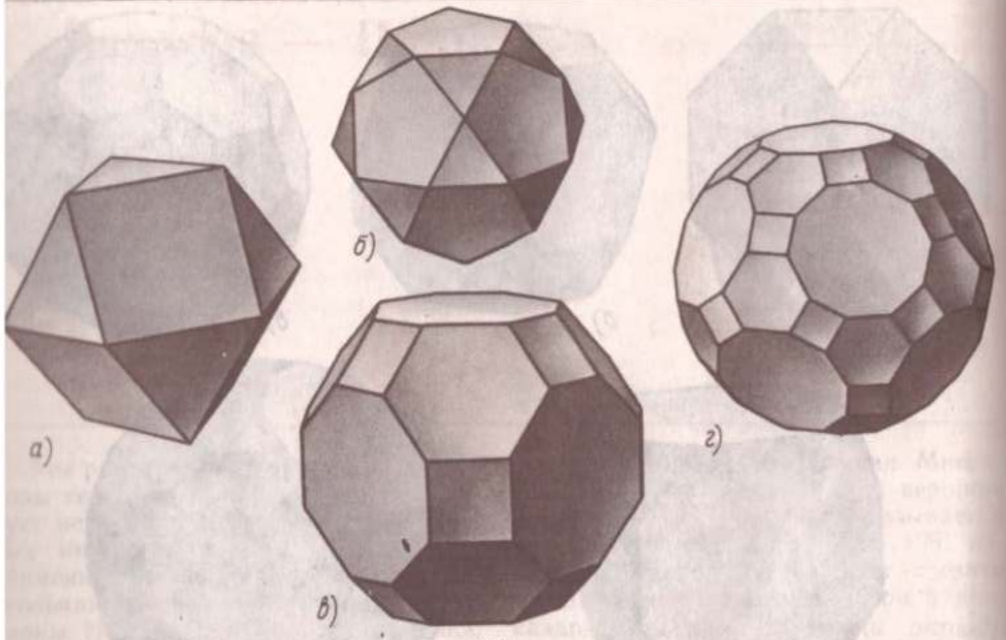


Рис. 110

ребер, выходящих из одной вершины, получим многогранник, который называется *икосододекаэдром.* У него двенадцать граней — правильные пятиугольники и двадцать — правильные треугольники, т. е. все грани додекаэдра и икосаэдра (рис. 110, *б*).

К этим двум последним многогранникам также можно применять операцию «усечения» вершин. Получим *усеченный кубооктаэдр* (рис. 110, *в*) и *усеченный икосододекаэдр* (рис. 110, *г*).

З а д а ч а 3. Найдем число граней, вершин и ребер, определим, какие именно грани имеет усеченный кубооктаэдр.

Р е ш е н и е. Усеченный кубооктаэдр имеет следующие грани:

1. Грани соответствующего куба — квадраты превратились в правильные восьмиугольники. Значит, у усеченного кубооктаэдра шесть правильных восьмиугольников. Аналогично грани соответствующего октаэдра — правильные треугольники превратились в правильные шестиугольники, т. е. у усеченного кубооктаэдра восемь правильных шестиугольников. У кубооктаэдра двенадцать четырехгранных углов, отсюда усеченный кубооктаэдр будет иметь двенадцать квадратов. Итак, всего у усеченного кубооктаэдра

$$6+8+12=26 \text{ граней.}$$

2. Найдем количество вершин. Так как все многогранные углы усеченного кубооктаэдра трехгранные, количество вершин находится следующим образом:

$$(6\cdot8+8\cdot6+12\cdot4):3=48.$$

3. Наконец, найдем количество ребер. Так как каждое ребро любого многогранника принадлежит двум граням, имеем:

$$(6\cdot8+8\cdot6+12\cdot4):2=72.$$

Итак, для усеченного кубооктаэдра $\Gamma=26$, $B=48$, $P=72$.

З а д а ч а 4. Попытайтесь определить число вершин, граней, ребер и вид граней усеченного икосододекаэдра.

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом тел. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа. Перечислим их:

ромбокубооктаэдр: он состоит из 26 граней, из них 18 квадратов и 8 правильных треугольников (рис. 111, *а*);

ромбоикосододекаэдр: у него всего 62 грани, из них 30 квадратов, 20 правильных треугольников и 12 правильных пятиугольников (рис. 111, *б*);

«плосконосый» (иногда называют «курносый») *куб:* у него всего 38 граней, из них 6 квадратов, 32 правильных треугольника (рис. 111, *в*);

«плосконосый» (или «курносый») *додекаэдр:* всего 92 грани, из них 12 правильных пятиугольников и 80 правильных треугольников (рис. 111, *г*).

В трактате «О многогранниках» Архимед подробно описал каждый полуправильный многогранник, дал его рисунок, а также поставил и решил задачу о количестве телесных (старое название многогранных) углов и

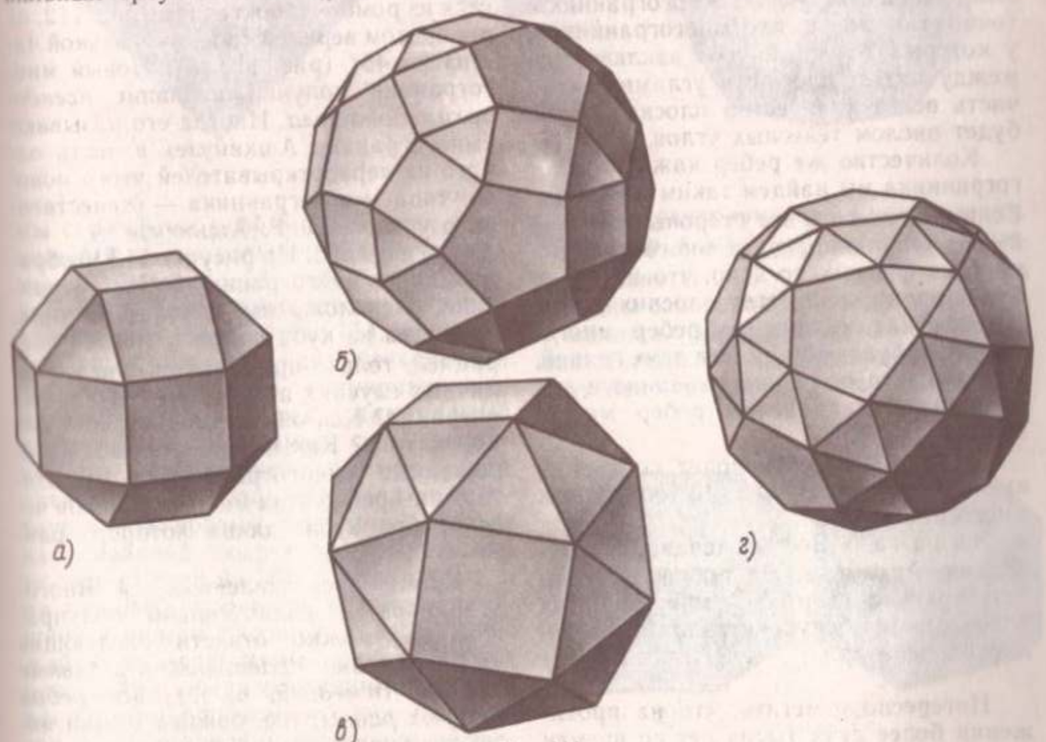


Рис. 111

ребер каждого многогранника. Вот как об этом говорится в самой работе: «Сколько же углов и ребер имеет каждая из этих 13 многогранных фигур, можно усмотреть следующим образом: у тех многогранников, у которых телесные углы заключаются только между тремя плоскими углами, если пересчитать все плоские углы, которые содержат все грани многогранника, то ясно, что число телесных углов будет равно третьей части полученного числа, у тех же многогранников, у которых телесные углы заключаются только между четырьмя плоскими, то если пересчитать все плоские углы, которые имеют все грани многогранника, то четвертая часть полученного числа будет числом телесных углов многогранника; точно так же у тех многогранников, у которых телесный угол заключается между пятью плоскими углами, пятая часть всего количества плоских углов будет числом телесных углов.

Количество же ребер каждого многогранника мы найдем таким способом. Если пересчитать все стороны, которые имеют ограничивающие многогранники плоские фигуры, то ясно, что их число будет равно количеству плоских углов. Но так как каждое из ребер многогранника будет общим для двух граней, то ясно, что половина указанного количества будет числом ребер многогранника».

Далее автор производит соответствующие подсчеты для 13 описанных многогранников.

З а д а ч а 5. Воспользовавшись расчетами Архимеда, попробуйте сосчитать количество ребер и многогранных углов для ромбокубооктаэдра и ромбоикосододекаэдра.

Интересно отметить, что на протяжении более двух тысяч лет со времен Архимеда считалось, что полуправильных многогранников 13. Но совсем недавно, в середине нашего столетия, был открыт еще один равноугольно полуправильный многогранник. Он получается из ромбокубооктаэдра (рис. 112, *а*) поворотом верхней «восьмиугольной чаши» на 45° (рис. 112, *б*). Новый многогранник получил название *псевдоархимедова тела*. Иногда его называют «многогранник Ашкинузе» в честь одного из первооткрывателей этого нового типа многогранника — отечественного ученого В. Г. Ашкинузе.

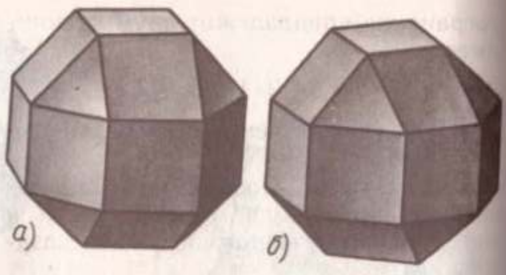


Рис. 112

З а д а ч а 6. На рисунке 113 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией, только применяется она в различных случаях по-разному. Что это за операция? Как она применяется в каждом случае? Как называются все изображенные многогранники? Выразите длины ребер этих многогранников через ребро куба, длина которого равна *а*.

Кроме представленных 14 многогранников к равноугольно полуправильным можно отнести следующие многогранники: *правильные n-угольные призмы* ($n=3$, 5, 6, ...), *все ребра которых равны*, т. е. боковые грани являются квадратами. Например, основанием правильной шестиугольной призмы с равными ребрами является правильный шестиугольник. У такой призмы 12 вершин, 18 ребер и 8 граней — два правильных шестиугольника и шесть квадратов (рис. 114, *а*).

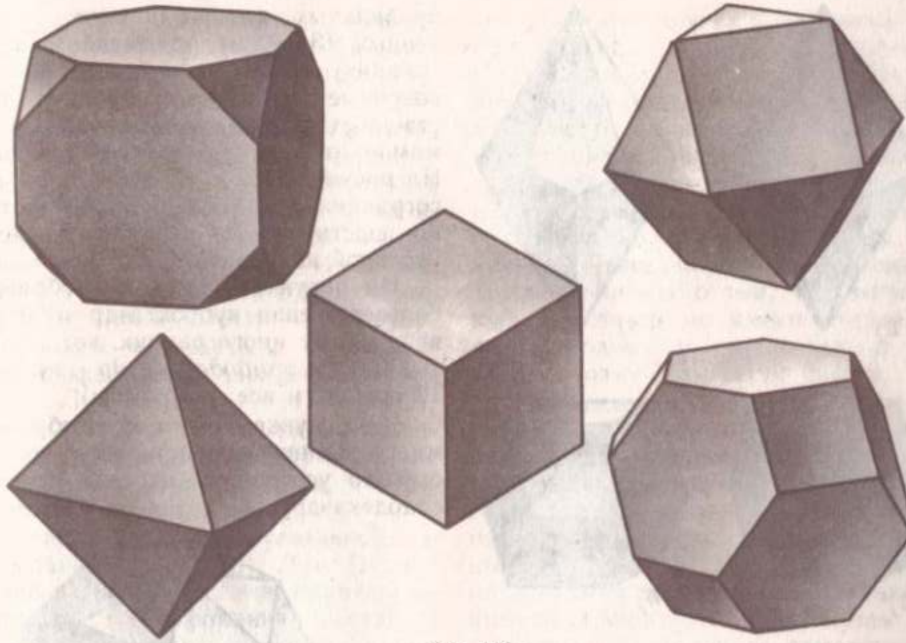


Рис. 113

Существует еще одна бесконечная серия равноугольно полуправильных многоугольников — так называемые *антипризмы*. Например, на рисунке 114, *б* изображена шестиугольная антипризма, которая получена из шестиугольной призмы поворотом одного из оснований вокруг центра относительно другого на 30°. Каждая вершина нижнего основания и каждая вершина верхнего соединена с двумя ближайшими вершинами другого. Если расстояние между основаниями подобрано таким образом, что все боковые грани являются равносторонними треугольниками, то антипризма — равноугольно полуправильный многогранник. Например, в нашем случае это расстояние равно $a\sqrt{\sqrt{3}-1}$, где *а* — длина стороны основания правильного шестиугольника. (Проверьте это.) Правильная шестиугольная антипризма — равноугольно полуправильный многогран-

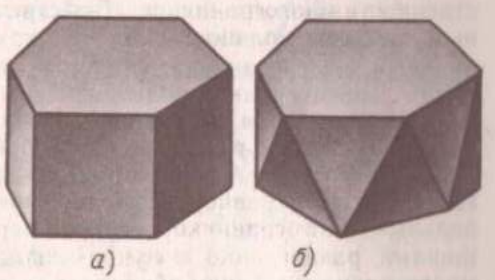


Рис. 114

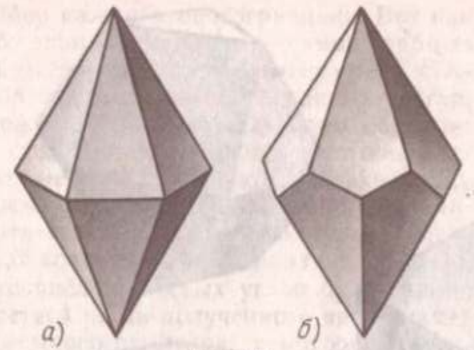


Рис. 115

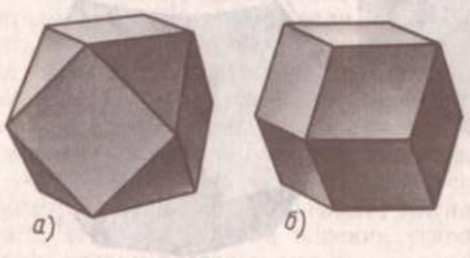


Рис. 116

ник, у которого 12 вершин, 24 ребра, 14 граней, из них два правильных шестиугольника и двенадцать равносторонних треугольников.

Итак, перечислены все возможные виды равноугольно полуправильных многогранников.

Теперь обратимся к принципу двойственности многогранников. Двойственным понятию «равноугольно полуправильный многогранник» является понятие «равногранно полуправильный многогранник», т. е. многогранник, у которого все грани равны между собой, а все многогранные углы правильные. Центры граней равноугольно полуправильных многогранников служат вершинами равногранно полуправильных многогранников. Таким образом, можно указать 14 типов равногранно полуправильных многогранников, двойственных 13 телам Архимеда и многограннику Ашкинузе, а также две бесконечные серии многогранников, двойственных правильным *n*-угольным призмам и антипризмам с равными ребрами. На рисунке 115, *а, б* изображены многогранники, двойственные соответственно шестиугольной призме и шестиугольной антипризме.

На рисунке 116, *а, б* изображены соответственно кубооктаэдр и двойственный ему многогранник, который называется *ромбододекаэдр* (у него 12 граней, и все они ромбы).

На рисунке 117, *а, б* изображены многогранники, двойственные соответственно усеченному икосаэдру и икосододекаэдру.

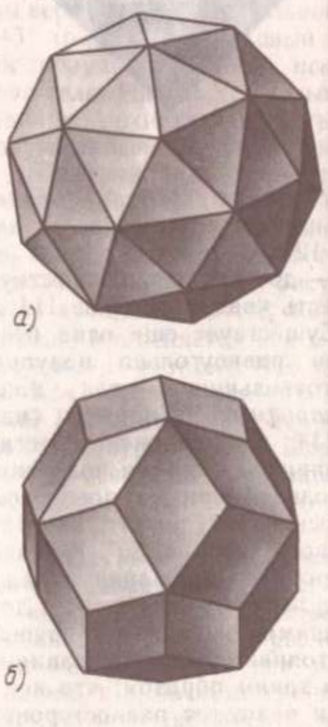


Рис. 117

З а д а ч а 7. Попытайтесь изобразить многогранники, двойственные усеченному тетраэдру и усеченному кубу.

Кроме полуправильных многогранников из правильных многогранников — платоновых тел, можно получить так называемые правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером (1571—1630), а два других были построены почти двести лет спустя французским математиком и механиком, профессором Политехнической школы Луи Пуансо (1777—1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники получили название *тел Кеплера — Пуансо*. Итак, что же они из себя представляют?

В работе «О многоугольниках и многогранниках» (1810) Луи Пуансо перечислил и описал все правильные звездчатые многогранники, поставил, но не решил вопрос о существовании правильных многогранников, число граней которых отлично от 4, 6, 8, 12, 20.

Ответ на этот вопрос был дан год спустя, в 1811 году, французским математиком Огюстом Луи Коши (1789—1857) в работе «Исследование о многогранниках». В ней доказывается, что не существует других правильных многогранников, кроме перечисленных Пуансо. Автор приходит к выводу, что правильные звездчатые многогранники получаются из выпуклых правильных многогранников путем продолжения их граней или ребер; исследуется вопрос, из каких именно правильных многогранников могут быть получены правильные звездчатые многогранники. Делается вывод о том, что тетраэдр, куб и октаэдр не имеют звездчатых форм, додекаэдр имеет три, а икосаэдр — одну звездчатую форму.

Покажем это. Термин «звездчатый» имеет общий корень со словом «звезда» и указывает на происхождение многогранника. Существуют звездчатые многоугольники и звездчатые многогранники. На плоскости правильные невыпуклые или звездчатые многоугольники можно получить из правильных выпуклых многоугольников путем продолжения их сторон до самопересечения.

Начнем с простейшего многоугольника — равностороннего треугольника. Если продолжить все его стороны, то этими прямыми не будет ограничена никакая новая часть плоскости, продолжение сторон будет расходиться (рис. 118, *а*).

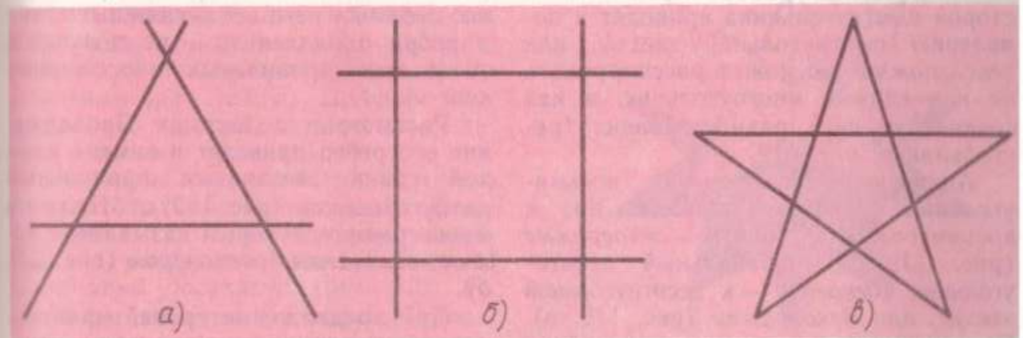


Рис. 118

4 Зак. 3885 И. М. Смирнова

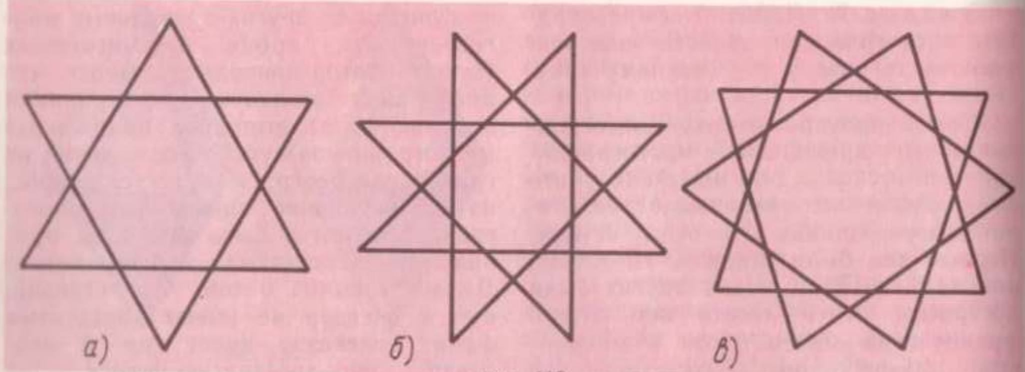


Рис. 119

Аналогично если мы будем продолжать стороны квадрата, то построенные прямые будут параллельны и не будут пересекаться, как бы их ни продолжали (рис. 118, *б*).

Однако продолжения сторон правильного пятиугольника пересекаются во внешней по отношению к пятиугольнику части плоскости и добавляют к пятиугольнику новые части. В результате получается хорошо известная пятиконечная звезда, иначе называемая *пентаграммой* (рис. 118, *в*). Пентаграмма была известна в глубокой древности, например пифагорейцы считали ее символом здоровья. Продолжения сторон шестиугольника приводят к появлению шестиугольной звезды, или *гексаграммы* (ее можно рассматривать не как единый многоугольник, а как соединение двух равносторонних треугольников; рис. 119, *а*).

Аналогично правильный восьмиугольник *(октагон)* приводит нас к восьмиугольной звезде — *октаграмме* (рис. 119, *б*), правильный десятиугольник *(декагон)* — к десятиугольной звезде, или *декаграмме* (рис. 119, *в*). Пентаграмму, октаграмму и декаграмму можно рассматривать как нераспадающиеся единые многоугольники соответственно с 5, 8 и 10 сторонами.

Обратимся теперь к аналогичному процессу в пространстве. Здесь придется продолжать не только ребра, но и грани многогранника.

Возьмем правильные многогранники и продолжим их ребра или несмежные грани до самопересечения. Естественно, не приведет к цели продолжение ребер треугольных граней и параллельных ребер и граней.

Таким образом, из тетраэдра, у которого все грани треугольные и смежные, октаэдра — у него все грани треугольные, несмежные грани параллельны, куба — у него все несмежные грани и ребра параллельны — не получится звездчатых правильных многогранников.

Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его ребер приведет к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 120, *а*). Получим многогранник, который называется *малым звездчатым додекаэдром* (рис. 120, *б*).

При продолжении граней правильного додекаэдра (каждая грань продолжается до пересечения с пятью несмежными и непараллельными ей гранями) возникают две возможности. Во-первых, при этом можно рассматривать правильные выпуклые пятиугольники (рис. 121, *а*). Получим многогранник, который называется *большой додекаэдр* (рис. 121, *б*).

Во-вторых, в качестве граней можно рассматривать звездчатые пятиугольники (рис. 122, *а*). Получим многогранник, который называется *большой звездчатый додекаэдр* (рис. 122, *б*).

