И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

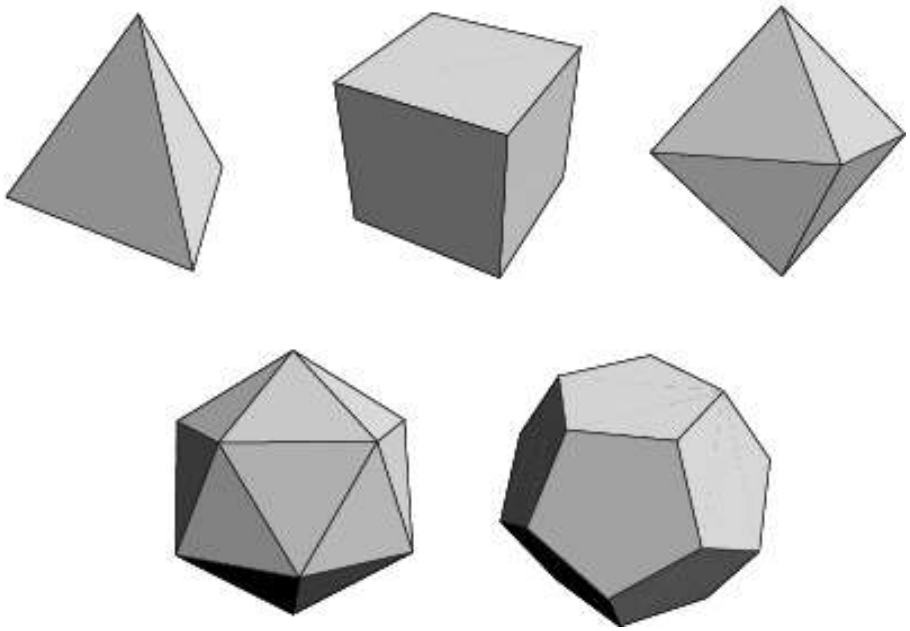
ПРАВИЛЬНЫЕ, ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ И ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Москва 2009

ВВЕДЕНИЕ

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников.

Пифагор и его ученики считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира, придавая форму правильных многогранников элементам первооснов бытия, а именно: огонь – тетраэдр (его гранями являются четыре правильных треугольника; земля - гексаэдр (куб, его гранями являются шесть квадратов); воздух – октаэдр (его гранями являются восемь правильных треугольников); вода – икосаэдр (его гранями являются двадцать правильных треугольников); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников).

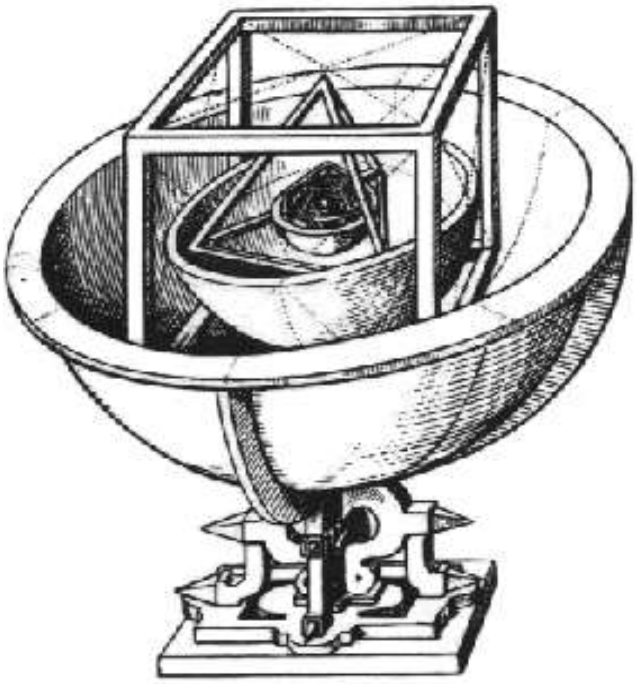


Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окто" - восемь; "Икоси" - двадцать, "Додека" - двенадцать. "Эдра" - грань. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон (429 – 348 гг. до н.э.). Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона.

Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

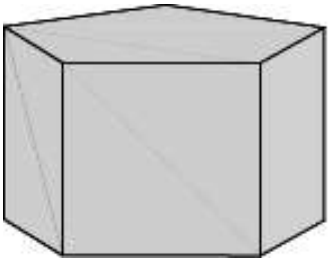
Иоганн Кеплер (1571-1630) в своей работе "Тайна мироздания" в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы. Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит.

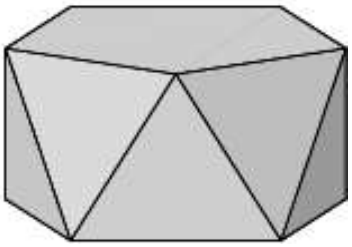
Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера.



Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287-212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники.

К полуправильным многогранникам относятся правильные *n*-угольные призмы, все ребра которых равны, и, так называемые, антипризмы с равными ребрами, которые получаются из призм поворотом одного из оснований относительно другого.

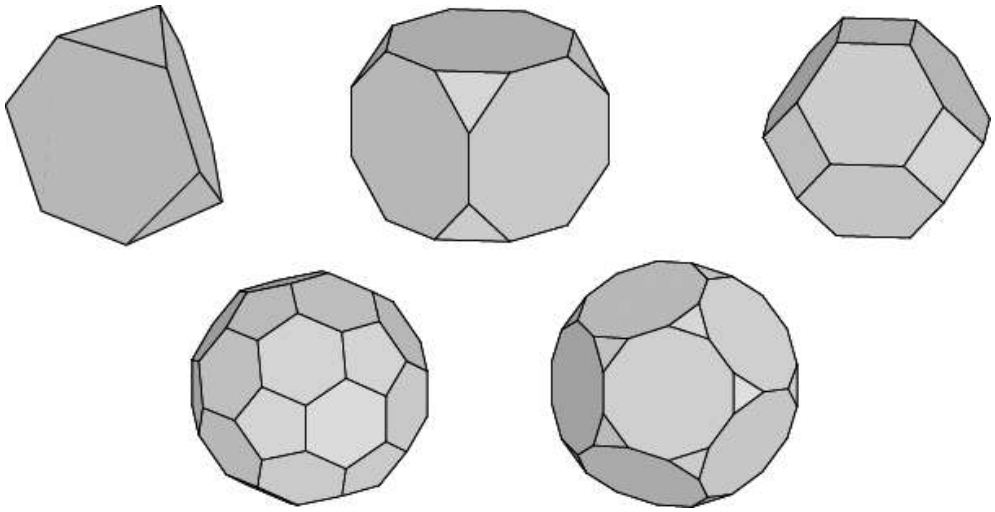




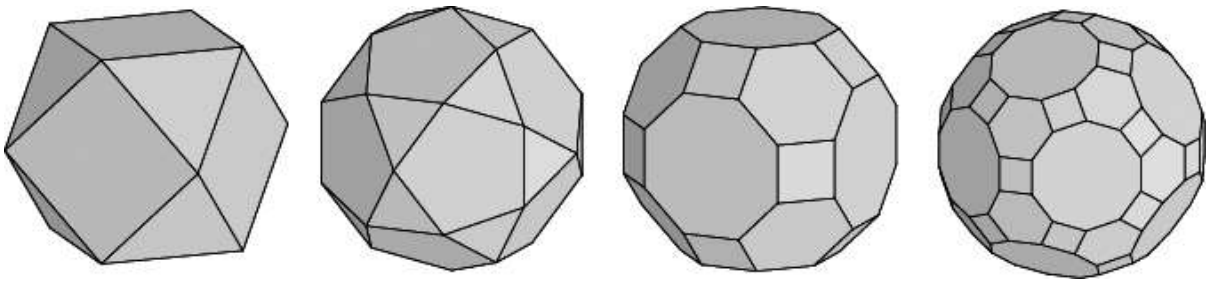
Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников, имеется еще 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед.

До нас дошла работа самого ученого "О многогранниках", в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь ученого телами Архимеда.