Таким образом, правильный додекаэдр имеет три типа правильных звездчатых многогранников.

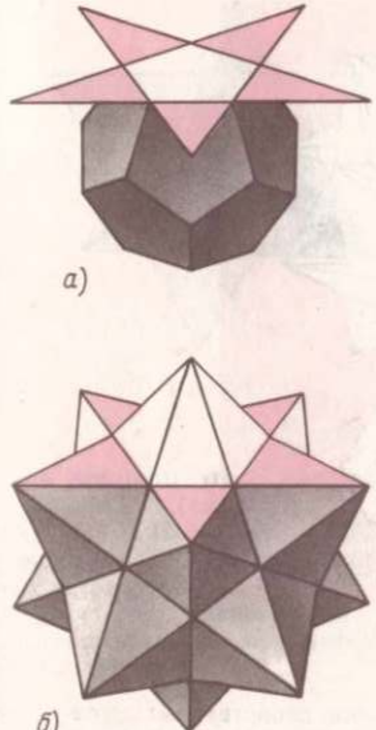


Рис. 120

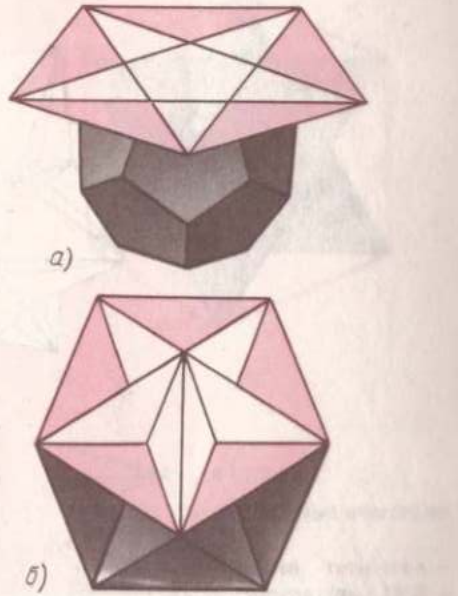


Рис. 121

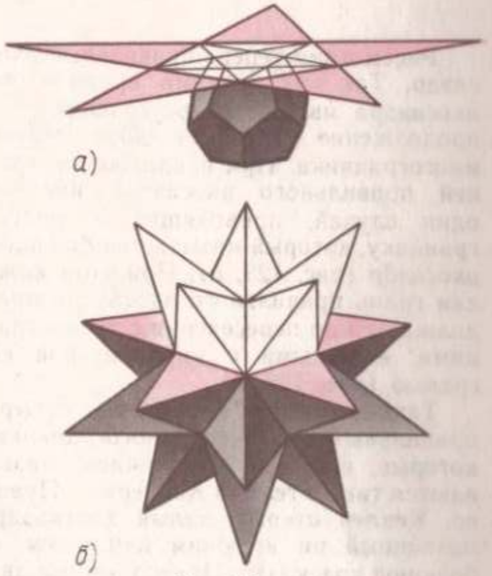


Рис. 122

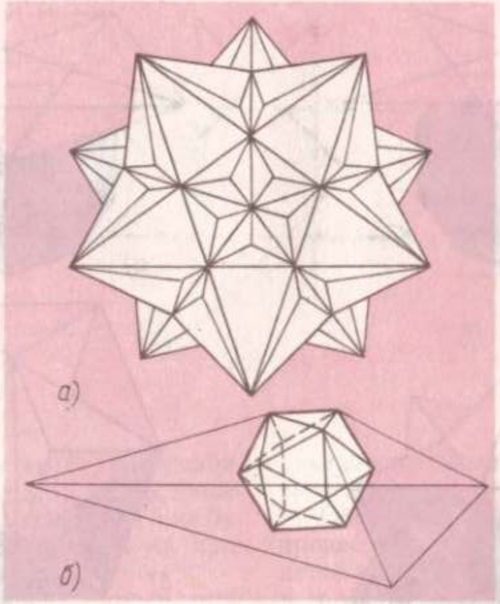


Рис. 123

Рассмотрим теперь правильный ико-аэдр. Так как гранями правильного косаэдра являются треугольники, то родолжение ребер не даст нового ногогранника. При продолжении гра-ей правильного икосаэдра имеется дин случай, приводящий к много-раннику, который называется *большой косаэдр* (рис. 123, *а*). При этом каж-ая грань правильного икосаэдра про-олжается до пересечения с тремя гра-ями, смежными с параллельной ей ранью (рис. 123, *б*).

Таким образом, существуют четыре равильных звездчатых многогранника, оторые, еще раз напоминаем, назы-аются также телами Кеплера — Пуан-о. Кеплер открыл малый додекаэдр, азванный им колючим или ежом, и ольшой додекаэдр. Пуансо открыл два ругих правильных звездчатых многогранника, двойственных соответственно первым двум: большой звездчатый додекаэдр и большой икосаэдр.

З а д а ч а 8. Определите число граней, ребер и вершин каждого правильного звездчатого многогранника.

На рисунке 124 изображен многогранник, называемый звездчатым октаэдром или «продолженным октаэдром», который был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет, в 1619 году, был переоткрыт И. Кеплером и назван им «*Stella octangula*» — звезда восьмиугольная.

Этот многогранник, который встречается в природе в виде двойного сросшегося кристалла, можно представить себе как объединение двух пересекающихся равных правильных тетраэдров. Его легко получить из куба,

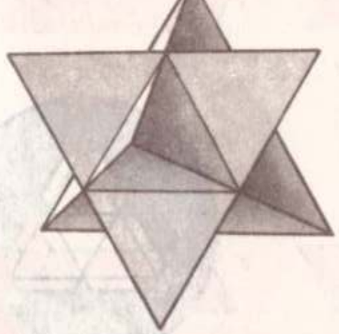


Рис. 124

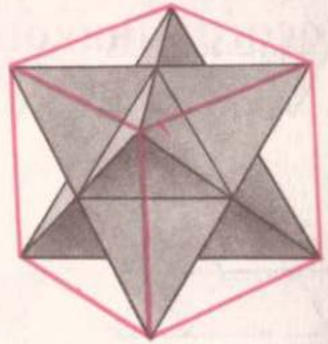


Рис. 125

так как вершины этого многогранника образуют куб (рис. 125).

З а д а ч а 9. Подумайте, какой фигурой является пересечение двух указанных тетраэдров.

З а д а ч а 10. Является ли *Stella octangula* правильным звездчатым многогранником? Почему?

Л и т е р а т у р а

С а в ч е н к о В. Полуправильные многогранники // Квант.—1976.— № 1.

Энциклопедия элементарной геометрии.— М.: Гос. изд. физ.-матем. литературы, 1963.— IV — Геометрия.— С. 429.

Моделирование многогранников

8

Итак, мы познакомились с красивыми — правильными, полуправильными и звездчатыми многогранниками. Модели этих многогранников являются хорошим украшением кабинета математики в школе. Их можно изготовить самим, для чего необходимо иметь набор многоугольников, которые служат гранями некоторого многогранника, и знать, какие их стороны следует склеивать между собой.

Совокупность многоугольников, соответственно равных граням некоторого многогранника, вместе с указанием того, как их нужно склеивать (какие их стороны и вершины представляют собой одни и те же ребра и вершины многогранника), называется *разверткой* этого многогранника. Заметим, что изучение разверток представляет собой вопрос геометрии не только в теории многогранников, но и в топологии.

Ясно, что, имея многогранник, всегда можно построить его развертку. Гораздо менее ясно, можно ли, задав заранее набор многоугольников и схему склеивания, быть уверенным в том, что тем самым определен некоторый многогранник.

Рассмотрим следующие задачи:

З а д а ч а 1. Какие фигуры, изображенные на рисунке 126, можно считать развертками правильного тетраэдра? Почему?

Р е ш е н и е. Многоугольники на рисунке 126, *а, б* служат развертками правильного тетраэдра. Многоугольник на рисунке 126, *в* не может служить разверткой тетраэдра, так как в нем в одной вершине *A* сходятся четыре треугольника, тогда как у тетраэдра все многогранные углы трехгранные.

З а д а ч а 2. Рассмотрим правильный октаэдр. Он образован восемью правильными равными треугольниками, которые можно расположить на плоскости способами, показанными на рисунке 127. Какие из указанных фигур являются развертками правильного октаэдра?

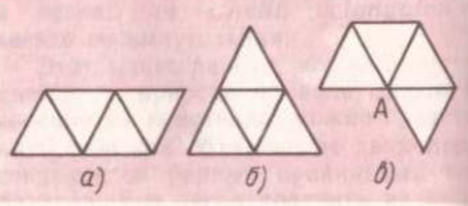


Рис. 126

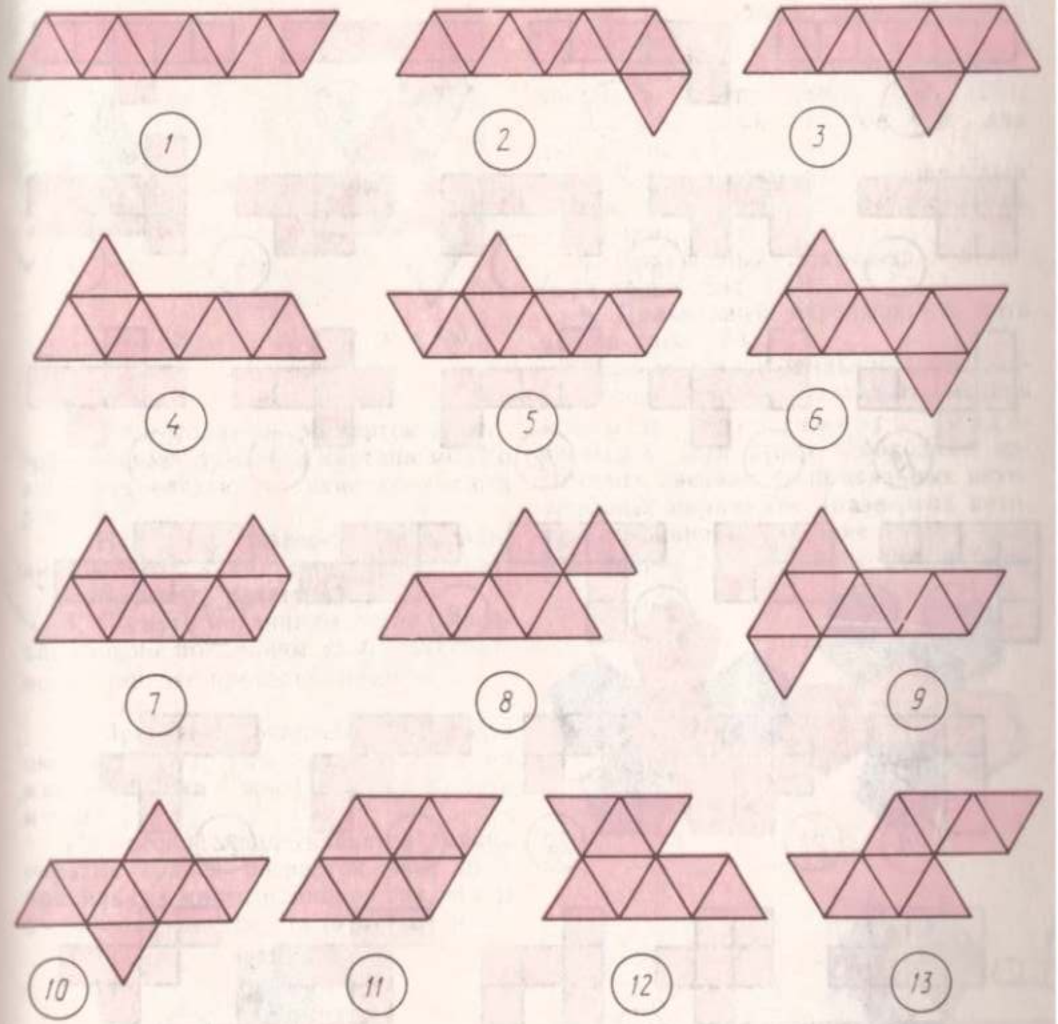


Рис. 127

Р е ш е н и е. Из указанных на рисунке 127 фигур развертками правильного октаэдра являются фигуры 6, 9, 10. Остальные фигуры не могут служить развертками октаэдра, например фигуры 8, 11, 12 и 13, потому, что имеют вершину, в которой сходятся пять треугольников, в то время как октаэдр имеет лишь четырехгранные углы.

З а д а ч а 3. На рисунке 128 укажите фигуры, которые являются развертками куба.

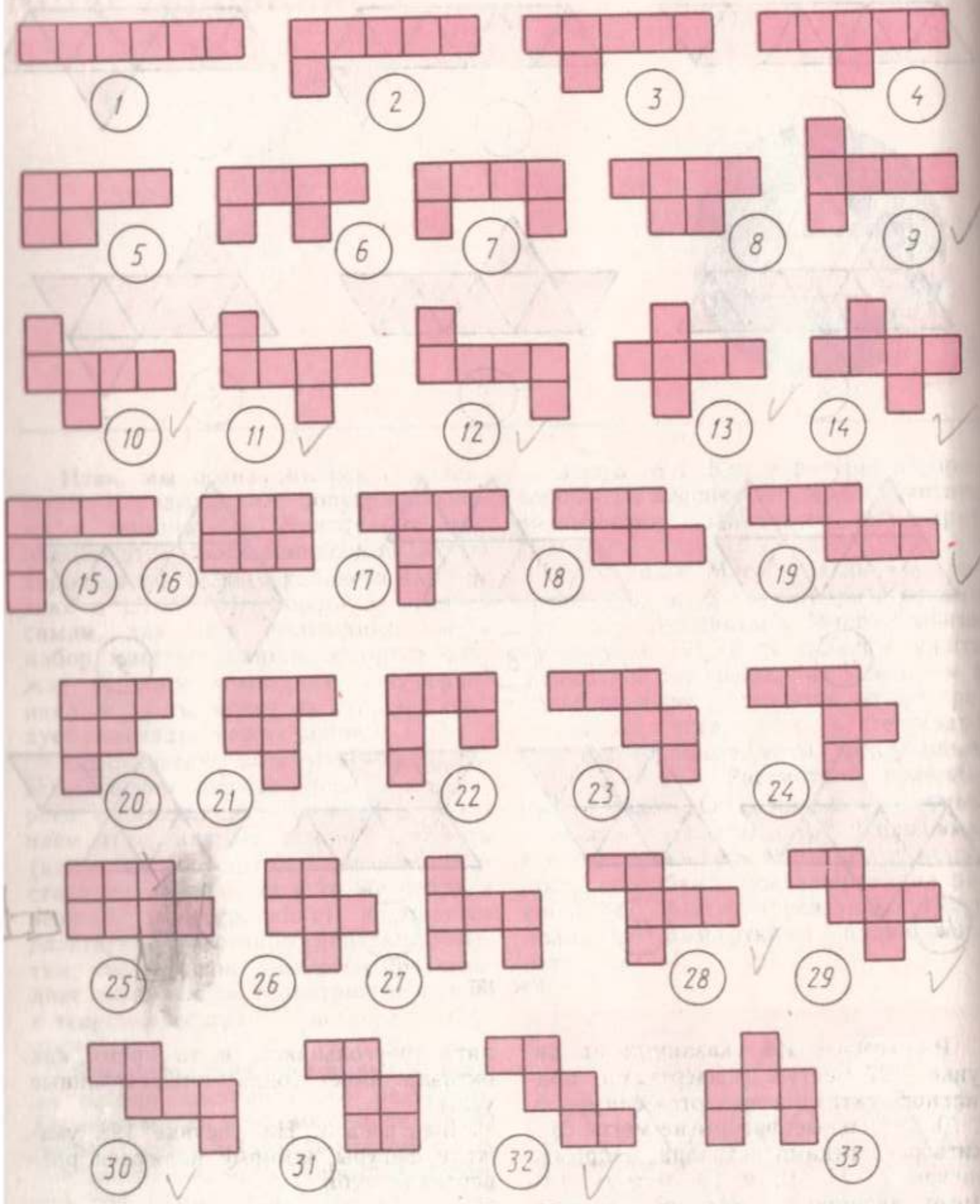


Рис. 128

9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 28, 29, 30, 32

Рис. 129

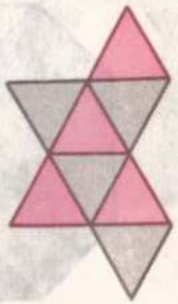


Рис. 130

При изготовлении разверток многогранников из бумаги и картона можно выделить следующие основные этапы работы:

1. Начертить развертку многогранника (с клапанами для склеивания).
2. Вырезать развертку.
3. Согнуть по линиям сгиба (предварительно по линиям сгиба аккуратно по линейке провести лезвием).
4. Склеить.
5. Произвести окантовку ребер или окрашивание граней, наклейку на грани многогранника тонкой цветной бумаги и т. д.

Интересной представляется задача окраски граней разверток всех пяти правильных многогранников так, чтобы было минимальное число цветов и соседние грани были разного цвета. Рассмотрим эту задачу.

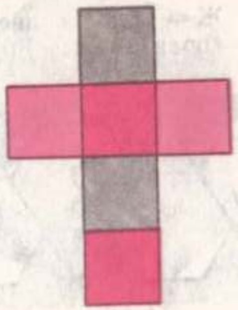


Рис. 131

1. Правильный тетраэдр окрашивается в четыре цвета (рис. 129).
2. Правильный октаэдр — в два цвета (рис. 130).
3. Куб — в три цвета, одинаковым цветом окрашиваются параллельные грани (рис. 131).
4. Правильный додекаэдр — в четыре цвета (рис. 132).
5. Правильный икосаэдр — в пять цветов (рис. 133).

Имея модель правильного додекаэдра, очень просто изготовить модель м а л о г о з в е з д ч а т о г о д о д е к а э д р а. Для этого необходимо изготовить двенадцать правильных пятиугольных пирамидок (развертка которой показана на рисунке 134) с длиной ребра, равной длине ребра изго-

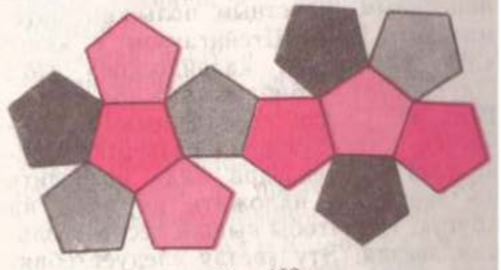


Рис. 132

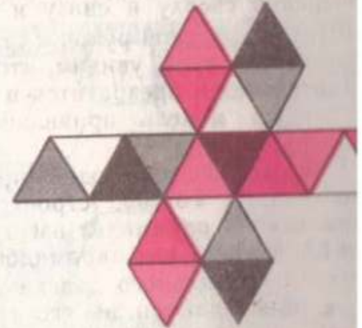


Рис. 133

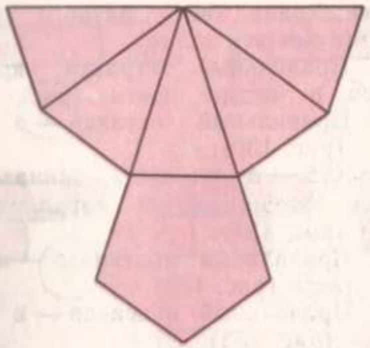


Рис. 134

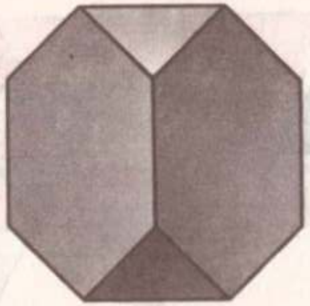


Рис. 135

товленного додекаэдра, и наклеить их
на все грани правильного додекаэдра.

Модель правильного додекаэдра можно изготовить из развертки (см. рис. 132), а можно воспользоваться другим, очень занятным способом, описанным известным польским математиком Гуго Штейнгаузом в книге «Математический калейдоскоп» (М.: Наука, 1981.— Библиотечка «Квант».— Вып. 8). Способ изготовления заключается в следующем: развертку правильного додекаэдра надо разделить на звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. Опустив теперь руку, увидим, что раскрывшаяся звезда превратится в пространственную модель правильного додекаэдра.

После того как модель правильного додекаэдра готова, строится модель правильной пирамиды, изготавливаются 12 пятиугольных пирамидок, по числу граней правильного додекаэдра, которые наклеиваются на его грани. Модель малого додекаэдра готова.

Свой способ изготовления модели многогранников из разверток описывает английский математик М. Веннинджер в книге «Модели многогранников».

Приведем несколько примеров.

1. Усеченный тетраэдр (рис. 135).

Этот многогранник будет выглядеть весьма эффектно, если его шестиугольные грани раскрасить теми же цветами, в которые были выкрашены четыре грани тетраэдра, а все остальные треугольные грани сделать одноцветными, используя новый цвет. Другой способ раскраски граней усеченного тетраэдра показан на рисунке 136:

1	2	3	4	5	6	7	8
Ж	С	О	К	О	К	Ж	С

Здесь Ж — желтый цвет, С — синий, О — оранжевый, К — красный.

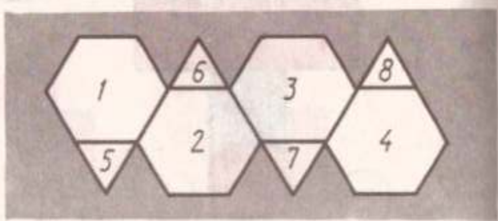


Рис. 136

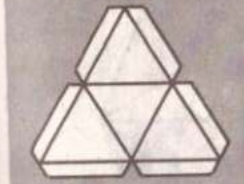


Рис. 137

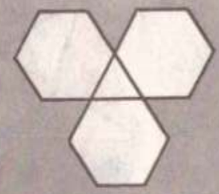


Рис. 138

При этом каждая треугольная грань получает тот же цвет, что и противоположная шестиугольная грань, параллельная ей.

Замечание. При изготовлении развертки не забудьте сделать клапаны для склеивания. Ниже, на рисунке 137, показана развертка правильного тетраэдра с клапанами.

Модель усеченного тетраэдра можно изготовить и иначе. Сначала делается развертка некоторой чаши (рис. 138). Дно чаши — треугольник, а стенки — шестиугольники. Затем треугольники и шестиугольники склеиваются между собой (лучше оставить одну треугольную грань напоследок, крепко приклеив ее только одной стороной) и образовавшееся отверстие закрывается, как закрывается крышка ящика.

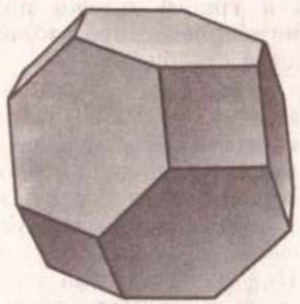


Рис. 139

2. Усеченный октаэдр (рис. 139).

Для раскраски этого многогранника используется пять цветов: раскраска шестиугольных граней модели должна совпадать с раскраской граней октаэдра (четыре пары противоположных параллельных граней окрашиваются в четыре разных цвета). Для квадратов в усеченном октаэдре применяется пятый цвет.

Развертка некой чаши, которая составляет ровно половину модели усеченного октаэдра, дана на рисунке 140. Раскраска граней такова:

1	2	3	4	5	6	7
Ж	З	С	З	О	З	К

Здесь Ж — желтый цвет, З — зеленый, С — синий, О — оранжевый, К — красный.

Склеив чашу и получив половину модели усеченного октаэдра, не составит труда подклеить остальные части — нужно только проследить за тем, чтобы противоположные грани были одного цвета. В последнюю очередь надо подклеить какой-нибудь квадрат.

3. Звездчатый октаэдр — *Stella octangula* Кеплера (рис. 141).

Так как этот многогранник является

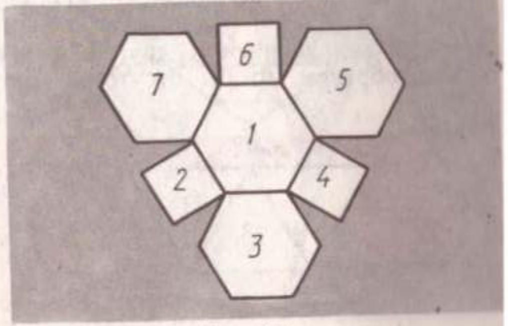


Рис. 140

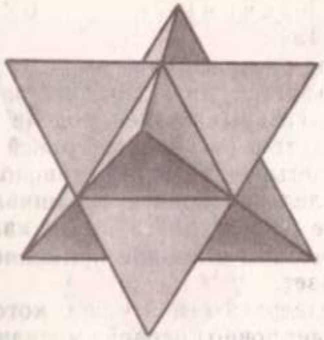


Рис. 141

…бъединением двух пересекающихся …равильных тетраэдров, то для его из…отовления требуются заготовки лишь …дного типа — одинаковые равносто…онние треугольники. Ниже приведена …аблица раскраски для первых четырех …реугольных пирамид, каждая из кото…ых имеет в основании правильный …реугольник:

	1	2	3
1	О	С	Ж
2	Ж	О	К
3	К	С	Ж
4	С	К	О

Здесь О — оранжевый, С — синий, …К — желтый, К — красный цвет. Пи…амиды подклеиваются друг к другу …аким образом, чтобы отсутствующие

Рис. 142

Рис. 143

нижние основания образовали как бы верхушку октаэдра. При этом грани октаэдра на самом деле будут заменены этими пирамидами. Сделав половину модели, вы заметите, что каждая грань окрашена в собственный цвет. (Напомним, что грань здесь образует не один треугольник, а три заштрихованных; рис. 142.) Параллельные грани имеют одну расцветку. Остающиеся четыре пирамиды энантиоморфны первым.

Термин «энантиоморфны» означает следующее: если выбрать какой-нибудь порядок цветов и раскрасить грани, примыкающие к некоторой вершине в этом порядке по часовой стрелке, то энантиоморфной раскраской будет обратная — в том же порядке против часовой стрелки. Таблицу раскраски для оставшихся граней можно получить, переставив в приведенной таблице первый и третий столбцы.

4. Большой додекаэдр (рис. 143).

Этот многогранник составлен из двенадцати пересекающихся пятиугольных граней. Если выполнить модель в шести цветах, то очень заметны выступающие над плоскими гранями пятиугольные звезды. При этом каждый луч будет принадлежать в точности двум соседним звездам. Для этой модели нужен

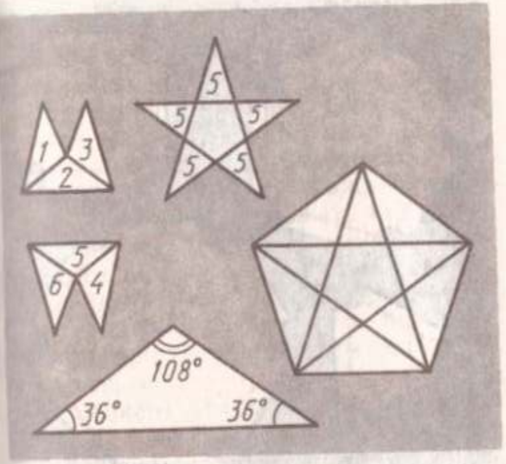


Рис. 144

трафарет в виде равнобедренного треугольника с углами 36°, 36°, 108°. Проще всего соединить заготовки между собой таким образом, чтобы получить двадцать треугольных пирамид (вершинами вниз), а затем склеить пирамиды вместе. Порядок склейки приводится на рисунке 144. Таблица раскраски:

	1	2	3
1	Ж	Б	З
2	С	Б	Ж
3	О	Б	С
4	К	Б	О
5	З	Б	К

	4	5	6
6	З	О	Ж
7	Ж	К	С
8	С	З	О
9	О	Ж	К
10	К	С	Ж

Здесь Ж — желтый цвет, Б — белый, З — зеленый, О — оранжевый, К — красный, С — синий. Треугольники 5 склеиваем с треугольниками 2 и получаем половину модели. Остальные ее части энантиоморфны полученным и расположены на диаметрально противоположных местах.

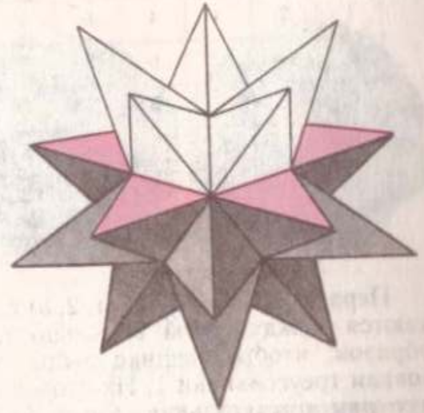


Рис. 145

5. Большой звездчатый додекаэдр (рис. 145).

Модель этого многогранника можно изготовить подклеивая треугольные пирамидки к граням икосаэдра. Однако при таком способе изготовления модель, как правило, не получается аккуратной. Можно сделать модель иначе: взять заготовки — равнобедренные треугольники с углами 36°, 72° и 72° — лучи пятиугольной звезды. Их нужно склеить так, как показано на рисунке 146, в соответствии с таблицей раскраски (с. 94):

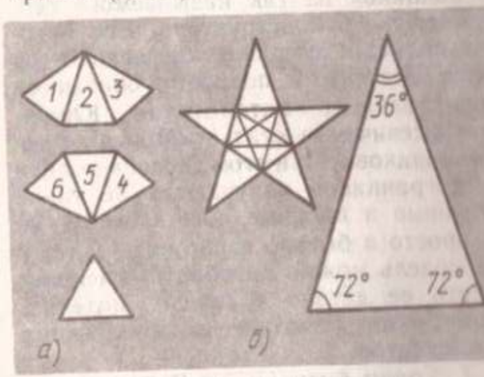


Рис. 146

1	2	3	4	5	6
Ж	З	С	Б	З	С
С	Ж	О	Б	Ж	О
О	С	К	Б	С	К
К	О	З	Б	О	З
З	К	Ж	Б	К	Ж

Первые пять пирамид (1, 2, 3) склеиваются между собой в кольцо таким образом, чтобы внешние ребра образовали треугольники 1. Их стороны дадут нам пятиугольник. Сюда белыми треугольниками подклеиваются остальные пирамиды (4, 5, 6). Обратите внимание, что лучи звезд, лежащие в одной плоскости, одинакового цвета. Остающиеся части энантиоморфны полученным и располагаются на диаметрально противоположных двойникам местах.

Модель большого звездчатого додекаэдра очень декоративна. Описанный способ изготовления позволяет сделать очень красивые модели многогранников. Однако он трудоемкий, требует много времени и терпения.

Существует другой, более «быстрый» способ изготовления моделей многогранников из так называемого геометрического конструктора. Его автором является американский архитектор Фред Бассени, а подробно описан он отечественным математиком Юрием Матиясевичем в статье «Модели многогранников». При этом способе модели многогранников получаются не такие красивые и прочные, как клееные, но их просто и быстро изготовить, к тому же модель можно разобрать и использовать ее детали в других моделях. Конструктор состоит из следующих компонентов:

1. Грани будущих многогранников, у которых обрезаны уголки и добавлены отгибающиеся клапаны (рис. 147).

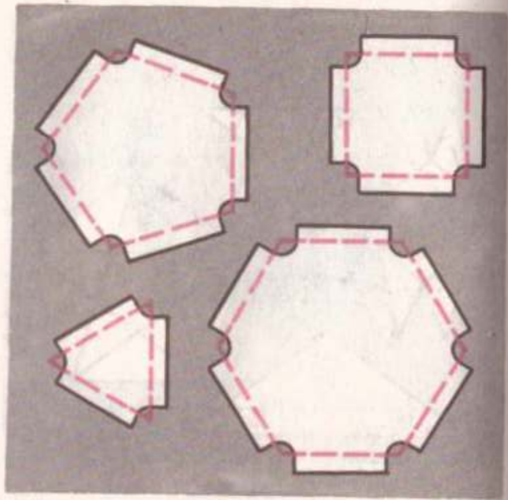


Рис. 147

2. Резиновые колечки — основная крепежная деталь конструктора (такие резиновые колечки можно нарезать, например, из велосипедной камеры).

Когда необходимое количество граней и резиновых колечек готово, можно перейти к непосредственной сборке нужного многогранника. С помощью клапанов и резинок грани легко соединяются друг с другом.

Все многоугольники должны иметь равные стороны, длину которых выбирают исходя из соотношения упругости резинок и жесткости картона, — надо, чтобы грани скреплялись прочно, но не деформировались. Лучше всего определить длину экспериментально, сделав несколько пар граней разной величины.

Грани тоже хорошо иметь разных цветов. Удобно для каждого типа граней выбирать свою окраску. Хорошо также, чтобы наиболее часто используемые треугольные грани были бы нескольких цветов. Для того чтобы клапаны хорошо отгибались, надо по периметру многоугольника провести по линейке, скажем, концом ножниц. Поскольку потребуется изготовить несколько десятков граней каждого типа (больше всего треугольных, затем четырехугольных и пятиугольных и меньше всего шестиугольных), то сначала нужно сделать как можно точнее шаблоны граней с клапанами и без них, а затем просто обвести эти шаблоны карандашом.

Из такого конструктора легко собираются правильные, полуправильные — равногранные и равноугольные многоугольники. Например, на рисунке 148 представлены сделанные из геометрического конструктора соответственно модели ромбокубооктаэдра и псевдоархимедова многогранника — многогранника Ашкинузе.

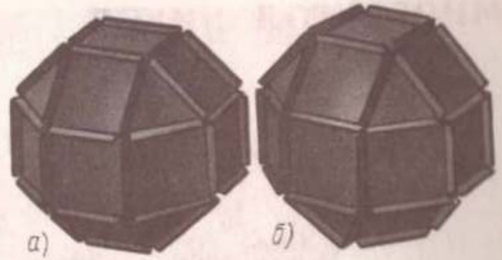


Рис. 148

Литература

Веннинджер М. Модели многогранников.— М.: Мир, 1974.

Гамаюнов В. Модели звездчатых многогранников // Квант.—1981.— № 2.

Матиясевич Ю. Модели многогранников // Квант.—1978.— № 1.

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. — М.: Наука, 1981 — (Библиотечка «Квант».— Вып. 8).

Паркеты из правильных многоугольников

С паркетами мы часто встречаемся в повседневной жизни: ими застилают полы в домах, стены комнат покрывают различными плитками, часто здания украшают орнаментами. Давайте переведем эту ситуацию на язык математики: решим задачу покрытия плоскости различными геометрическими фигурами. Выберем сначала среди фигур правильные многоугольники и выясним: «Сколько существует покрытий плоскости правильными многоугольниками?»

Будем рассматривать покрытия плоскости правильными многоугольниками, которые отвечают следующим требованиям:

1. Плоскость покрыта правильными многоугольниками сплошь, без просветов и двойных покрытий, т. е. два многоугольника покрытия либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо совсем не имеют общих точек. Такое покрытие называется паркетом.

2. Вокруг всех вершин правильные многоугольники расположены одним и тем же способом, т. е. вокруг всех вершин в одном и том же порядке следуют многоугольники одних и тех же наименований. Например, если вокруг одной вершины многоугольники расположены в последовательности: треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, то и вокруг всякой другой вершины того же покрытия многоугольники расположены именно в этой же последовательности. Таким образом, паркет можно положить на себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую наперед заданную вершину. Такой паркет называется *правильным*.

Итак, перед нами стоит задача: определить, сколько существует правильных паркетов и как они устроены. Наметим путь ее решения. Поскольку вокруг всех вершин паркета многоугольники расположены одним и тем же способом, прежде всего необходимо исследовать возможные расположения многоугольников вокруг некоторой вершины — назовем ее A. К вершине A не может примыкать менее трех многоугольников, а потому угол α_1 многоугольника с наименьшим числом сторон n_1, который является и наименьшим углом, примыкающим к вершине A, не может быть более $120°$ $(360°:3=120°)$. Существуют лишь четыре правильных многоугольника, углы которых не превышают $120°$.

Напомним, что внутренний угол пра-

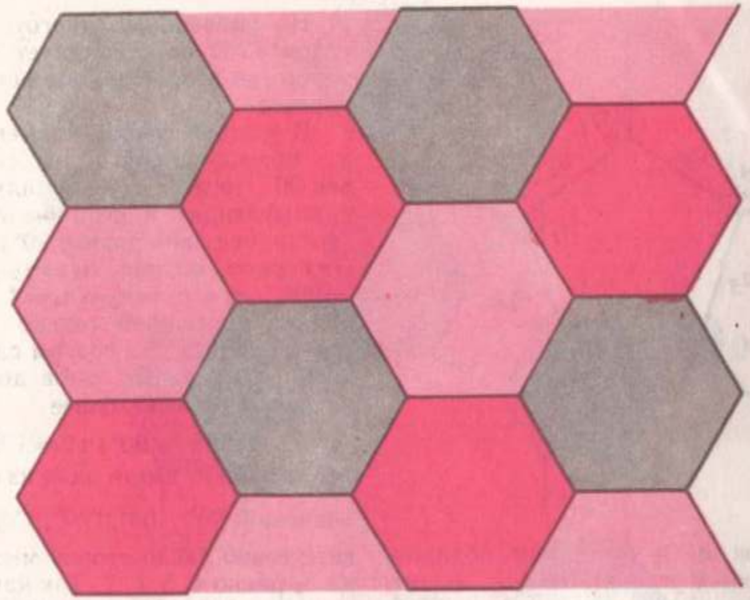


Рис. 149

вильного n-угольника равен

$$\frac{2d\,(n-2)}{n}.$$

Итак, многоугольники (правильные), углы которых не превышают $120°$: равносторонний треугольник, $\alpha_1=60°$, $n_1=3$; квадрат, $\alpha_1=90°$, $n_1=4$; правильный пятиугольник, $\alpha_1=108°$, $n_1=5$; правильный шестиугольник, $\alpha_1=120°$, $n_1=6$.

Разобьем все правильные паркеты на четыре группы: в первую отнесем паркеты, в которых многоугольником с наименьшим числом сторон будет правильный шестиугольник, во вторую — правильный пятиугольник, в третью — квадрат и в четвертую — равносторонний треугольник.

В первую группу попадает одно покрытие, состоящее из правильных шестиугольников. Поскольку $\alpha_1=120°$, сумма всех остальных углов, примыкающих к вершине A, равна $360°-120°=240°$. Так как α_1 — минимальный угол, то каждый из остальных углов не менее $120°$, т. е. этих углов два — по $120°$ каждый. Такой паркет изображен на рисунке 149.

Во второй группе $\alpha_1=108°$, $n_1=5$. Тогда сумма остальных углов, примыкающих к вершине A, равна $360°-108°=252°$. Число этих углов равно двум, так как каждый из них должен быть не меньше $108°$. Пусть один из этих углов α_2, а другой α_3. Число сторон соответствующих многоугольников равно n_2 и n_3. Обозначим стороны правильного пятиугольника в порядке их обхода: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (рис. 150). Если к стороне a_1 примыкает n_2-угольник, то к соседней стороне a_2 примыкает n_2-угольник, а к a_3 — опять n_2-угольник и т. д. Вокруг вершины, обще

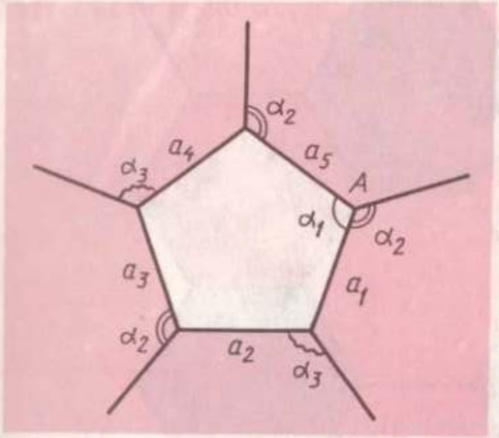


Рис. 150

для сторон a_1 и a_5, таким образом, располагаются углы α_1, α_2 и α_2. Значит, выполняется равенство $\alpha_1+2\alpha_2=360°$. Тогда

$$\alpha_2=\frac{360°-\alpha_1}{2}=\frac{360°-108°}{2}=126°, \quad \text{т. е.} \quad \alpha_2=\alpha_3=126°.$$

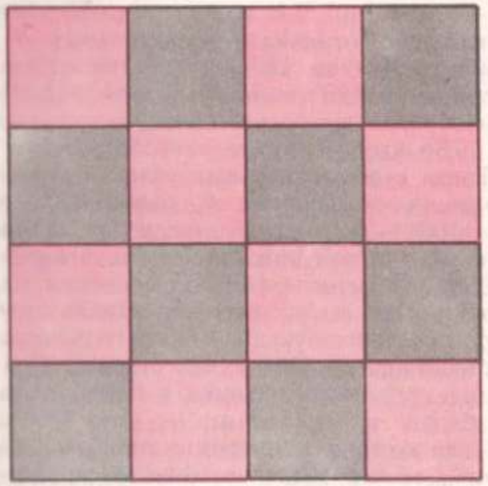


Рис. 151

Но правильных многоугольников с углом 126° не существует. Таким образом, во второй группе нет ни одного паркета.

В третьей группе наименьший угол α_1, примыкающий к вершине A, равен 90°, тогда $n_1=4$. Остальных углов, примыкающих к вершине A, или три (тогда все они равны 90°), или два. В первом случае $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=90°$, $n_1=n_2=n_3=n_4=4$. Получим паркет, состоящий только из квадратов (рис. 151). Во втором случае меньший из остальных углов должен быть не менее 90° и не более

$$(360°-90°):2=135°,$$

т. е. α_2 может иметь одно из следующих значений: 90°, 108°, 120°, $128\frac{4}{7}°$. Соответственно число сторон многоугольника n_2 равно 4, 5, 6, 7. Так как $\alpha_2+\alpha_3=360°-90°=270°$, получим пять следующих комбинаций:

а) $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=90°$, $\alpha_3=180°$. Эта комбинация невозможна, потому что не существует правильного многоугольника с углом 180°;

б) $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=108°$, $\alpha_3=162°$. Такая комбинация также невозможна, поскольку многоугольник с углом 108° есть пятиугольник, и рассуждения, проведенные при рассмотрении второй группы паркетов (см. рис. 150), приводят к выводу, что $\alpha_1=\alpha_3$, что противоречит полученным числовым значениям;

в) $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=120°$, $\alpha_3=150°$. Эта комбинация дает паркет, состоящий из квадратов ($\alpha_1=90°$, $n_1=4$), шестиугольников ($\alpha_2=120°$, $n_2=6$) и двенадцатиугольников ($\alpha_3=150°$, $n_3=12$; рис. 152);

г) $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=128\frac{4}{7}°$, $\alpha_3=141\frac{3}{7}°$. При такой комбинации паркета не существует, потому что не существует

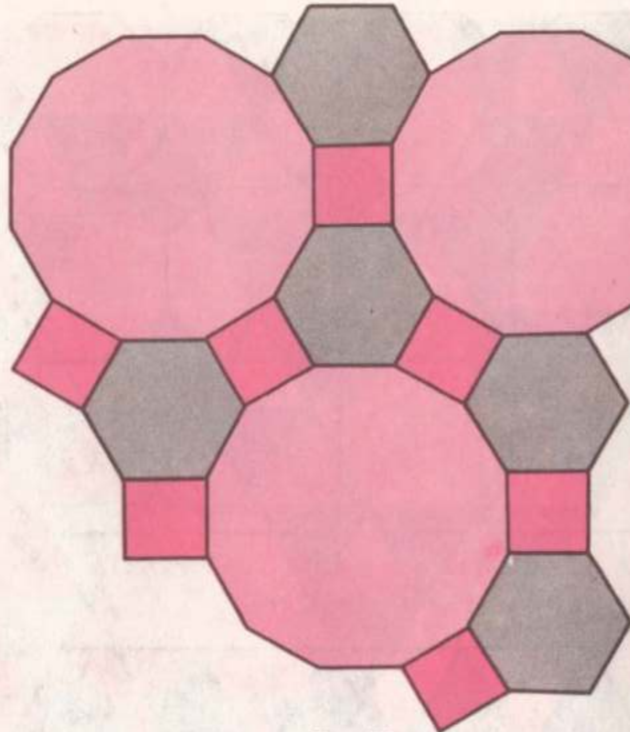


Рис. 152

правильного многоугольника с углом $141\frac{3}{7}°$;

д) $\alpha_1=90°$, $\alpha_2=135°$, $\alpha_3=135°$. Эта комбинация дает паркет, состоящий из квадратов ($\alpha_1=90°$, $n_1=4$) и восьмиугольников ($\alpha_2=\alpha_3=135°$, $n_2=n_3=8$; рис. 153).

В четвертой группе $\alpha_1=60°$, $n_1=3$. Сумма остальных углов равна $360°-60°=300°$, а их число может быть равным двум, трем, четырем или пяти. Если их пять, то каждый из них равен 60° и получится паркет, состоящий из одних треугольников (рис. 154). Если их четыре, то меньший из них менее 60° и не более $360°:4=75°$. Следовательно, как угол правильног многоугольника меньший из этих четырех углов может быть только 60 $\alpha_2=60°$. Три остальных угла составляют в сумме $300°-60°=240°$; меньший из этих трех углов α_3 не мене 60° и не более $240°:3=80°$, следовательно, $\alpha_3=60°$. Сумма остальных углов равна $240°-60°=180°$, что дае две возможные комбинации: $\alpha_4=60$ $\alpha_5=120°$ и $\alpha_4=\alpha_5=90°$. Таким образом, получаем: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=60$ $\alpha_5=120°$ ($n_1=n_2=n_3=n_4=3$, $n_5=6)$ $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60°$, $\alpha_4=\alpha_5=90°$ ($n_1=n_2=n_3=3$, $n_4=n_5=4$).