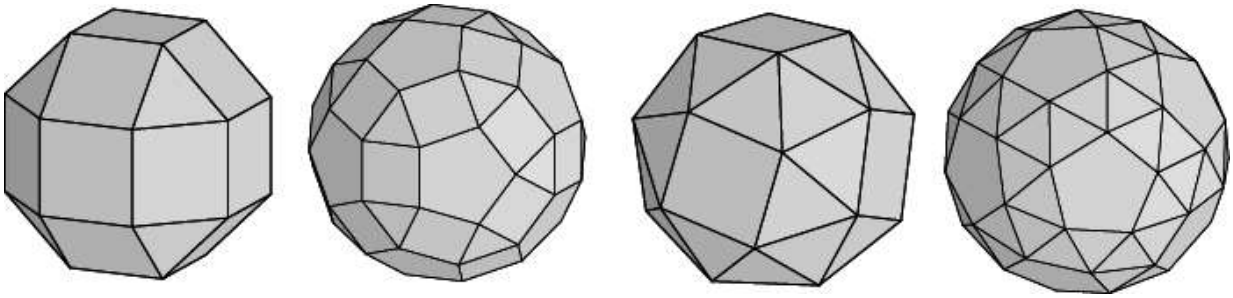
Перечислим их: усеченный тетраэдр; усеченный куб; усеченный октаэдр; усеченный икосаэдр; усеченный додекаэдр;



кубооктаэдр; икосододекаэдр; усеченный кубооктаэдр; усеченный икосододекаэдр;

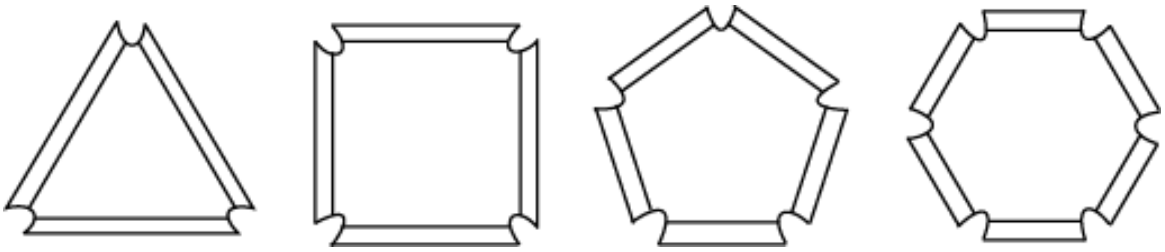


ромбокубооктаэдр; ромбоикосододекаэдр; курносый куб; курносый додекаэдр.



Перечисленные тела Архимеда называются также равноугольно полуправильными многогранниками, так как они имеют равные многогранные углы.

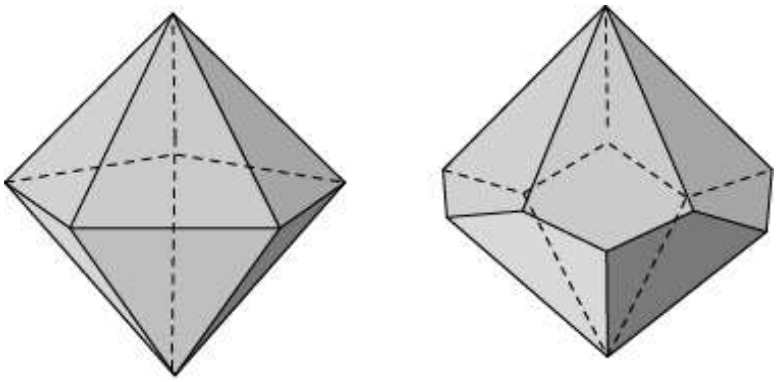
Модели правильных и полуправильных многогранников можно склеивать из бумаги или собирать из геометрического конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек - основной крепежной детали конструктора, которые можно нарезать из велосипедной камеры.