Первая комбинация дает покрыти

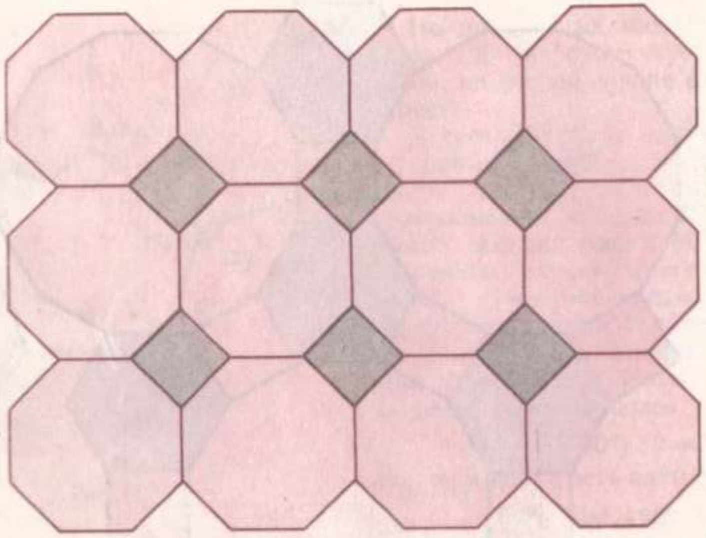


Рис. 153

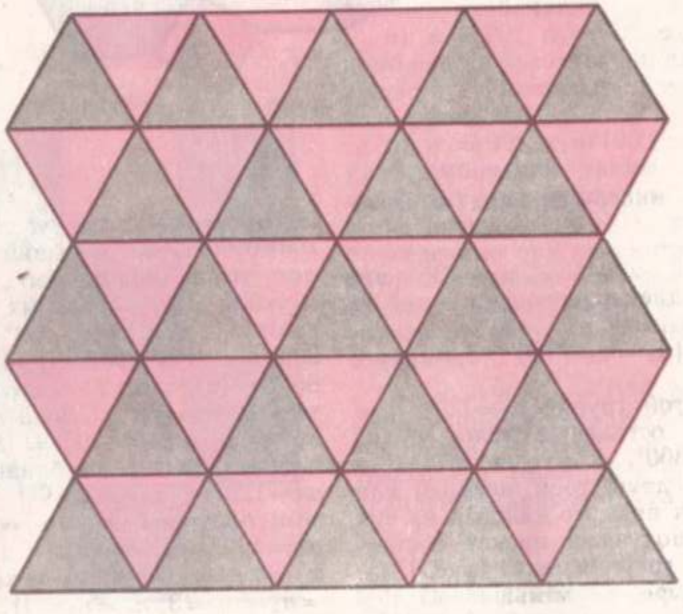


Рис. 154

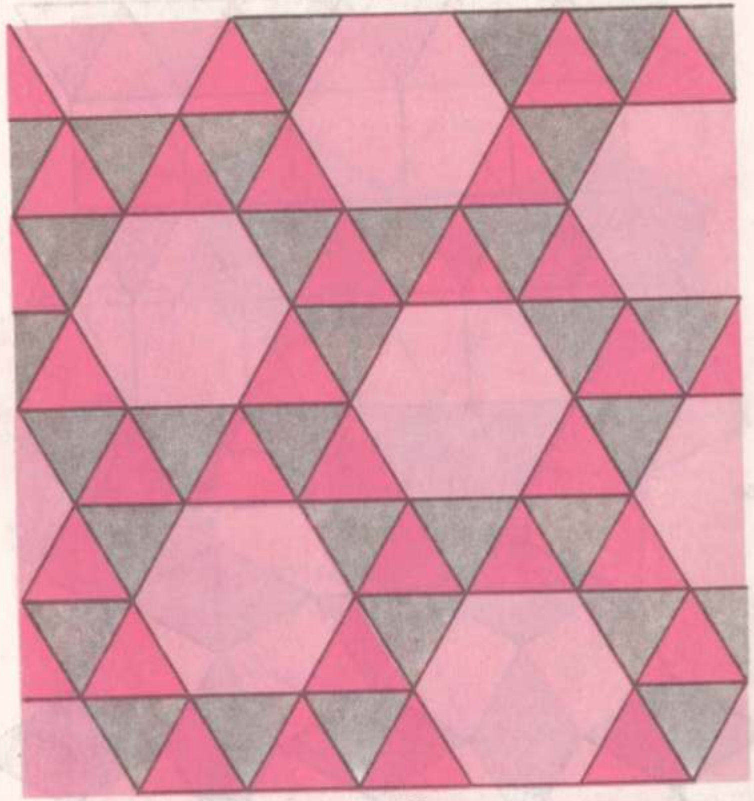


Рис. 155

изображенное на рисунке 155. Вторая комбинация дает два покрытия в зависимости от того, как расположены многоугольники вокруг вершины: в порядке треугольник — треугольник — треугольник — квадрат — квадрат (рис. 156) или в порядке треугольник — треугольник — квадрат — треугольник — квадрат (рис. 157).

Если $\alpha_1=60°$ и, кроме этого угла, к той же вершине примыкают еще три угла, то меньший из этих углов не менее 60° и не более $300°:3=100°$. Следовательно, возможны два случая: или $\alpha_2=90°$, или $\alpha_2=60°$. В первом случае меньший из остальных двух углов, угол α_3, не менее 90° и не более $(300°-90°):2=105°$; следовательно, как угол правильного многоугольника $\alpha_3=90°$. Итак, получаем: $\alpha_1=60°$, $\alpha_2=\alpha_3=90°$, $\alpha_4=120°$ ($n_1=3$, $n_2=n_3=4$, $n_4=6$). Если вокруг каждой вершины многоугольники расположены в порядке треугольник — квадрат — шестиугольник — квадрат, мы получаем покрытие, изображенное на рисунке 158.

Последовательность треугольник — квадрат — квадрат — шестиугольник невозможна. Действительно, предположим, что существует такое расположе-

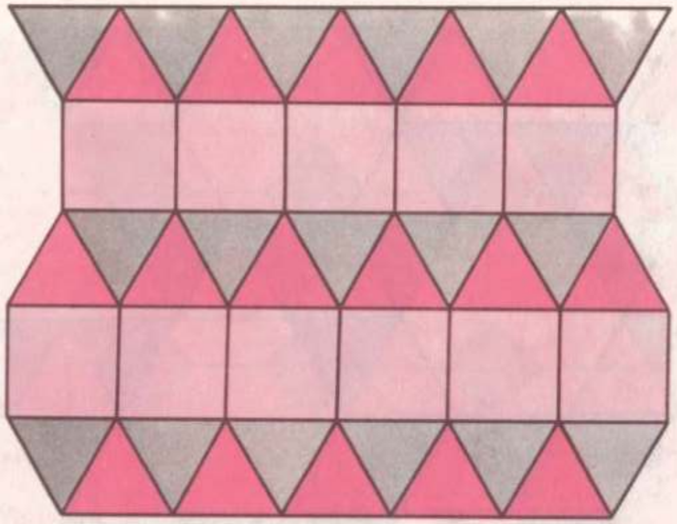


Рис. 156

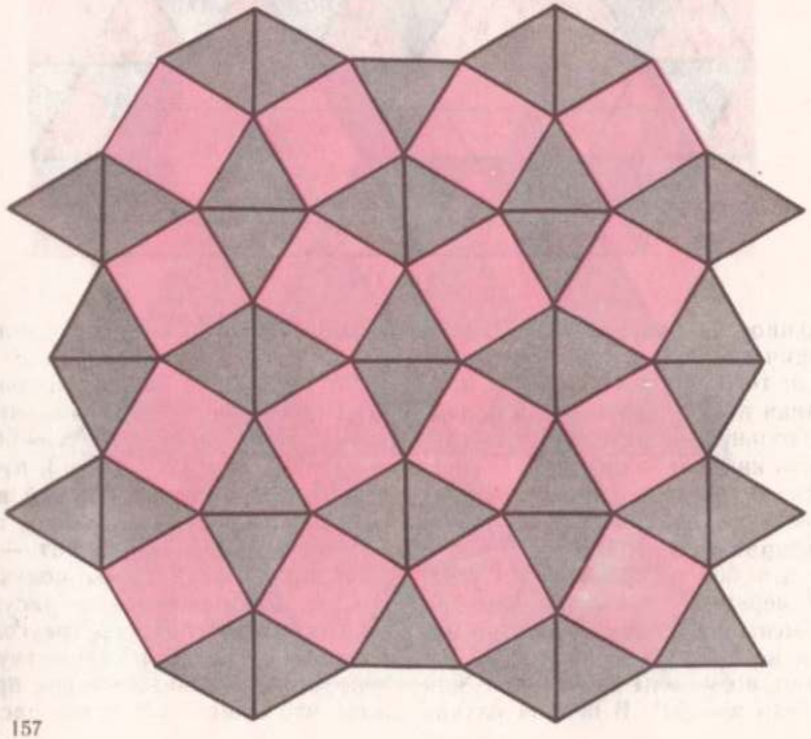


Рис. 157

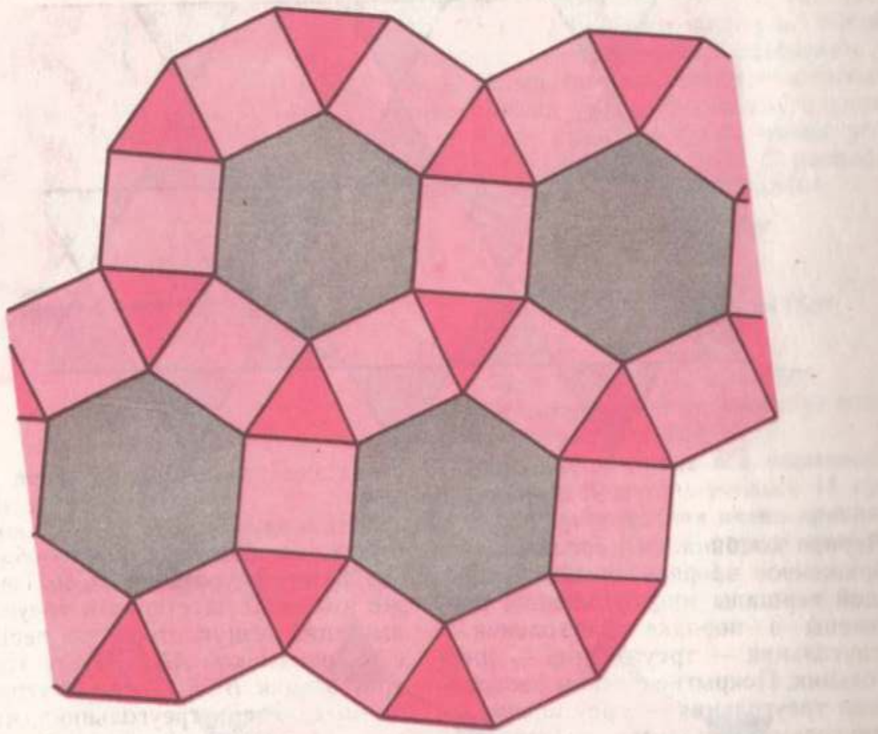


Рис. 158

ние многоугольников вокруг каждой вершины. Рассмотрим треугольник ABC покрытия с таким расположением фигур (рис. 159). Тогда к вершине A должен примыкать квадрат, имеющий с треугольником ABC общую сторону, пусть этой стороной будет AC; к вершине B тоже должен примыкать квадрат, имеющий общую сторону с треугольником ABC, пусть этой стороной будет BC. Тогда к вершине C примыкают два квадрата, имеющие общие стороны с треугольником ABC, что противоречит предположению.

Если же $\alpha_1=\alpha_2=60°$, $n_1=n_2=3$, то сумма двух остальных углов $360°-2\cdot 60°=240°$. Третий угол не может быть равным 60°, так как тогда бы четвертый угол был равным 180°, что невозможно. Остаются три комбинации:

а) $\alpha_3=120°$, $\alpha_4=120°$ $(n_3=n_4=6)$;
б) $\alpha_3=108°$, $\alpha_4=112°$;
в) $\alpha_3=90°$, $\alpha_4=150°$ $(n_3=4,\ n_4=12)$.

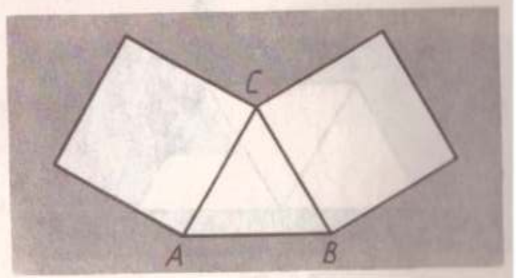


Рис. 159

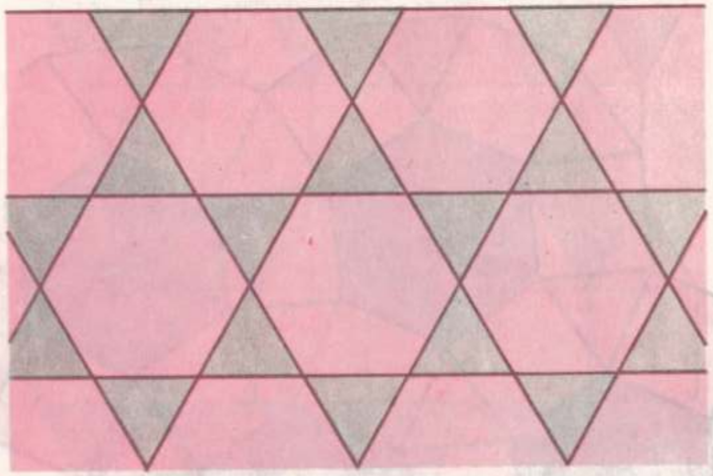


Рис. 160

Первая комбинация дает покрытие, ображенное на рисунке 160. Вокруг дой вершины многоугольники рас- ожены в порядке треугольник — тиугольник — треугольник — шес- гольник. Покрытие с таким располо- нием треугольник — треугольник — тиугольник — шестиугольник вок- каждой вершины существовать не кет. Действительно, предположим, ABC — треугольник, принадлежа- й покрытию с таким расположением шин (рис. 161). Поскольку вокруг A гоугольники расположены указан- образом, существует треугольник, ющий с треугольником ABC общую

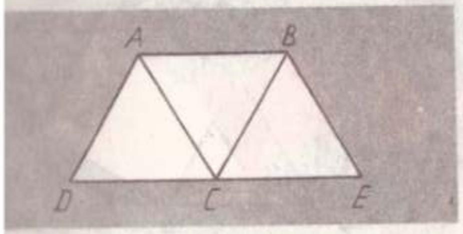


Рис. 161

сторону и общую вершину A. Пусть это будет треугольник ACD. Точно так же должен существовать треугольник, имеющий общую сторону и вершину B с треугольником ABC. Пусть это будет треугольник BCE. Тогда к вершине C примыкают три треугольника, что противоречит предложению.

Вторая комбинация невозможна, так как не существует правильного многоугольника с углом 112°.

Третья комбинация тоже не дает ни одного покрытия. Здесь $\alpha_1=\alpha_2=60°$, $\alpha_3=90°$, $\alpha_4=150°$ $(n_1=n_2=3,\ n_3=4,\ n_4=12)$. Чтобы доказать невозможность расположения треугольник — треугольник — квадрат — двенадцатиугольник вокруг каждой вершины, достаточно повторить рассуждения, которые мы провели при разборе первой комбинации.

Расположение треугольник — квадрат — треугольник — двенадцатиугольник также невозможно.

● Попробуйте показать это самостоятельно.

Если $\alpha_1=60°$ и, кроме этого угла,

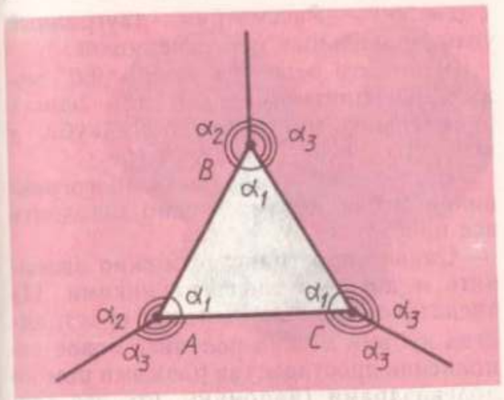


Рис. 162

к той же вершине примыкают еще два угла α_2 и α_3, то $\alpha_1=\alpha_3$.

В самом деле, в этом случае к каждой стороне треугольника примыкает некоторый многоугольник (рис. 162), причем эти многоугольники (назовем их P, Q, R) имеют попарно общие стороны, примыкающие к вершинам A, B, C. Вследствие этого если многоугольник P имеет угол α_2, то многоугольники Q и R как смежные с ним имеют угол α_3. Тогда вокруг вершины C располагаются углы α_1, α_3, α_3. Значит,

$$\alpha_1+2\alpha_3=360°$$

и

$$\alpha_3=\frac{360°-\alpha_1}{2}=\frac{360°-60°}{2}=150°.$$

Поэтому

$$\alpha_2=360°-\alpha_1-\alpha_3=150°.$$

Тогда $n_2=n_3=12$. Это покрытие изображено на рисунке 163.

Итак, рассмотрены все возможные комбинации. Всего получилось 11 правильных паркетов. Они очень красивы, не правда ли? Какой паркет вам понравился больше всего?

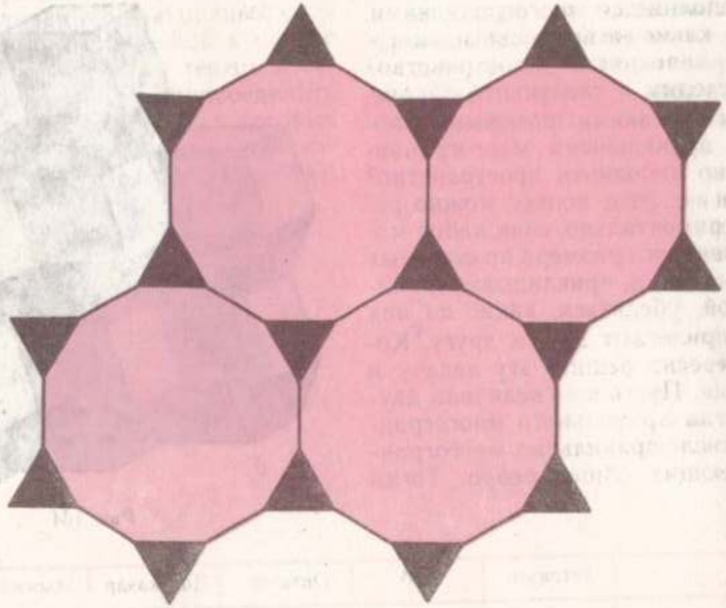


Рис. 163

Обратите внимание на паркеты, ко-
торые составлены только из одноимен-
ных правильных многоугольников —
равносторонних треугольников, квадра-
тов и правильных шестиугольников.
Среди этих фигур (если у них у всех
равные стороны) правильный шести-
угольник покрывает наибольшую пло-
щадь. Поэтому если мы хотим, напри-
мер, разбить бесконечное поле на участ-
ки размером в 1 га, чтобы на ограж-
дения ушло как можно меньше материа-
ла, то участкам нужно придать форму
правильных шестиугольников. Еще
один любопытный факт: оказывается,
разрез пчелиных сот тоже выглядит
как плоскость, покрытая правильными
шестиугольниками. Пчелы инстинктив-
но стремятся строить как можно более
вместительные соты, чтобы запасти по-
больше меда.

Аналогично тому, как плоскость по-
крывается многоугольниками, прост-
ранство заполняется многогранниками.
Интересно, какие же правильные много-
гранники заполняют пространство?
Итак, переходим к следующей задаче.

Задача. Какими равными одно-
именными правильными многогранни-
ками можно заполнить пространство?

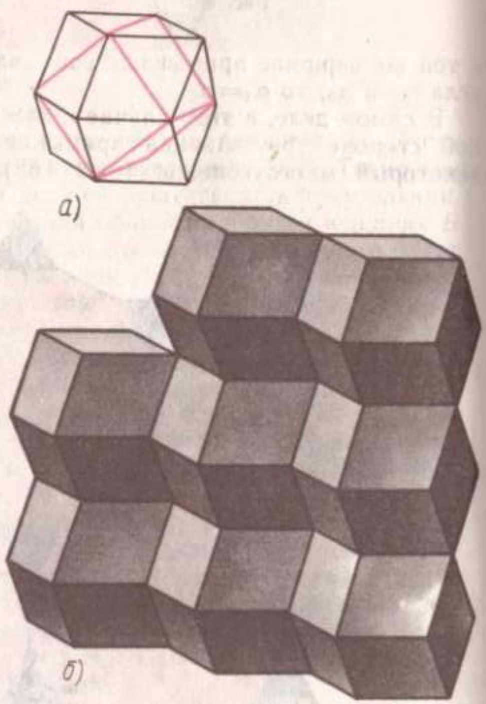
Решение. Этот вопрос можно ре-
шить экспериментально, взяв набор мо-
делей одинакового размера правильных
многогранников, и, прикладывая их од-
на к другой, убедиться, какие из них
вплотную прилегают друг к другу. Ко-
нечно, интересно решить эту задачу и
теоретически. Пусть α — величина дву-
гранного угла правильного многогран-
ника, n — число правильных многогран-
ников, имеющих общее ребро. Тогда
$n\cdot\alpha=360°$. Рассмотрим двугранные
углы правильных многогранников:

	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
$\cos\alpha$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ясно, что равенство $n\cdot\alpha=360°$ мо-
жет выполняться только для одного
правильного многогранника — куба, у
которого $\alpha=90°$.

Вывод. Из правильных многогран-
ников только кубами можно заполнить
все пространство.

Однако пространство можно запол-
нять и другими многогранниками. Из
представленного заполнения простран-
ства кубами можно получить новое за-
полнение пространства равными ромбо-
додекаэдрами (напомним, что это две-
надцатигранник, у которого все грани —
ромбы, см. рис. 116, *б*).



а)

б)

Рис. 164

Берутся кубы двух цветов, напри-
мер белые и черные, и располагаются
в пространственном шахматном поряд-
ке. Затем кубы одного цвета, пусть
черные, убираются. Образовавшуюся
пустоту заполняем шестью равными пи-
рамидами с общей вершиной в центре
выброшенного куба. Если теперь к ос-
тавшемуся белому кубу присоединить
все прилегающие пирамиды, у которых
основанием являются грани белого ку-
ба, получим ромбододекаэдр (рис. 164).

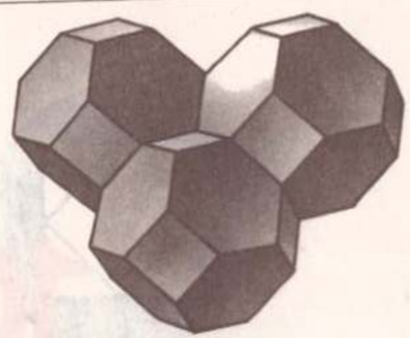


Рис. 165

Теперь все пространство будет за-
полнено такими ромбододекаэдрами.

Также пространство можно запол-
нить и равными полуправильными мно-
гогранниками — телами Архимеда —
усеченными октаэдрами (рис. 165).

Пространство можно заполнять и
комбинациями различных многогранни-
ков. Укажем некоторые из них.

1. Тетраэдры и октаэдры.
2. Усеченные октаэдры, кубы и ром-
бокубооктаэдры.
3. Ромбокубооктаэдры, усеченные
кубы и усеченные тетраэдры.

Литература

Гамаюнов В. Полуоктаэдры и драпиров-
ка потолков // Квант.—1981.— № 1.

Гольцева Р. Заполнение пространства //
Квант.—1976.— № 9.

Колмогоров А. Н. Паркеты из правиль-
ных многоугольников // Квант.—1986.— № 8.

Михайлов О. Одиннадцать правильных
паркетов // Квант.—1979.— № 2.

Штейнгауз Г. Математический калейдо-
скоп.— М.: Наука, 1981.— (Библиотечка
«Квант».— Вып. 8).

ретья проблема ильберта

В августе 1900 года в Париже со-
тоялся Второй Международный конг-
есс математиков, на одном из заседа-
ий которого выступил немецкий мате-
атик Давид Гильберт (1862—1943)
 своим ставшим впоследствии знаме-
итым докладом «Математические про-
лемы».

Он представил 23 проблемы, охва-
ившие практически все основные на-
равления математики и определившие
 развитие в XX столетии. Первые
есть проблем доклада относятся к обо-
нованию различных математических
исциплин, следующие девять — к бо-
ее специальным вопросам алгебры, ал-
ебраической геометрии и теории чи-
ел, остальные восемь — к теории функ-
ий, дифференциальным уравнениям и
ариационному исчислению.

Из всех проблем Гильберта лишь
дна, третья, связана с вопросами пре-
одавания геометрии. Ученый обратил
нимание на то, что при вычислении
бъема пирамиды еще со времен Евкли-
а пользуются сложным методом исчер-
ывания, или (более позднее его назва-
ие) методом пределов, а именно рас-
матривают довольно сложные ступен-
атые тела (иногда их называют «чер-
овой лестницей»; рис. 166) и переходят к пределу при неограниченно возрастающем числе ступенек.

Напомним, в чем состоит суть дела. Сначала берется треугольная пирамида (рис. 167, *а*) и достраивается до треугольной призмы (рис. 167, *б*).

Получившаяся треугольная призма $ABCDEF$ разбивается на три пирамиды: $ABCD$, $BECD$, $EFCD$, которые имеют равные основания и равные высоты. Таким образом, чтобы доказать,

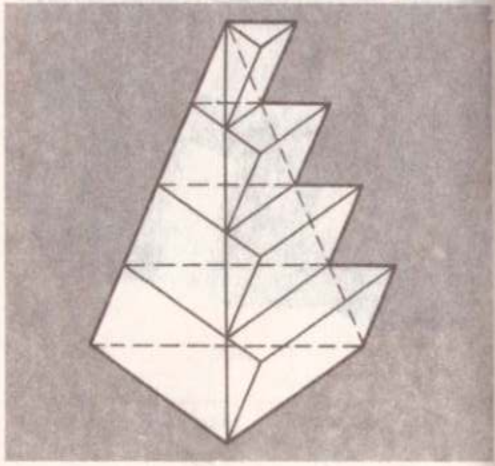


Рис. 166

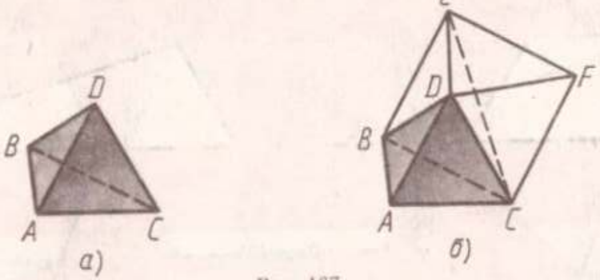


Рис. 167

что все три пирамиды имеют одинаковый объем или равновелики, нужно доказать, что две пирамиды, имеющие равные основания и равные высоты, равновелики. Проблема состоит в том, чтобы ответить на вопрос: можно ли доказать это утверждение без метода пределов, методами разбиения или дополнения, которые используются на плоскости для определения площадей фигур?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала рассмотрим равновеликость и равносоставленность на плоскости. Два многоугольника называются *равновеликими*, если их площади равны. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников.

Ясно, что если два многоугольника равносоставлены, то они и равновелики. Отсюда возникает простой прием для вычисления площадей многоугольников различной формы, который называется методом разбиения, или разложения, или разрезания.

Например, зная формулу для вычисления площади прямоугольника, легко найти формулу для вычисления площади параллелограмма. Для этого достаточно параллелограмм разрезать на две части, как показано на рисунке 168, и сложить из них прямоугольник, площадь которого равна произведению его сторон, откуда вытекает, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

Теперь можно показать, что площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, опущенную на эту сторону (на рисунке 169 MN — средняя линия треугольника ABC).

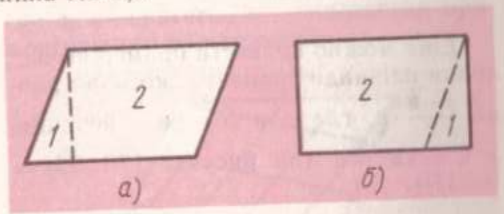


Рис. 168

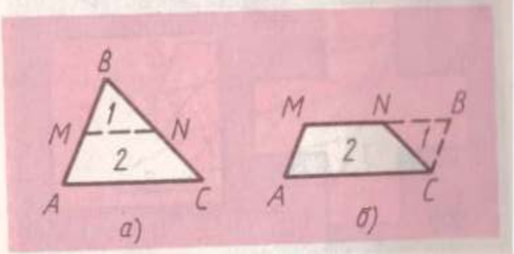


Рис. 169

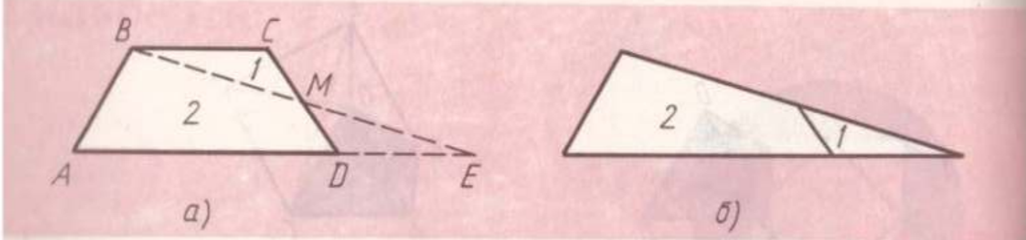


Рис. 170

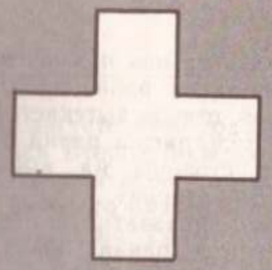


Рис. 171

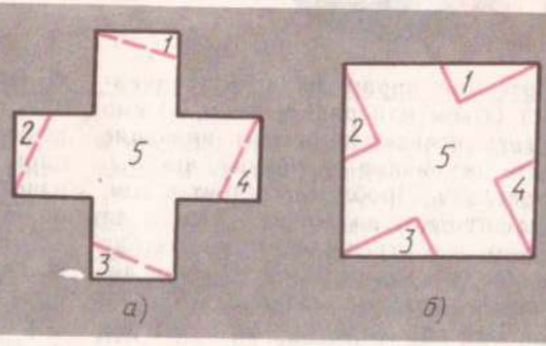


Рис. 172

Еще можно привести пример вычисления площади трапеции, которая равна $\frac{a+b}{2}\cdot h$, где a и b — ее основания, а h — высота (на рисунке 170 $CM=MD$).

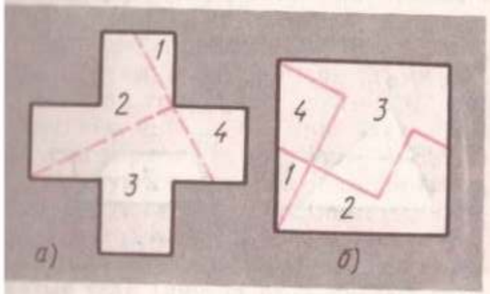


Рис. 173

Рассмотрим теперь несколько более сложных задач на разрезание. Начнем с известной задачи.

Задача 1. *Греческий крест.* Крест, изображенный на рисунке 171, перекроим в квадрат.

Решение. На рисунках 172 и 173 представлены два способа разбиения: в первом сделано четыре разреза, во втором — лишь два.

Задача 2. Докажем, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Решение. На рисунке 174, *а*, *б* показано, на какие части нужно разрезать правильный восьмиугольник и как сложить прямоугольник, площадь которого равна произведению его сторон, а стороны равны соответственно наибольшей и наименьшей диагоналям исходного правильного восьмиугольника.

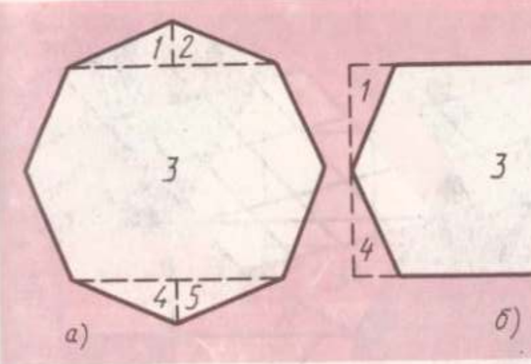


Рис. 174

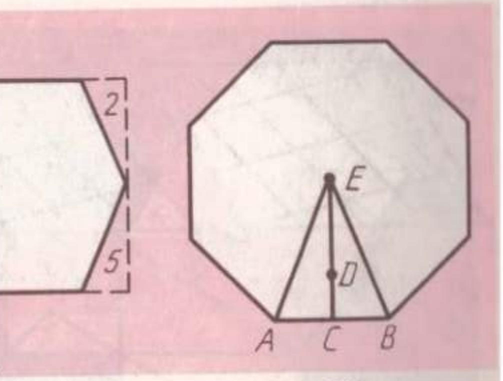


Рис. 175

Замечание. Можно предложить следующий способ построения правильного восьмиугольника со стороной, равной длине отрезка AB (рис. 175): $AC=CB$; $DC\perp AB$; $DC=AC$; $DE=AD$; Окр. $(E; AE)$; $\angle AEB=45°$ что и доказывает, что AB — сторона правильного восьмиугольника.

Задача 3. Стороны AB и CD параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, разбиты на n равных частей; стороны AD и BC — на m равных частей: а) точки деления соединены так, как показано на рисунке 176, *а*; б) точки деления соединены так, как показано на рисунке 176, *б*. Чему равны площади образовавшихся при этом маленьких параллелограммов?

Решение. а) Отрежем от параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 177, *а*) два треугольника ABM и BKC. Остается фигура, изображенная на рисунке 177. *б*. Треугольники ABM и BKC прикладываем к фигуре на рисунке 177, *б* так, как показано на рисунке 177, *в*. Получилась фигура, состоящая из $m\cdot n+1$ маленьких параллелограммов, площадь которой равна 1. Следовательно, площадь одного маленького параллелограмма равна $\frac{1}{m\cdot n+1}$.

● б) Решите самостоятельно.

Задача 4. Докажем методом разбиения теорему Пифагора:

$$a^2+b^2=c^2,$$

где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника.

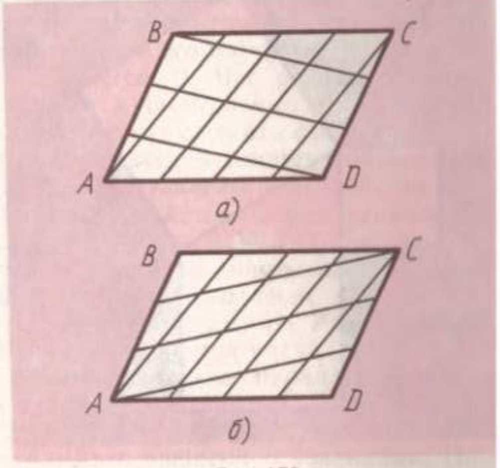


Рис. 176

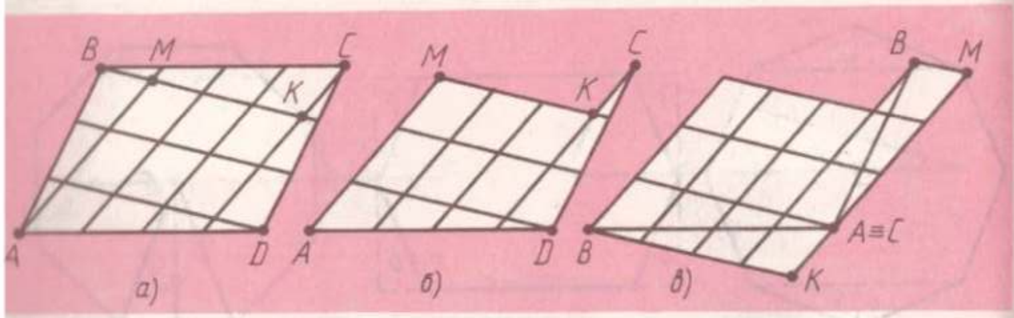


Рис. 177

Решение. Возьмем прямоугольный треугольник ABC, у которого $BC=a$, $AC=b$ и $AB=c$. Построим на сторонах $\triangle ABC$ квадраты так, как показано на рисунке 178. Имеем:

$$S_{BCKL}=a^2, \quad S_{ACMN}=b^2; \quad S_{ABEF}=c^2.$$

Нужно показать, как квадрат $ABEF$ разбить на части, из которых можно сложить квадраты $BCKL$ и $ACMN$. Два способа этого показаны на рисунке 179, *а, б*. Заметим, что на рисунке 179, *а* $PQ \parallel AB$, точка $O \in PQ$, где точка O — центр квадрата $ACMN$, $HR \perp QP$ и точка $O \in HR$.

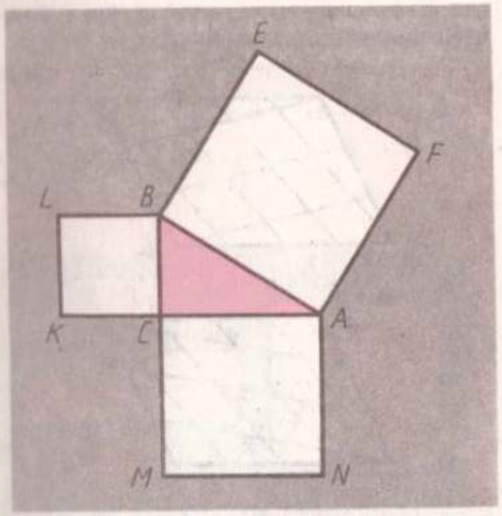


Рис. 178

Для решения этой задачи проще применить метод дополнения, при котором, вместо того чтобы разрезать две фигуры на равные части, эти фигуры дополняются равными частями до равных фигур. Например, в нашем случае для доказательства того, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, достаточно и ту и другую фигуру дополнить четырьмя равными прямоугольными треугольниками так, как показано на рисунке 180, до равных квадратов со стороной, равной $a+b$, где a и b — катеты прямоугольного треугольника.

Итак, если два многоугольника равносоставлены или равнодополняемы, то они и равновелики. Из равносоставленности следует равновеликость. Интересно, а верно ли обратное для плоских многоугольников, т. е. всякие ли два многоугольника, имеющие равные площади, равносоставлены?

Утвердительный ответ на этот вопрос дали почти одновременно в 1832—

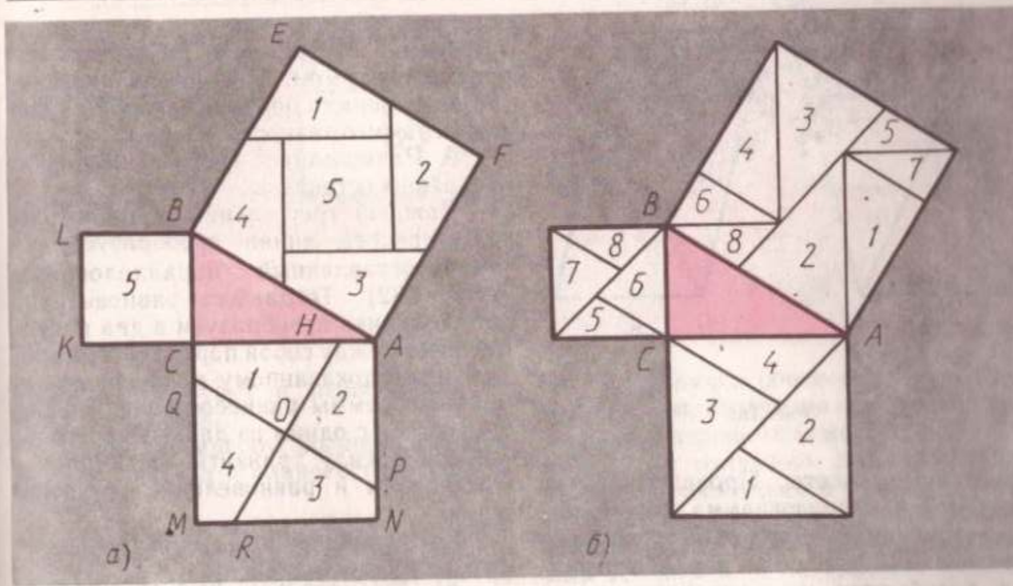


Рис. 179

1833 годах венгерский математик Фаркаш Бойяи и немецкий офицер, любитель математики Гервин. Утверждение получило название *теоремы Бойяи-Гервина.*

Прежде чем обратиться к теореме, заметим следующее: два многоугольника, равносоставленные с третьим, равносоставлены между собой.

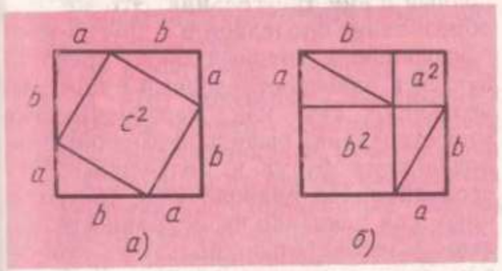


Рис. 180

Действительно, пусть два многоугольника P и Q равносоставлены порознь третьему многоугольнику R. В многоугольнике R проведем все разрезы, разбивающие его на части, из которых складывается P, и все разрезы, разбивающие его на части, из которых складывается Q. Все разрезы вместе разобьют многоугольник на части, из которых можно сложить как P, так и Q. Отсюда следует, что многоугольники P и Q равносоставлены. Это свойство называется свойством *транзитивности.*

Теорема Бойяи-Гервина. *Равновеликие многоугольники всегда также и равносоставлены.*

Доказательство. Разобьем доказательство на три части.

1. Равновеликие параллелограммы всегда равносоставлены.

Рассмотрим сначала два параллелограмма с равными основаниями. По условию они равновелики, значит, име-

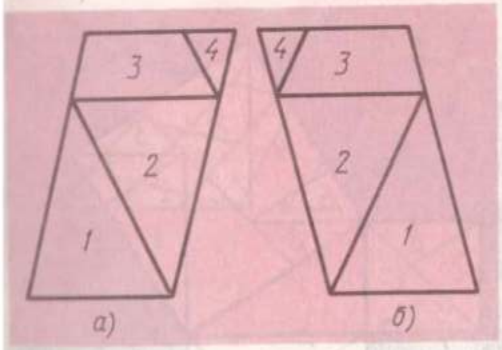


Рис. 181

ют равные высоты. Проведем внутри каждого параллелограмма параллельные сторонам другого параллелограмма прямые. Тогда оба параллелограмма разобьются на одинаковое число попарно равных треугольников (рис. 181).

Если же параллелограммы не имеют равных сторон, строим третий параллелограмм, имеющий с первым одинаковые основание и высоту. Поскольку при этом другую сторону третьего параллелограмма можно выбирать произвольно, сделаем ее равной одной из сторон второго параллелограмма. Тогда третий параллелограмм равновелик и с первым, и со вторым и с каждым параллелограммом имеет по равной стороне. Следовательно, он равносоставлен и с первым, и со вторым параллелограммом. Отсюда по свойству транзитивности первый и второй параллелограммы равносоставлены.

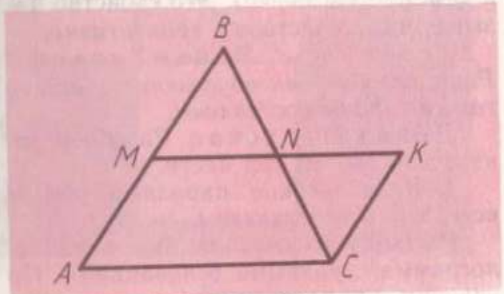


Рис. 182

2. Равновеликие треугольники всегда равносоставлены.

Каждый треугольник при проведении средней линии преобразуется в равносоставленный параллелограмм (рис. 182). Тогда два равновеликих треугольника преобразуем в два равновеликих между собой параллелограмма. Согласно доказанному полученные параллелограммы равносоставлены между собой и с одним из данных треугольников. В силу транзитивности равносоставлены и равновеликие треугольники.

3. Равновеликие многоугольники всегда равносоставлены.

Возьмем один из данных многоугольников и, перенося одну из его вершин параллельно диагонали на продолжение одной из сторон, этим самым преобразуем многоугольник в равновеликий (с числом сторон, на единицу меньшим). Имея в виду, что при этом мы один треугольник заменили другим — равновеликим, а остальная часть многоугольников осталась неизменной, получим, что прежний многоугольник будет равносоставлен с новым. Продолжая этот процесс, мы превратим данный многоугольник в равносоставленный с ним треугольник. Это же преобразование проделаем и с другим многоугольником, который также преобразуется в равносоставленный с ним треугольник. Так как первоначальные многоугольники были равновелики, равновеликими будут и полученные треугольники. Но равновеликие треугольники, как доказано выше, равносоставлены. Следовательно, пользуясь свойством транзитивности для равносоставленных фигур, получим, что равносоставленными будут и первоначальные многоугольники.

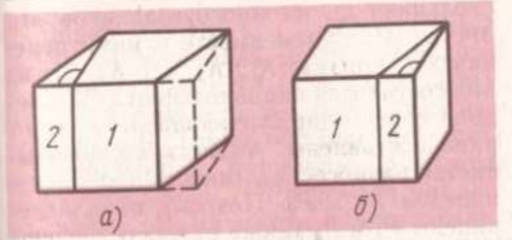


Рис. 183

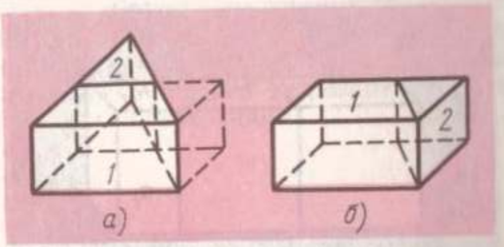


Рис. 184

Итак, для многоугольников понятия равновеликости и равносоставленности совпадают.

Естественно встает вопрос: а как обстоит дело в пространстве? Именно в ответе на этот вопрос состоит третья проблема Гильберта. Другими словами, любые ли два многогранника с равными объемами являются равносоставленными?

На этот вопрос пришлось дать отрицательный ответ. Оказывается, что методы разбиения и дополнения не могут быть применены для нахождения формулы объема пирамиды. Для вывода этой формулы необходимо применение более сложного метода исчерпывания (метода пределов).

Какова же история решения этой проблемы, из которой выросла интересная и богатая результатами теория равносоставленности?

Уже в 1901 году немецкий математик М. Ден подтвердил высказанную Гильбертом гипотезу, доказав существование многогранников, имеющих равные объемы, но не равносоставленных. В частности, куб и правильный тетраэдр одинакового объема не равносоставлены и не равнодополняемы. Существуют также и не равносоставленные тетраэдры с равными основаниями и высотами. Тем самым обосновывается необходимость привлечения неэлементарных методов в теории объемов. Доказательства Дена оказались довольно сложными для понимания и через два года, в 1903 году, были существенно усовершенствованы и упрощены отечественным геометром В. Ф. Каганом (1869—1953).

Глубокие результаты в теории равносоставленности получены известным отечественным математиком В. Г. Болтянским (род. в 1925 г.).

Итак, равносоставленность равновеликих многогранников является исключением. Приведем примеры таких исключений.

1. Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм, равносоставлена с прямоугольным параллелепипедом (рис. 183).

2. Прямая призма с треугольным основанием равносоставлена с призмой, в основании которой лежит параллелограмм (рис. 184).

3. Равновеликие прямоугольные параллелепипеды равносоставлены.

Доказательство. Пусть прямоугольные параллелепипеды P_1 и P_2 равновелики и пусть a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 — длины их ребер. Построим равновеликий им прямоугольный параллелепипед P с двумя ребрами a_1 и a_2, длина третьего ребра должна быть равна

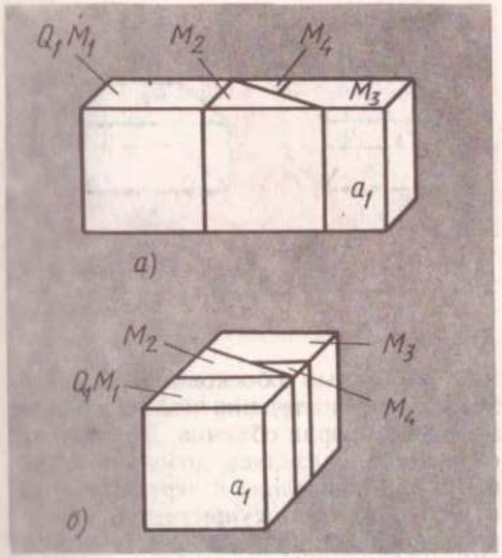


Рис. 185

$$\frac{b_1c_1}{a_2}=\frac{b_2c_2}{a_1}$$

Покажем, что каждый из параллелепипедов P_1 и P_2 равносоставлен с параллелепипедом P. Для определенности рассмотрим параллелепипеды P_1 и P. У них имеется по одному равному ребру длиной a_1. Обозначим через Q и Q_1 основания параллелепипедов P и P_1, соответственно лежащие в плоскостях, перпендикулярных к этим ребрам. Тогда прямоугольники Q и Q_1 равновелики и, следовательно, равносоставлены. Таким образом, Q_1 можно разрезать на многоугольники M_1, M_2, ..., M_n, из которых можно сложить прямоугольник Q (рис. 185). Пусть K_1, K_2, ..., K_n — прямые призмы высотой a_1, основаниями которой служат многоугольники M_1, M_2, ..., M_n. Таким образом, параллелепипед P разрезан на призмы K_1, K_2, ..., K_n. Если мы при составлении прямоугольника Q_1 из многоугольников M_1, M_2, ..., M_n будем вместе с ними передвигать призмы K_1, K_2, ..., K_n, то из них составится параллелепипед P_1. Следовательно, параллелепипеды P и P_1 равносоставлены. Аналогично доказывается равносоставленность параллелепипедов P_1 и P_2. Поэтому параллелепипеды P_1 и P_2 также равносоставлены между собой (по свойству транзитивности, доказательство которого аналогично доказательству, проведенному выше).

В пространстве по аналогии с плоскостью можно рассмотреть задачи на разрезание. В качестве примера рассмотрим следующие:

Задача 5. Разрежьте куб на три равные пирамиды.

На рисунке 186 представлено решение: пирамиды $ABCDC_1$, $AA_1B_1BC_1$ и $AA_1D_1DC_1$ равны. (● Проверьте это.)

Задача 6. Разрежьте прямую треугольную призму на три равновеликих тетраэдра.

На рисунке 187 изображена прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. Рассмотрим пирамиды $ABCC_1$, AA_1BC_1 и $A_1BB_1C_1$. $V_{AA_1BC_1}=V_{A_1BB_1C_1}$, так как пирамиды AA_1BC_1 и $A_1BB_1C_1$ имеют равные основания ($\triangle AA_1B=\triangle B_1A_1B$) и одну и ту же высоту, опущенную из вершины C_1. Но $V_{AA_1BC_1}=V_{ABCC_1}$, так как за их основания можно взять равные треугольники AA_1C_1 и ACC_1, а высота у них одна и та же, опущенная из вершины B. Таким образом, все три рассмотренные пирамиды равновелики.

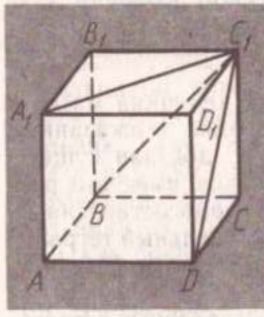


Рис. 186

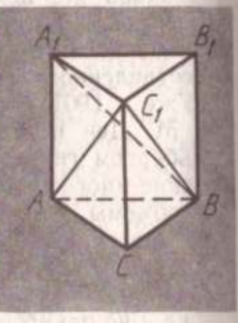


Рис. 187

Задача 7. Разрежьте параллелепипед: а) на шесть равновеликих пирамид; б) на три равновеликие пирамиды.

● Докажите, что никакой выпуклый многогранник нельзя сложить из двух или большего числа неперекрывающихся попарно различных:

а) кубов; б) правильных тетраэдров; в) правильных октаэдров; г) правильных икосаэдров; д) правильных додекаэдров.

● Составьте выпуклый многогранник из правильных тетраэдров и правильных октаэдров.

● Покажите, что единственным выпуклым многогранником, который можно сложить из правильных тетраэдров (не обязательно попарно различных является бипирамида, образовани двумя равными тетраэдрами, сложе ными основаниями.

Литература

Болтянский В. Г. Третья проблема Ги берта.— М.: Наука, 1977.

Демидов С. Проблемы Гильберта и ветская наука // Квант.—1977.— № 11.

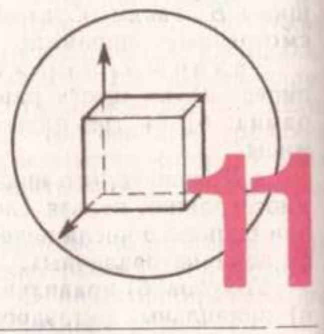
Линдгрен Г. Занимательные задачи разрезание.— М.: Мир, 1977.

Савин А. П. Задачи на разрезание Квант.—1987.— № 7.

Шклярский Д. О., Ченцов Н. Яглом И. М. Избранные задачи и теор элементарной математики.— Ч. 3. Геометр Стереометрия.— М.: Гос. изд. техн.-теорет. тературы, 1954.

Энциклопедия элементарной математики Кн. V. Геометрия.— М.: Наука, 1966.

ногогранники в линейном ограммировании



Ірким примером применения теории огранников является ее использоие в прикладной математике, в ности в линейном программирова-

Выпуклые многогранники можно товать аналитически — с помощью емы линейных неравенств. Линей- функция, рассматриваемая на та- выпуклом многограннике, достигает го наибольшего (наименьшего) ения в одной из его вершин, либо екотором ребре, либо на некоторой и. В любом случае существует вер- а (хотя бы одна), в которой до- ается это наибольшее (наимень-) значение. Найти максимум (мини-) линейной функции на многогран- можно алгебраически: найдя ко- инаты всех вершин многогранника, ислить значение рассматриваемой ейной функции во всех вершинах ыбрать среди них наибольшее (наи- ьшее) (то и будет максимум (ми- ум) рассматриваемой функции на ном многограннике).

Оказалось, что к этой задаче при- ят многие практические задачи, свя- ные с нахождением наиболее выгод- способов различных перевозок, рас- я ткани, наиболее эффективных режимов работы предприятий, задачи на составление производственных планов и другие задачи математической экономики, связанные с поиском способов оптимального распределения использования органических ресурсов. Впервые такую конкретную задачу решил отечественный математик, академик Л. В. Канторович (1912—1986). В своей книге «Математические методы организации и планирования производства» он заложил основы того, что ныне называется математической экономикой. Методы, развитые Канторовичем, положили начало новому направлению прикладной математики — линейному программированию, изучающему численные методы решения задач отыскания наибольшего и наименьшего значений линейной функции на выпуклом многограннике.

Сделаем небольшой экскурс в историю знаменитой Нобелевской премии, которая получила свое название в честь ее учредителя — известного химика и изобретателя Альфреда Нобеля. Это международная премия. Согласно завещанию Нобеля премия должна присуждаться за выдающиеся научные открытия в области физики, химии, физиологии или медицины, за литератур-

ные произведения, отражающие человеческие идеалы, а также за упрочение мира на Земле. Такой премии был удостоен, например, академик А. Д. Сахаров (1921—1989). Математикам премия не предназначалась. Однако в 1969 году Шведский банк по случаю 300-летия со дня своего образования учредил премию памяти А. Нобеля по экономическим наукам, которая была в 1975 году вручена Л. В. Канторовичу за создание новой математической теории — линейного программирования и применение этой теории к экономике.

Обычно в прикладных математических исследованиях условно выделяют следующие основные взаимно связанные этапы:

1. Математическая формулировка задачи — построение математической модели.

2. Выбор метода исследования полученной математической модели.

3. Проведение математического исследования.

4. Анализ и реальная интерпретация полученного математического результата.

Рассмотрим примеры построения математических моделей в задачах линейного программирования.

1. *Задача о диете.*

Эта задача о составлении наиболее экономного, т. е. дешевого, рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям. Предполагается, что имеется перечень из n наименований продуктов. Обозначим их $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Известно также, что эти продукты обладают некоторыми характеристиками, например наличием витаминов, минеральных веществ, жиров, белков, углеводов и т. д. Обозначим их $N_1, N_2, \ldots, N_m$. Пусть для каждого продукта F_i известно наличие в нем каждого компонента N_j. Обозначим это количество a_{ij}.

Допустим, что составлен рацион питания. Количество каждого продукта F_i, входящего в него, обозначим x_i. Тогда компонент N_j будет присутствовать в этом рационе в количестве

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n.$$

Допустим теперь, что имеются вполне определенные медицинские требования, касающиеся общего количества потребления каждого из компонентов N_j, а именно

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{nj}x_n \geqslant b_j. \quad (1)$$

Таким образом, b_j указывает минимальное количество компонента N_j в рационе.

Заметим, что, кроме неравенств (1), выполняются также неравенства

$$x_i \geqslant 0. \quad (2)$$

Пусть теперь цена продукта F_i равна c_i. Тогда стоимость всего рациона питания будет выражаться формулой

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

Таким образом, задача о диете сво- дится к нахождению минимума функ- ции F, где x_i удовлетворяют нераве- ствам (1) и (2).

2. *Транспортная задача.*

Эта задача о составлении наиболе экономного плана перевозок. Пуст имеется n пунктов $S_1, S_2, \ldots, S_n$ произ водства однородного продукта, приче объем производства в пункте S_i состав ляет a_i единиц продукта. Произведен ный продукт потребляется в пункта $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, и потребность в нем пункте Q_j составляет b_j единиц. Тр буется составить план перевозок пунктов S_i в пункты Q_j, чтобы удо летворить потребности в продуктах и минимизировать транспортные ра ходы.

Пусть стоимость перевозок одн единицы (например, тонны) продук

...кта S_i в пункт Q_j равна c_{ij}. На...вая условие линейности, будем ...ь, что при перевозке x_{ij} единиц ...кта из пункта S_i в пункт Q_j транс...ые расходы равны $c_{ij}x_{ij}$. Следова...о, общие транспортные расходы ...ят величину

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}.$$

...йдем условия, которым должны ...етворять числа x_{ij}. Поскольку из ...а S_i во все пункты Q_j вывозится ...личество произведенного продук... должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i. \qquad (1)$$

...как в каждый пункт Q_j из пунк...S_i завозится b_j единиц продукта, ...лжно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j. \qquad (2)$$

...е этого, выполняются неравенства

$$x_{ij}\geqslant 0. \qquad (3)$$

...ким образом, транспортная зада...одится к нахождению такого набо...исел x_{ij}, который удовлетворяет ...ичениям (1), (2), (3) и при кото...функция F принимает минималь...начение.

...ругими задачами линейного про...мирования являются:

Составление плана производства.

Расстановка игроков в спортив...команде.

Рациональное использование по...ых площадей.

Составление химической смеси.

...есмотря на различные содержа...ые ситуации в рассмотренных за...х, математические модели, их опи...ющие, имеют много общего. Так, в каждой из этих задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение линейной функции. При этом ограничения, наложенные на совокупность переменных, являются либо линейными неравенствами, либо линейными уравнениями.

Если число переменных равно двум или трем, то такую задачу можно решить графически. В случае двух переменных значения функции ищутся на выпуклом многоугольнике, в случае трех — на выпуклом многограннике.

Прежде чем приступить к решению конкретных задач линейного программирования, рассмотрим сначала несколько предварительных задач.

Задача 1. Дана прямоугольная система координат. Что представляет собой множество всех точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$;

б) $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$?

Решение. а) Искомым множеством является заштрихованный прямоугольник $OABC$ (рис. 188, *а*).

б) Искомым множеством является прямоугольный параллелепипед $AOBCA_1O_1B_1C_1$ (рис. 188, *б*).

Задача 2. Найдем множество точек пространства, определяемое следующей системой неравенств:

$$\left|\begin{array}{ll} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0 & (1)\\ x\leqslant 8,\ y\leqslant 8,\ z\leqslant 8 & (2)\\ x+y+z\geqslant 12. & (3)\end{array}\right.$$

Решение. Множество точек, удовлетворяющих неравенствам (1) и (2), определяет куб $AOCBA_1O_1C_1B_1$ (рис. 189). Неравенство (3) определяет полупространство, пересечение которого с названным кубом определяет фигуру $B_1BEFA_1KLC_1MN$ (рис. 189).

Задача 3. Докажем, что в пространстве координаты точек выпуклого многогранника удовлетворяют системе

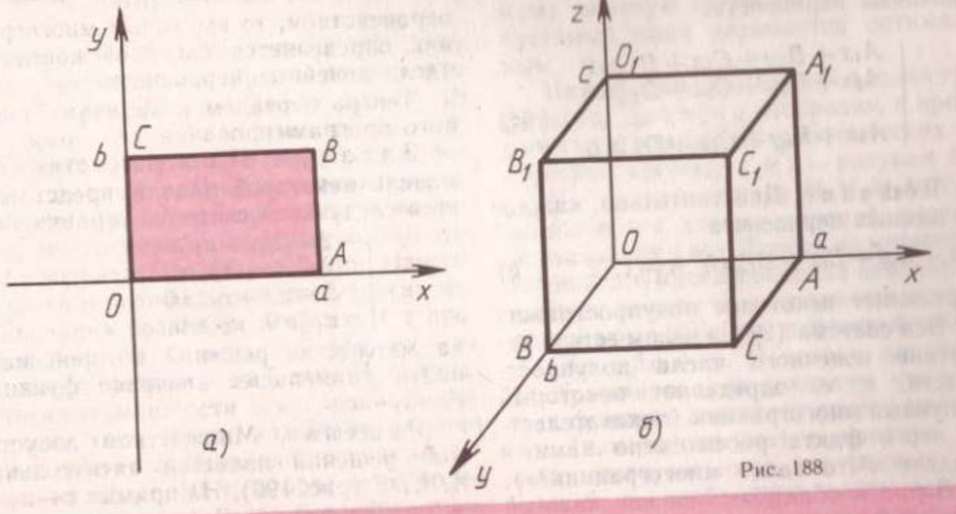


Рис. 188

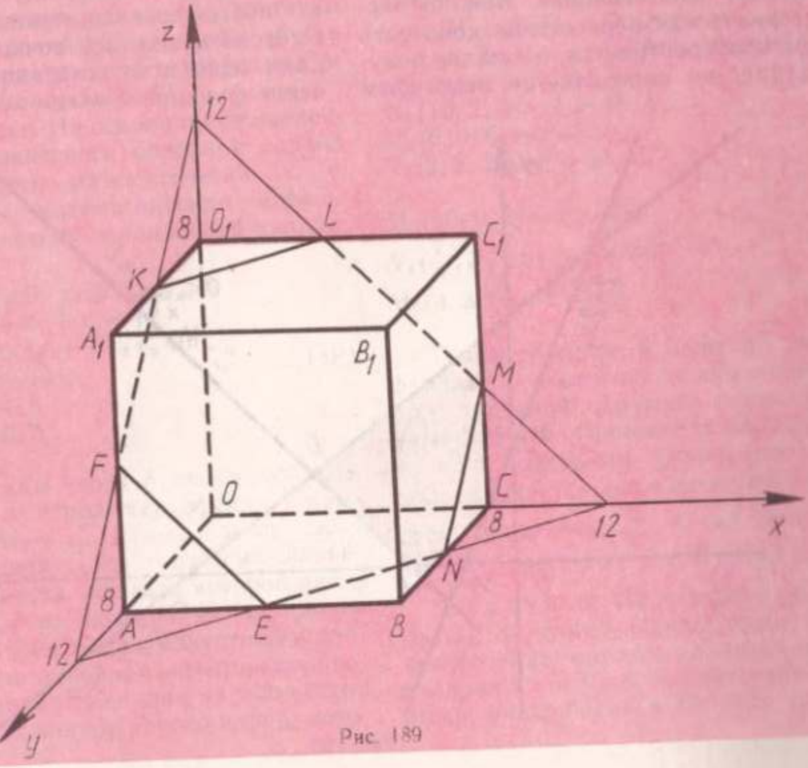


Рис. 189

‹..›йных неравенств:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1\geqslant 0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2\geqslant 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_kx+B_ky+C_kz+D_k\geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

‹..›ешение. Действительно, каждое ‹..›нных неравенств

$$‹..›B_iy+C_iz+D_i\geqslant 0 \quad (i=1,\ 2,\ \dots,\ k)$$

‹..›деляет некоторое полупространст‹..›ся система (∗) в целом есть пере‹..›ние конечного числа полупрост‹..›тв, т. е. определяет некоторый ‹..›клый многогранник (доказательст‹..›того факта рассмотрено нами в ‹..›еле «Что такое многогранник?»). ‹..›ерно и обратное: так как каждый ‹..›клый многогранник можно рас‹..›ривать как пересечение конечного ‹..› полупространств, а каждое полу‹..›гранство определяется некоторым неравенством, то выпуклый многогранник определяется системой конечного числа линейных неравенств.

Теперь перейдем к задачам линейного программирования.

Задача 4. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} -2-2x_1-x_2\geqslant 0 \\ 2-x_1+x_2\geqslant 0 \\ 5-x_1-x_2\geqslant 0 \\ x_1\geqslant 0;\ x_2\geqslant 0, \end{cases}$$

на множестве решений которой надо найти наименьшее значение функции $F=x_2-x_1$.

Решение. Множеством допустимых решений является пятиугольник $ABCDE$ (рис. 190). На прямых $c-x_1+x_2=0$ функция $F=x_2-x_1$ принимает постоянные значения, равные c. Следовательно, все точки отрезка ED дают одно и то же минимальное значение функции $F=x_2-x_1$ на множестве точек пятиугольника $ABCDE$, т. е. $F=-2$.

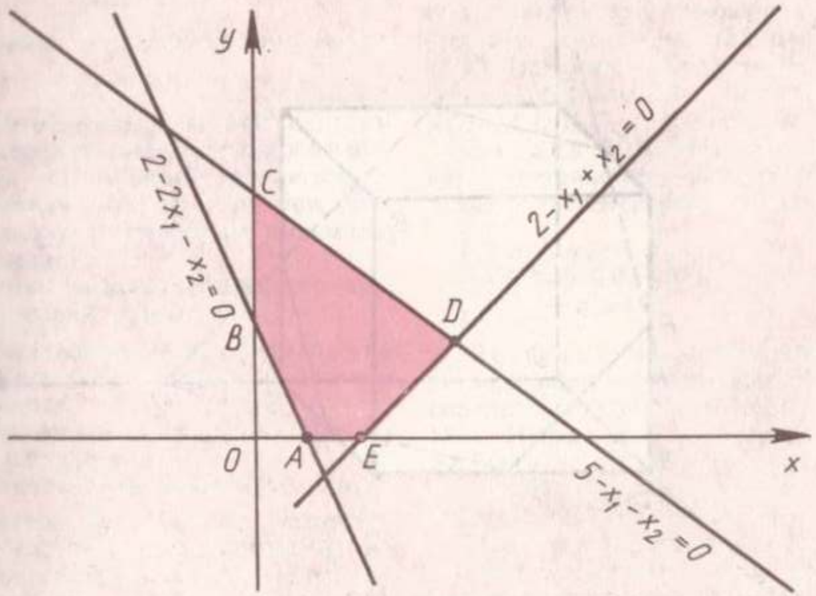


Рис. 190

Задача 5. Ежедневно в город поставляется одним видом транспорта 12 т картофеля из трех хозяйств: из первого — по цене 4 тыс. р. за 1 т, из второго — по цене 3 тыс. р., из третьего — по 1 тыс. р. Чтобы поставка картофеля в город была произведена вовремя, необходимо на погрузку требуемых 12 т затратить не более 40 мин. Известно, что в первом хозяйстве уровень механизации позволяет погрузку 1 т производить за 1 мин, во втором — за 4 мин, в третьем — за 3 мин. Производственные мощности этих хозяйств выглядят так: первое хозяйство должно ежедневно выделять для поставки в город не более 10 т, второе — не более 8 т, третье — не более 6 т картофеля. Как распределить заказы на поставки 12 т между хозяйствами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной?

Решение. На основании приведенного экономического описания задача формулируется математически, т. е. строится ее математическая модель. Составим систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \\ x_1+x_2+x_3=12 \\ x_1+4x_2+3x_3\leqslant 40 \\ x_1\leqslant 10 \\ x_2\leqslant 8 \\ x_3\leqslant 6. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим через F стоимость привозимого в город картофеля. Имеем $F=4x_1+3x_2+x_3$. F называется целевой функцией. (∗) — система линейных неравенств, решение которой является одним из возможных вариантов решения и называется допустимым планом. Задача линейного программирования состоит в отыскании из множества допустимых планов такого плана, который обращал бы в минимум (или макси‹..›мум) целевую функцию F. Такой до‹..›пустимый план называется оптималь‹..›ным.

Найдем решение данной задачи гра‹..›фически. Для этого изобразим в прост‹..›ранстве с помощью геометрических по‹..›строений систему (∗) — рисунок 19‹..›

На шестиугольнике $M_1M_2M_3N_4N_5M‹..›$ выполняется восемь условий систем‹..› ограничений (∗). Теперь из множеств‹..› точек этого многоугольника необходим‹..› выбрать только те, координаты которы‹..› обращают в минимум целевую функци‹..› $F=4x_1+3x_2+x_3$. В теории линейно‹..› программирования доказано, что цел‹..›вая функция достигает своего миним‹..›ма (или максимума) в крайних то‹..›ках многоугольника допустимых пл‹..›нов, т. е. необходимо найти коорд‹..›наты всех вершин многоугольни‹..› $M_1M_2M_3N_4N_5M_6$, подставить в $F‹..›=4x_1+3x_2+x$ и найти минимально‹..› значение F. Итак,

$M_1(10,2,0)\Rightarrow F=46$,
$M_3(6,0,6)\Rightarrow F=30$,
$N_5(2,8,2)\Rightarrow F=34$,

$M_2(10,0,2)\Rightarrow F=42$,
$N_4(\frac{2}{3},5\frac{1}{3},6)\Rightarrow F=24\frac{2}{3}$,
$M_6(4,8,0)\Rightarrow F=40$.

Таким образом, в точке N_4 целе‹..› функция F достигает своего минима‹..›ного значения. Другими словами, ‹..›нимум общей стоимости транспортир‹..›ки 12 т картофеля, привозимого в ‹..›род, получается, если из первого хоз‹..›ства привозить $\frac{2}{3}$ т, из второго ‹..› $5\frac{1}{3}$ т, из третьего — 6 т. Задача реш‹..›

Задача 6. На четыре завода ‹..› $З_2$, $З_3$, $З_4$ нужно завезти сырье од‹..›кового вида, которое хранится на ‹..› складах $С_1$ и $С_2$ в соответствии с ‹..›ными, указанными в таблице (с. 1‹..›

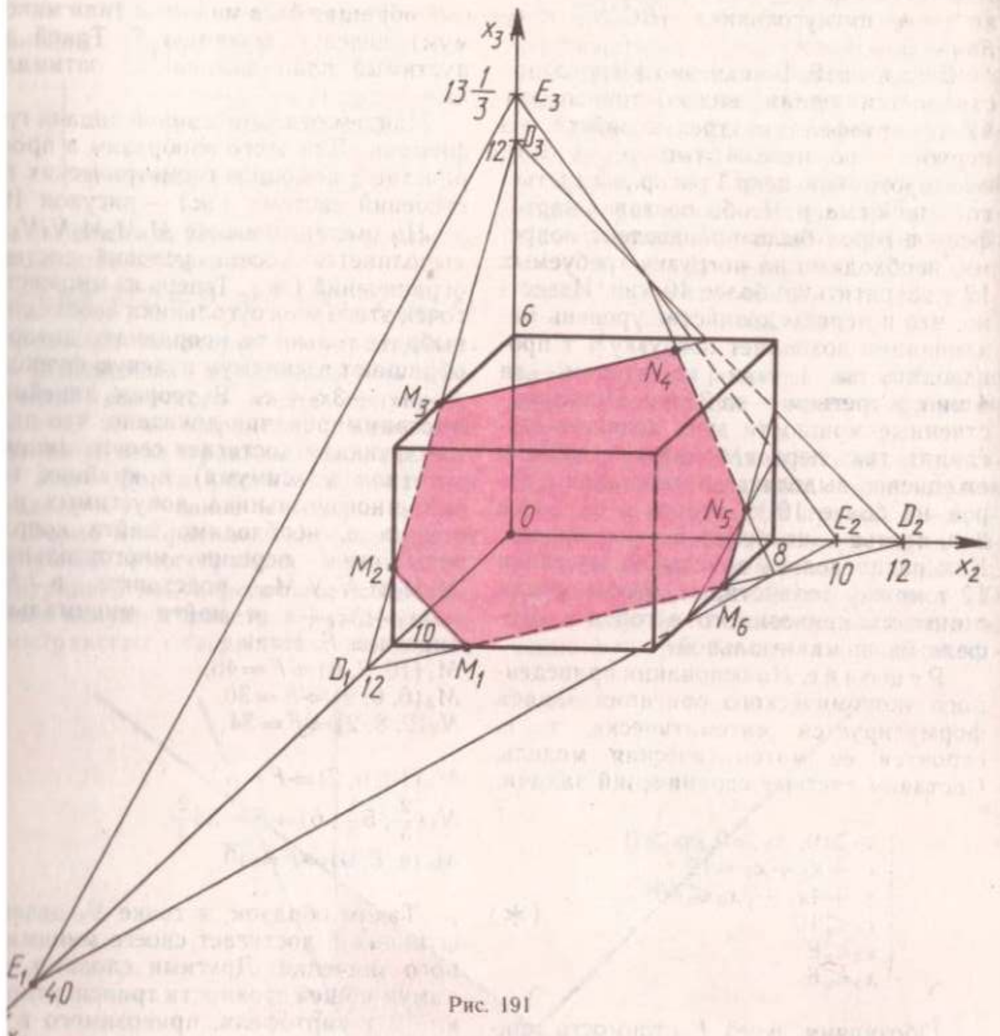


Рис. 191

Таблица 1

Наличие сырья, т		Потребность в сырье, т			
C_1	C_2	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Расстояние (в км) до заводов указано в следующей таблице:

Таблица 2

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1	5	6	4	10
C_2	3	7	3	7

Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. вариант, для которого общее число тонно-километров будет наименьшим.

Таблица 3

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
C_1, т	x	y	z	$20-x-y-z$
C_2, т	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Замечая, что все величины, находящиеся в таблице, должны быть неотрицательными, получаем следующие неравенства:

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0 & (1)\\ 20-x-y-z\geqslant 0 & (2)\\ 8-x\geqslant 0 & (3)\\ 10-y\geqslant 0 & (4)\\ 12-z\geqslant 0 & (5)\\ x+y+z-5\geqslant 0. & (6)\end{cases} \qquad (\ast)$$

Система $(\ast)$ определяет многогранник $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$, изображенный на рисунке 192.

Учитывая данные таблиц, находим общее число тонно-километров: $5x+6y+4z+10(20-x-y-z)+$ $+3(8-x)+7(10-y)+3(12-z)+$ $+7(x+y+z-5)=$ $=-x-4y-2z+295.$

2-й этап — решение задачи внутри модели.

Решим задачу геометрическим методом. Система $(\ast)$ определяет многогранник $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$, изображенный на рисунке 192, так как из условия (1) следует, что область решения задачи заключается между положительными осями координат Ox, Oy, Oz. Условия (3), (4), (5) ограничивают множество возможных решений задачи прямоугольным параллелепипедом $ABCOA_1B_1C_1O_1$.

Уравнение $x+y+z=20$ определяет плоскость $(D_1D_2D_3)$.

Уравнение $x+y+z=5$ определяет плоскость $(E_1E_2E_3)$.

Пересечением плоскости $(D_1D_2D_3)$ с прямоугольным параллелепипедом $ABCOA_1B_1C_1O_1$ будет многоугольник $M_1M_2M_3C_1$.

$(E_1E_2E_3)$ лежит внутри прямоугольного параллелепипеда. Таким образом на многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_2E_1E_3O_1$ будут выполняться все условия $(\ast)$. Целевая функция $F=-x-4y-2z+295$ достигает своего наименьшего значения в вершинах этого многогранника, т. е. необходимо найти координаты всех вершин и вычислить соответствующие значения.

Представим все этапы решения прикладной задачи.

1-й этап — составление математической модели задачи, т. е. перевод представленной задачи на язык подходящей для решения теории.

Обозначим через x, y, z количество сырья, которое нужно перевезти со склада C_1 на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$. Тогда на основании имеющихся данных можно составить таблицу:

Непосредственный подсчет показывает, что искомой вершиной является точка $M_2(0;\ 10;\ 10)$, в которой целевая функция F принимает наименьшее значение, равное 235.

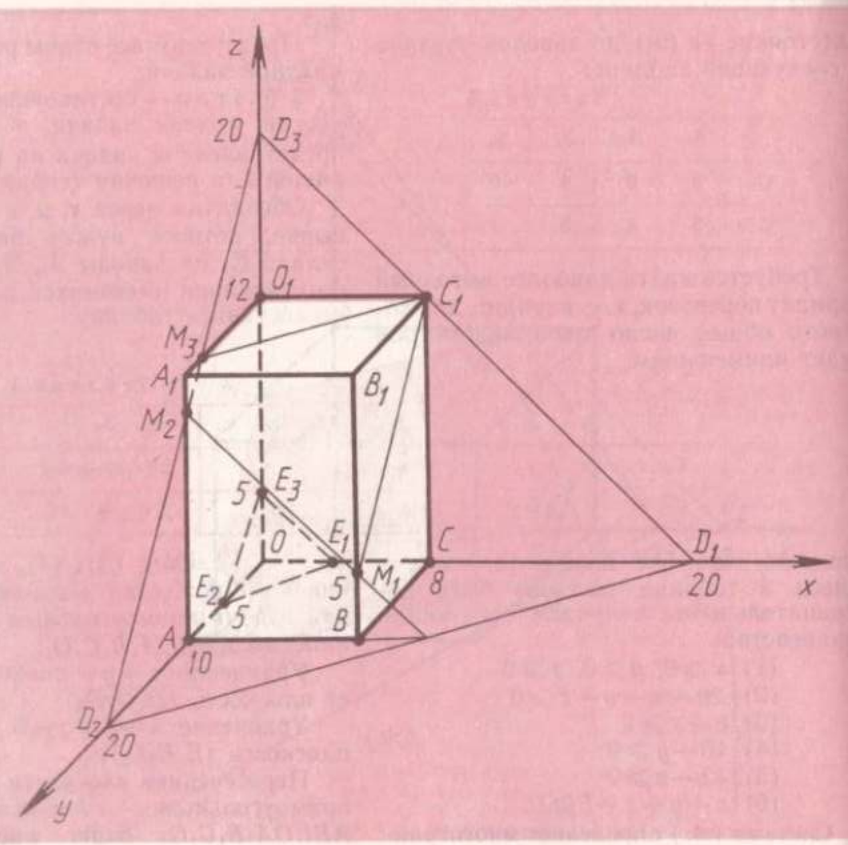


Рис. 192

3-й этап — интерпретация математического решения, т. е. перевод результата математического решения исходной задачи.

Наиболее выгодный вариант перевозок задается следующей таблицей:

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$, т	0	10	10	0
$С_2$, т	8	0	2	15

Задачи

7. Найдите координаты вершин выпуклого многогранника, определяемого системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\leqslant 4 \\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \\ x_3\geqslant 0. \end{cases}$$

Изобразите этот многогранник.

8. В швейном цехе имеется 84 м ткани. На пошив одного халата требуется 4 м ткани, а на одну куртку — 3 м.

Сколько следует изготовить халатов и курток для получения наибольшей прибыли от реализации продукции, если халат стоит 3 тыс. р., а куртка — 15 тыс. р., причем халатов можно изготовить не более 15, а курток — не более 20? Требуется записать условие задачи в виде таблицы и построить математическую модель.

Если число n переменных в задаче будет превосходить три, т. е. $n\geqslant 4$, то для получения геометрической интерпретации потребуется четырехмерное, пятимерное и т. д. n-мерное пространство. Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств любой размерности n, которые изучаются в специальном разделе математики, называемом многомерной геометрией.

Литература

Ашманов С. А. Линейное программирование.— М.: Наука, 1981.

Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи: Пособие для учащихся VIII—X классов.— М.: Просвещение, 1977.

Болтянский В. Г. Элементарная геометрия.— М.: Просвещение, 1985.

Волков В. А. Элементы линейного программирования.— М.: Просвещение, 1975.

Тихомиров В. М. 50 лет линейному программированию // Квант.—1989.— № 6.

Кристаллы — природные многогранники

В предыдущих параграфах мы познакомились с удивительно красивыми формами многогранников, многие из которых придумал не человек, а природа. И создала она их в виде кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды. Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба или даже кубооктаэдра. Исландский шпат имеет форму косого параллелепипеда, гранит — ромбододекаэдра, а снежинки всегда шестилучевые звездочки.

Удивительное сходство кристаллов льда и горного хрусталя было подмечено уже очень давно. В древности и в средние века думали, что кристаллы горного хрусталя и кристаллы льда — одно и то же, только лед замерзает у нас на глазах, а горный хрусталь — лишь при особенно сильном морозе. Само слово «кристалл» происходит от греческого «крюсталлос», т. е. лед.

В древности кристаллам приписывали всякие необыкновенные свойства. Считали, например, что кристалл аметиста предохраняет от пьянства и навевает счастливые сны, изумруд спасает мореплавателей от бурь, сапфир помогает при укусах скорпионов, алмаз бережет от болезней, топаз приносит счастье в ноябре, а гранат — в январе и т. д. Конечно, раньше при слабом уровне развития науки невозможно было понять, как возникли кристаллы, почему они имеют форму многогранников.

Внешняя форма — это лишь проявление внутренних физических и химических свойств кристаллов. С некоторыми из них вы познакомились или познакомитесь на уроках физики и химии.

Все эти свойства кристаллов объясняются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Первые, еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества.

Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены в середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены законы симметрии, которым подчинены атомные постройки в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов является выдающийся русский математик и кристаллограф Евграф Степанович Федоров (1853—1919).

Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — в каждую из этих областей внес Федоров немалый вклад. С детских лет Федоров увлекался точными науками. В пять лет он хорошо знал арифметику, а в семь лет «для удовольствия» за два дня изучил учебник геометрии. Сын военного инженера и сам в молодости военный инженер, он оставил военную службу, чтобы целиком отдаться науке. Он снова поступил учиться, сначала в Военно-медицинскую академию, затем закончил Химико-технологический институт, наконец, в 27 лет поступил в Петербургский горный институт.

В 1890 году Е. С. Федоров строго математически вывел все возможные геометрические законы сочетания элементов симметрии в кристаллических структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри кристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Федоров показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, которые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был исполинский труд, пред-
принятый за 10 лет до открытия ре
геновских лучей, за 27 лет до то
как с их помощью доказали сущест
вание самой кристаллической решет
Существование 230 федоровских гру
является одним из важнейших г
метрических законов современ
структурной кристаллографии. «Гига
ский научный подвиг Е. С. Федоро
сумевшего подвести под единую геом
рическую схему весь природный «ха
бесчисленных кристаллообразований
сейчас вызывает восхищение. «Царс
кристаллов» является незыблемым
мятником и конечной вершиной клас
ческой федоровской кристаллографии»
сказал академик А. В. Шубников.

Федоров установил, что крас
внешних форм кристаллов подчиняет
простым и строгим законам симметр
Многие многогранники, прежде вс
правильные, полуправильные, прави
ные звездчатые и др., по образн
выражению Федорова, «буквально б
щут симметрией».

К понятию симметрии мы привы
с детства. Мы очень хорошо предст
ляем, что симметричны бабочки, леп
ки цветов, ножницы, дома, узоры ор
мента, звездочки снежинок. На снеж
ках, кстати, легче всего убедитьс
том, что кристаллы обычно имеют п
вильную и симметричную форму. Е
конечно разнообразны формы сне
нок, но вы не найдете ни одной п
одинаковых.

Какие же элементы симметрии
знаете?

Симметрия фигуры, в частно
многогранника,— это свойство, сос
щее в том, что существует его пер
щение, совмещающее многогранни
самим собой. Такое перемещение
зывается преобразованием симмет
многогранника или его элементом
метрии. Рассмотрим наиболее про
элементы симметрии многогранни

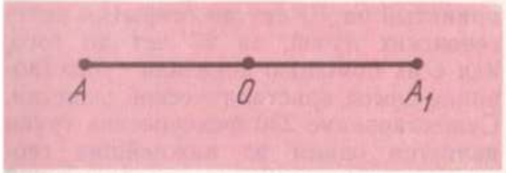


Рис. 193

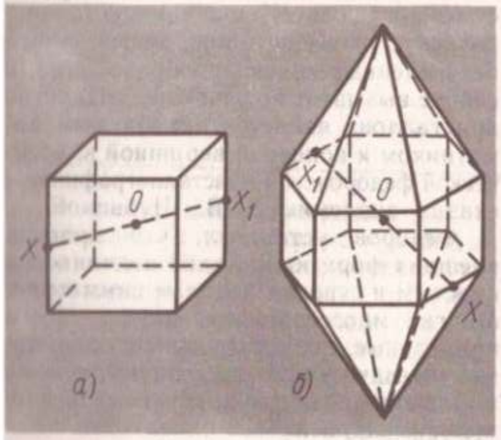


Рис. 194

центр симметрии, плоскости симметрии и оси симметрии.

Центр симметрии

1. Точка A и A_1 симметричны относительно точки O (рис. 193).

2. Точка O называется *центром симметрии* многогранника, если каждая точка X многогранника симметрична относительно точки O некоторой точке X_1 этого многогранника. На рисунке 194, *а* точка O — центр симметрии куба. На рисунке 194, *б* точка O — центр симметрии многогранника, форму которого может принимать кристалл горного хрусталя.

Плоскость симметрии

1. Точки A и A_1 симметричны относительно плоскости α (рис. 195).

2. Плоскость называется *плоскостью симметрии* многогранника, если каждая точка X многогранника симметрична относительно данной плоскости некоторой точке X_1 этого же многогранника. На рисунке 196, *а* изображена одна из плоскостей симметрии куба, на рисунке 196, *б* — плоскость симметрии кристалла горного хрусталя.

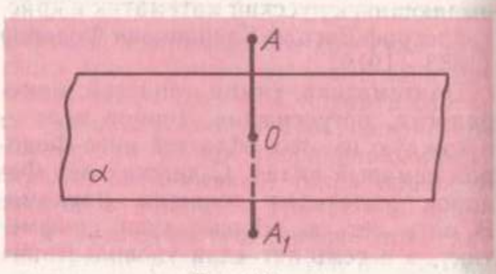


Рис. 195

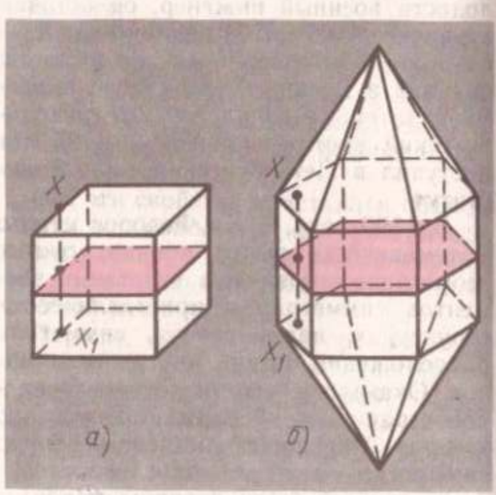


Рис. 196

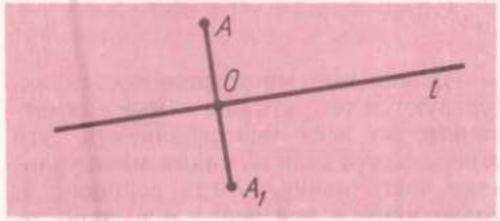


Рис. 197

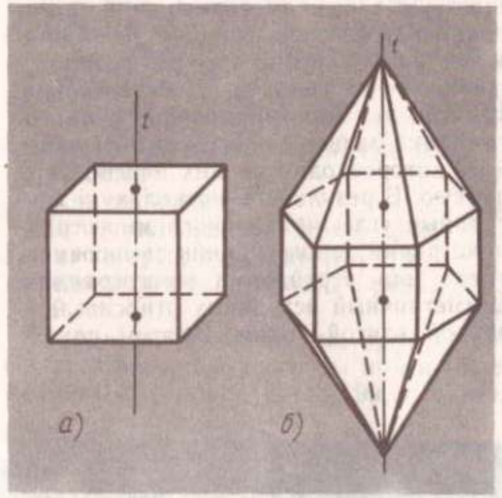


Рис. 198

Ось симметрии

1. Точки A и A_1 симметричны относительно оси l (рис. 197).

2. Прямая называется *осью симметрии* многогранника, если каждая точка X многогранника симметрична относительно оси l некоторой точке X_1 этого многогранника. На рисунке 198, *а* изображена одна из осей симметрии куба, на рисунке 198, *б* — ось симметрии кристалла горного хрусталя.

Оси симметрии высших порядков

Поворот вокруг прямой. Предст ление о повороте в пространстве д любой вращающийся предмет, нап мер дверь, пропеллер, вал турбины, рот колодца. Поворот задается ос углом и направлением поворота. I воротом фигуры вокруг прямой l угол φ называется такое отображен при котором в каждой плоскости, п пендикулярной прямой l, происхо, поворот вокруг точки ее пересечен с прямой l на один и тот же угол в одном и том же направлении. П мая l называется *осью поворота,* угол φ — *углом поворота.*

Частным случаем поворота вок прямой является поворот на 180°. Г повороте на 180° вокруг прямой l ка дая точка A переходит в такую т ку A_1, что $AA_1 \perp l$ и $AO = OA_1$. Так образом, поворот на 180° вокруг п мой является также симметрией от сительно этой прямой.

Следовательно, если многогран имеет ось симметрии, то он совмеща ся с самим собой при повороте вок этой оси на 180°. Такая ось симм рии называется *осью симметрии 2 порядка,* так как при полном повор вокруг этой оси многогранник бу дважды в процессе поворота приним положение, совпадающее с исходи Возможны случаи, когда многогран приходит в совмещение с исходи положением после поворота вокруг которой оси на угол, меньший 18 Таким образом, когда многогран сделает полный оборот вокруг этой о он несколько раз совместится со сво исходным положением. Такая ось зывается *осью симметрии высшего рядка.* Порядком оси симметрии на вается число положений многогран ка, совпадающих с его исходным.

ример, на рисунке 198, *а* изображена сь симметрии куба 4-го порядка, на исунке 198, *б* — ось симметрии 6-го орядка.

Зеркальный поворот. Если многоранник переходит сам в себя в реультате композиции, т. е. последоваельного выполнения двух преобразоаний — поворота вокруг оси l на угол $=\frac{\pi}{n}$ и симметрию относительно плосости α, перпендикулярной оси повоота, то говорят, что многогранник обадает симметрией поворотного отраения, а прямая l называется *зеркальо-поворотной осью 2n-го порядка.*

● Теперь попытайтесь ответить на ледующие вопросы:

В результате каких перемещений пеходит в себя правильная пирамида:) четырехугольная; б) n-угольная?

Симметрия правильных многогранников

Правильные многогранники характеризуются тем, что они самые симметричные из всех многогранников. Это означает, что если на таком многограннике взять какую-нибудь вершину A, подходящее к ней ребро a и грань α, подходящую к этому ребру, и еще любой такой же набор A_1, a_1, α_1, то существует такое самосовмещение многогранника, которое вершину A отображает на A_1, ребро a — на ребро a_1, грань α — на грань α_1. Действительно, так как две грани правильного многогранника равны, существует перемещение, которое одну из них переводит в другую. В результате, поскольку и двугранные углы правильного многогранника равны, многогранник самосовместится или перейдет в многогранник, симметричный исходному относительно второй взятой грани. В этом случае

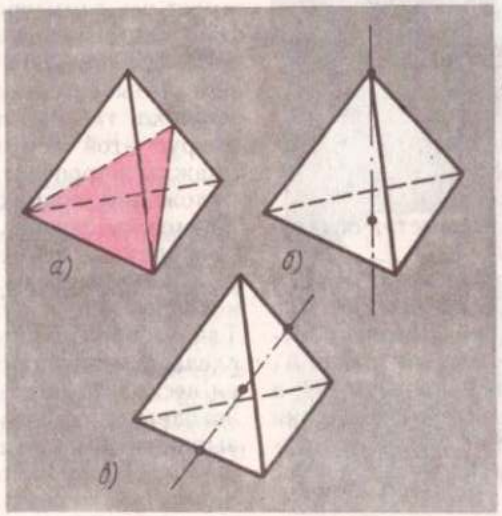


Рис. 199

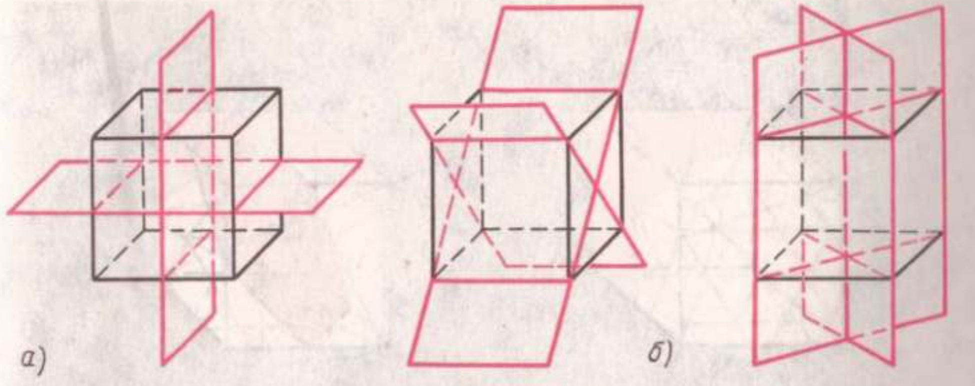


Рис. 200

необходимо рассмотреть отражение от этой плоскости.

Тетраэдр имеет:

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра (рис. 199, *а*).

2. Четыре оси 3-го порядка, проходящие через вершины и центры противоположных им граней (рис. 199, *б*).

3. Три зеркальные оси 4-го порядка, проходящие через середины противоположных ребер (рис. 199, *в*).

Куб имеет:

1. Центр симметрии — центр куба.

2. Три плоскости симметрии, перпендикулярные ребрам в их серединах (рис. 200, *а*); шесть плоскостей симметрии, проходящих через противоположные ребра (рис. 200, *б*).

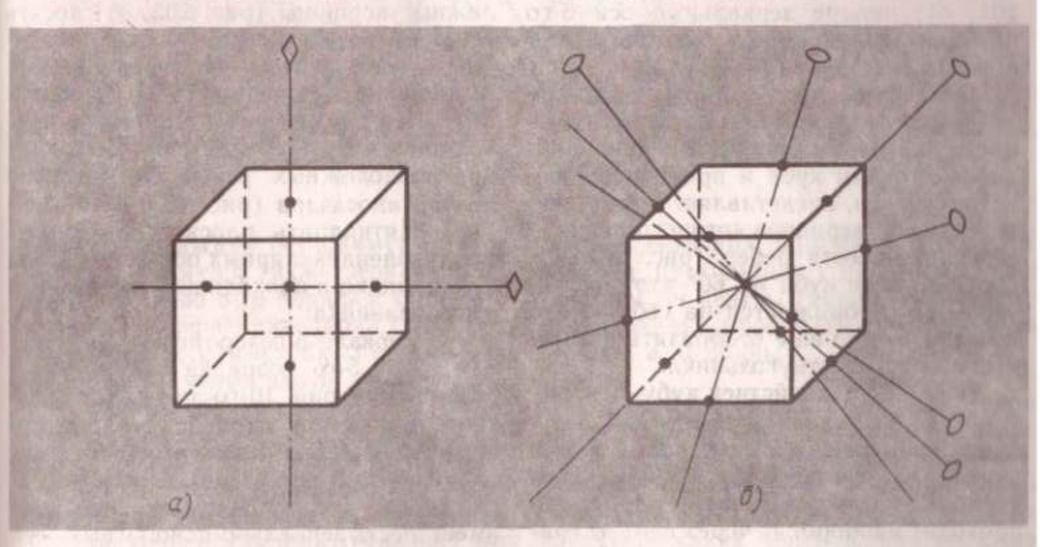


Рис. 201

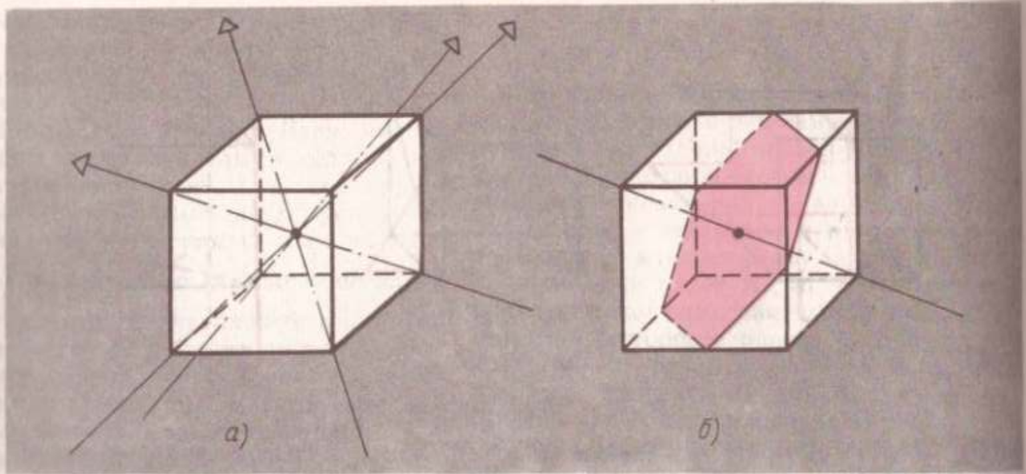


Рис. 202

3. Три оси симметрии 4-го порядка, проходящие через центры граней (рис. 201, *а*); шесть осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины противоположных ребер — (рис. 201, *б*); четыре зеркальные оси 6-го порядка, проходящие через противоположные вершины (рис. 202, *а*).

Последний вид симметрии можно представить следующим образом. Сечение куба плоскостью, перпендикулярной диагонали куба и проходящей через его центр, представляет собой шестиугольник, вершины которого лежат в серединах шести ребер (рис. 202, *б*). При повороте куба на 60° этот шестиугольник отображается на себя, а куб в целом нужно ещё отобразить в плоскости этого шестиугольника.

Октаэдр двойствен кубу, поэтому у него те же элементы симметрии, с той лишь разницей, что плоскости и оси симметрии, проходящие у куба через вершины и центры граней, у октаэдра проходят наоборот — через центры граней и вершины.

Икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.
2. Шесть осей симметрии 5-го порядка, проходящих через противоположные вершины (рис. 203, *а*); десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней икосаэдра (рис. 203); пятнадцать осей симметрии 2-го порядка, проходящих через середины каждых двух противоположных ребер симметрично центра икосаэдра (рис. 203, *в*).
3. Пятнадцать плоскостей симметрии, перпендикулярных осям симметрии 2-го порядка и проходящих через центр многогранника.
4. Зеркально-поворотные оси — каждая ось 5-го порядка является и осью симметрии 10-го порядка, плоскость отражения перпендикулярна соответствующей оси симметрии 5-го порядка и проходит через центр многогранника. Таким образом, икосаэдр имеет шесть зеркально-поворотных осей 10-го порядка.

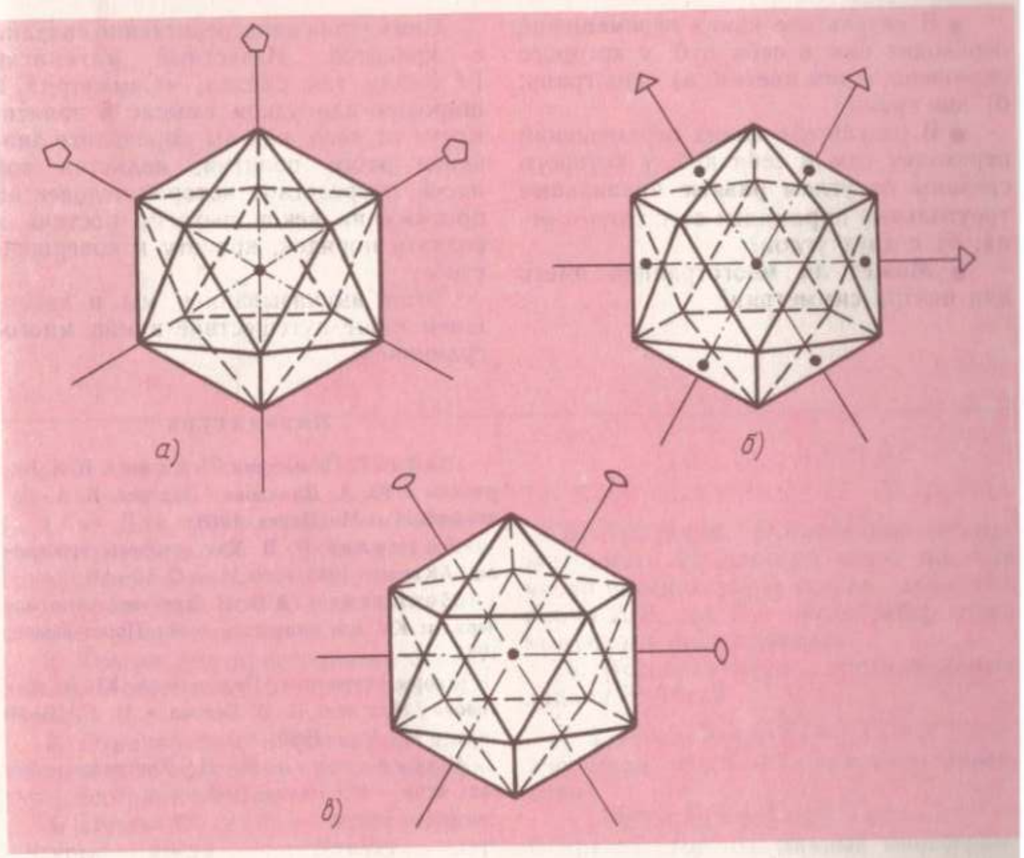


Рис. 203

Далее, каждая ось симметрии 3-го порядка является также зеркально-поворотной осью 6-го порядка, плоскость отражения перпендикулярна соответствующей оси симметрии 3-го порядка и проходит через центр многогранника. Таким образом, икосаэдр имеет еще десять зеркально-поворотных осей 6-го порядка.

Додекаэдр двойствен икосаэдру, поэтому у него те же элементы симметрии, только, как и в случае рассмотрения двойственных многогранников — куба и октаэдра, плоскости и оси симметрии, проходящие у икосаэдра через вершины и центры граней, у додекаэдра проходят наоборот — через центры граней и вершины.

● В правильном тетраэдре закрасили одну грань. В результате каких перемещений он самосовместится?

● В правильном тетраэдре закрасили две грани одним цветом. В результате каких перемещений он самосовместится?

● В результате каких перемещений переходит сам в себя куб, у которого окрашена одним цветом: а) одна грань; б) две грани?

● В результате каких перемещений переходит сам в себя куб, у которого срезаны по углам равные правильные треугольные пирамиды: а) с одного угла; б) с двух углов?

● Может ли многогранник иметь два центра симметрии?

Симметрия непосредственно связана с красотой. Известный математик Г. Вейль так сказал: «Симметрия в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия, является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство».

Этим высказыванием мы и завершаем наше путешествие в мир многогранников.

Литература

Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова / Под ред. Б. А. Розенфельда.— М.: Наука, 1968.

Галиулин Р. В. Как устроены кристаллы // Квант.—1983.— № 11.— С. 10—16.

Соболевский В. И. Замечательные минералы: Кн. для учащихся.— М.: Просвещение, 1983.

Узоры симметрии: Пер. с англ. Ю. А. Данилова / Под ред. Н. В. Белова и Н. Н. Шефталя.— М.: Мир, 1980.

Шаскольская М. П. Кристаллы.—2-е изд., испр.— М.: Наука, 1985.

Ответы и указания

ЧТО ТАКОЕ МНОГОГРАННИК?

1. а) Для шара граничными будут точки его сферы; б) у сферы все точки граничные; в) плоскость состоит только из граничных точек; г) в пространстве нет граничных точек.

2. Только для пространства $\Phi=\bar{\Phi}$, для всех остальных фигур из задачи 1 $\Phi\neq\bar{\Phi}$.

3. Ограниченными фигурами являются шар и сфера, все остальные фигуры неограниченные.

4. Пусть Φ_1 и Φ_2 — ограниченные фигуры, тогда существует шар $V_1(O_1;\ R_1)$, такой, что $\Phi_1\subset V_1$, и существует шар $V_2(O_2;\ R_2)$, такой, что $\Phi_2\subset V_2$. Тогда фигура $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2$, например, содержится в шаре с центром в точке O_1 и радиусом, равным

$$R_1+R_2+|O_1O_2|$$

и, следовательно, является ограниченной.

5. Шар, сфера, плоскость являются замкнутыми фигурами.

6. Все фигуры, кроме сферы, являются связными, при этом любые две точки шара, плоскости и пространства можно соединить отрезком, целиком в них лежащим.

7. Только шар является телом.

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР И ЕГО ЗНАМЕНИТАЯ ТЕОРЕМ

5. Выпуклый многогранник не м жет иметь 21 плоский угол, так ка число плоских углов всегда четно, он равно $2\cdot P$, где P — число ребер этог выпуклого многогранника.

6. Воспользуемся обозначениям задачи 3. Тогда

$$2\cdot P=3\cdot Г_3+4\cdot Г_4+5\cdot Г_5+\ldots .$$

Учитывая, что $P=7$, получаем равен ство

$$14=3\cdot Г_3+4\cdot Г_4+5\cdot Г_5+\ldots .$$

С другой стороны, данный многогран ник не может иметь грани с чи слом сторон, большим четырех, та как в этом случае он содержал бы бо лее семи ребер. Следовательно, $Г_4=Г_5=\ldots=0$, и мы имеем равенств $14=3\cdot Г_3$, которое не выполняется н при одном значении $Г_3$. Таким образом многогранника с семью ребрами не су ществует.

7. а) $P=12,\ n=3;\ Г=\frac{2\cdot P}{n}$, $Г=\frac{2\cdot 12}{3}=8;\ В=2+P-Г,\ В=2+12-8=6$. Итак, $Г=8,\ В=6,\ P=12$. Многогранник, например правильны октаэдр;

б) $P=15$, $n=3$; $\Gamma=\frac{2\cdot 15}{3}=10$; $B=2+15-10=7$.

Итак, $\Gamma=10$, $B=7$, $P=15$. Многогранник, например пятиугольная бипирамида.

8. а) $P=12$, $m=3$; $B=\frac{2\cdot P}{m}$, $B=\frac{2\cdot 12}{3}=8$; $\Gamma=2+P-B$, $\Gamma=2+12-8=6$. Итак, $\Gamma=6$, $B=8$, $P=12$. Многогранник, например куб;

б) $P=15$, $m=3$; $B=\frac{2\cdot 15}{3}=10$; $\Gamma=2+15-10=7$.

Итак, $\Gamma=7$, $B=10$, $P=15$. Многогранник, например пятиугольная призма.

ПРОБЛЕМА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК, ПРОГУЛКИ ПО ТРОПИНКАМ И МОСТАМ

7. Графы, изображенные на рисунке 60, *а, б, г, д*, можно обвести «одним росчерком», на рисунке 60, *в, е* — нельзя.

10. Доказательство будем проводить методом математической индукции по n, где n — число стран, изображенных на карте. Если карта состоит из одной страны, то, очевидно, для ее раскраски требуется одна краска. Предположим, что мы доказали, что любую карту на плоскости, все вершины которой имеют четные индексы и состоящую не более чем из n стран, можно раскрасить двумя красками. Рассмотрим карту, состоящую из $(n+1)$ страны, и удалим из нее какую-нибудь страну вместе с ее границей. Получим карту, состоящую из меньшего количества стран, которую по предположению можно раскрасить в два цвета. При этом удаленная страна тоже будет раскрашена в какой-нибудь из этих двух цветов. Поменяем теперь раскраску этой страны на другой цвет. В результате получим искомую раскраску карты из $(n+1)$ страны в два цвета.

11. Художнику достаточно четырех красок, чтобы раскрасить картину, изображенную на рисунке 73, так, чтобы области, имеющие общую границу, не были окрашены в один цвет. При этом одной краской можно закрасить верхнюю часть картины и правый центральный прямоугольник. Остальные три краски распределить уже нетрудно.

«ИДЕАЛЬНЫЕ», «КОСМИЧЕСКИЕ» ФИГУРЫ — ТЕЛА ПЛАТОНА

6. См. решение задачи 2 (с. 67).

7. Трехмерный крест, изображенный на рисунке 102, не является правильным звездчатым многогранником, так как его нельзя получить ни из одного правильного выпуклого многогранника продолжением ребер или граней до пересечения. Поверхность креста состоит из 30 квадратов. Он имеет 60 ребер, 32 вершины и 24 трехгранных угла.

8. $R=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{49+21\sqrt{5}}{2}}$,

$r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$,

$d=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{2}}$, где R — радиус описанной сферы, r — радиус вписанной сферы, d — радиус сферы, касающейся всех ребер правильного додекаэдра. Указание: проведите сечение через два параллельных ребра додекаэдра, назовем их AB и CD (каждое ребро правильного додекаэдра имеет единственное параллельное ему ребро). Это сечение пройдет через середины еще одной пары параллельных ребер, назовем их точки E и F. В сечении получится шестиугольник $ABEDCF$, диагонали которого пересекаются в одной точке O — центре додекаэдра, который является центром искомых сфер. Возьмите точки M и N — середины соответственно отрезков AB и CD. Отрезок MN пройдет через точку O. Рассмотрите трапецию $AMOF$. Из вершины A и вершины O опустите перпендикуляры AH и OO_1 соответственно на стороны трапеции OF и AF. Тогда $|OO_1|=r$; $|AM|=|HO|=\frac{a}{2}$; $|OM|=|AH|=d$; $|OA|=R$. Рассмотрите соответствующие треугольники и, произведя необходимые вычисления, получите указанные результаты.

9. а) Рассмотрите четырехугольник, в котором лежат данные ребра октаэдра. Этот четырехугольник будет параллелограммом (даже ромбом), так как у него противоположные стороны попарно равны; б) примените признак параллельности двух плоскостей.

10. $h=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где h — кратчайшее расстояние между скрещивающимися диагоналями двух смежных граней куба.

11. См. соответствующую таблицу в разделе «Паркеты из правильных многоугольников».

ТЕЛА АРХИМЕДА И КЕПЛЕРА — ПУАНСО

2. $x=\frac{a\cdot\sin 54^\circ}{1+\sin 54^\circ}$

4. Усеченный икосододекаэдр имеет 62 грани, 120 вершин и 180 ребер.

5. Ромбокубооктаэдр имеет 48 ребер и 24 многогранных угла; ромбоикосододекаэдр имеет 120 ребер и 60 многогранных углов.

6. Операция, о которой говорит
в задаче, состоит в отсечении плоск
тями углов куба. В результате пол
чим: 1) если от углов куба отсечь п
рамиды с боковым ребром, равн
$b=\frac{2-\sqrt{2}}{2}a$, то получится усечен
куб, ребро которого равно $(\sqrt{2}-1$
(см. задачу 1); изображение этого мн
огогранника расположено в левом вер
нем углу рисунка 113; 2) если $b=$
получим кубооктаэдр, его ребро рав
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$; он изображен в верхнем прав
углу; 3) если $b=a$, получим октаэ
его ребро равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; он изображен
левом нижнем углу; 4) наконец, ес
$b=\frac{3}{4}a$, получим усеченный октаэ
его ребро равно $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; он изображ
в правом нижнем углу.

8. Малый звездчатый додека
(см. рис. 120) имеет 12 звездчат
пятиугольных граней, 30 ребер и 12 в
шин (выпуклых пятигранных угло
Большой додекаэдр (см. рис. 121) им
ет 12 выпуклых пятиугольных гран
30 ребер и 12 вершин (звездчатых
тигранных углов). Большой звездчат
додекаэдр (см. рис. 122) имеет 12 зве
чатых пятиугольных граней, 30 реб
и 20 вершин (трехгранных углов). Бол
шой икосаэдр (см. рис. 123) име
20 треугольных граней, 30 ребер
12 вершин (звездчатых пятигранн
углов).

9. Пересечением указанных в за
че тетраэдров является октаэдр, дв
ственный соответствующему кубу.

10. Многогранник, называем
«Stella octangula», не является п
вильным звездчатым, так как его не
зя получить ни из одного правильн
выпуклого многогранника путем п

должения ребер или граней до пересечения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

3. Из указанных на рисунке 128 фигур развертками куба являются следующие: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 19, 28, 29, 30, 32.

ТРЕТЬЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

3. б) Площадь маленького параллелограмма равна $\frac{1}{mn-1}$.

МНОГОГРАННИКИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

7. Искомый выпуклый многогранник имеет вершины со следующими координатами: (3; 1; 0), (2; 0; 0), (0; 0; 2), (0; 1; 3).

8. Пусть x — количество халатов, а y — курток, которые нужно изготовить. Задача сводится к нахождению наибольшего значения линейной функции $F=3x+15y$ на многограннике, который определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0<x\leqslant 15 \\ 0<y\leqslant 20 \\ 4x+3y=84. \end{cases}$$

Содержание

Предисловие 3

С чего все начиналось? 5

Что такое многогранник? 9

Великие художники Возрождения . . . 23

Леонард Эйлер и его знаменитая теорема 29

Проблема четырех красок, прогулки по тропинкам и мостам 39

«Идеальные», «космические» фигуры — тела Платона 52

Тела Архимеда и Кеплера — Пуансо . 74

Моделирование многогранников . . . 86

Паркеты из правильных многоугольников 96

Третья проблема Гильберта 108

Многогранники в линейном программировании 118

Кристаллы — природные многогранники 128

Ответы и указания 137

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна

В МИРЕ МНОГОГРАННИКОВ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Туркестанская*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Художники *О. М. Шмелев, В. С. Лухин*
Технический редактор *С. С. Якушкина*
Корректор *И. В. Чернова*

ИБ № 14752

Сдано в набор 09.06.93. Лицензия ЛР № 01 от 10.10.91. Подписано к печати 28.02.94. Фо 70×90¹/₁₆. Бумага офсетная. № 1. Га тура литературная. Печать офсетная. Усл. п 10,53+0,29 форз. Усл. кр.-отт. 22,57. Уч.-и 9,27+0,48 форз. Тираж 30 000 экз. Заказ

Ордена Трудового Красного Знамени изда ство «Просвещение» Комитета Российской дерации по печати. 127521, Москва, 3-й п Марьиной рощи, 41.

Смоленский полиграфический комбинат тета Российской Федерации по печати. 21 Смоленск, ул. Смольянинова, 1.