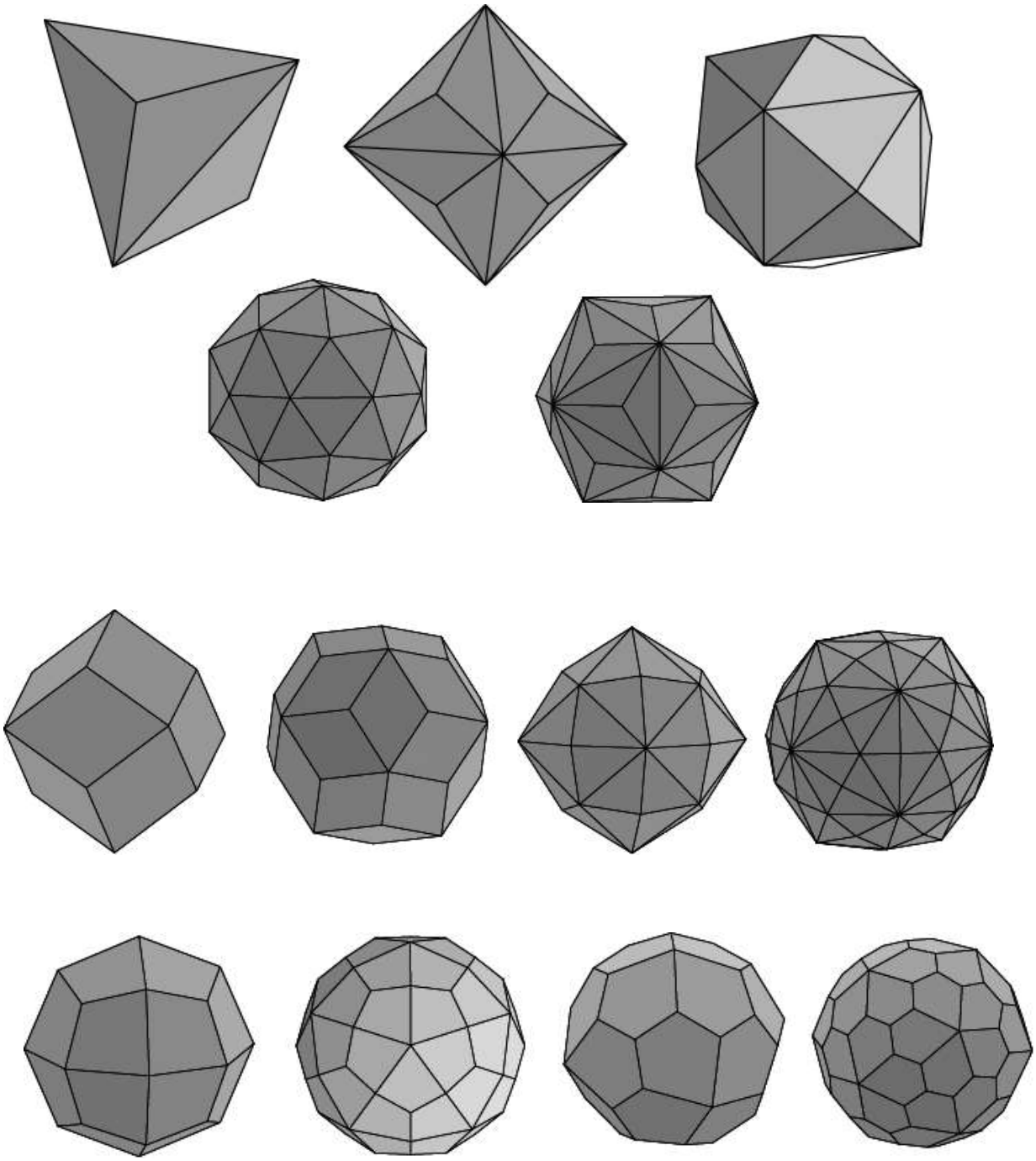
Все многоугольники должны иметь равные стороны (приблизительно 7 см). Желательно иметь многоугольники нескольких цветов. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке.

Многогранники, двойственные к равноугольно полуправильным многогранникам, называются равногранно полуправильными многогранниками. Они имеют равные грани и правильные многогранные углы.

Многограниками, двойственными к призмам и антипризмам, являются бипирамиды и антибипирамиды.

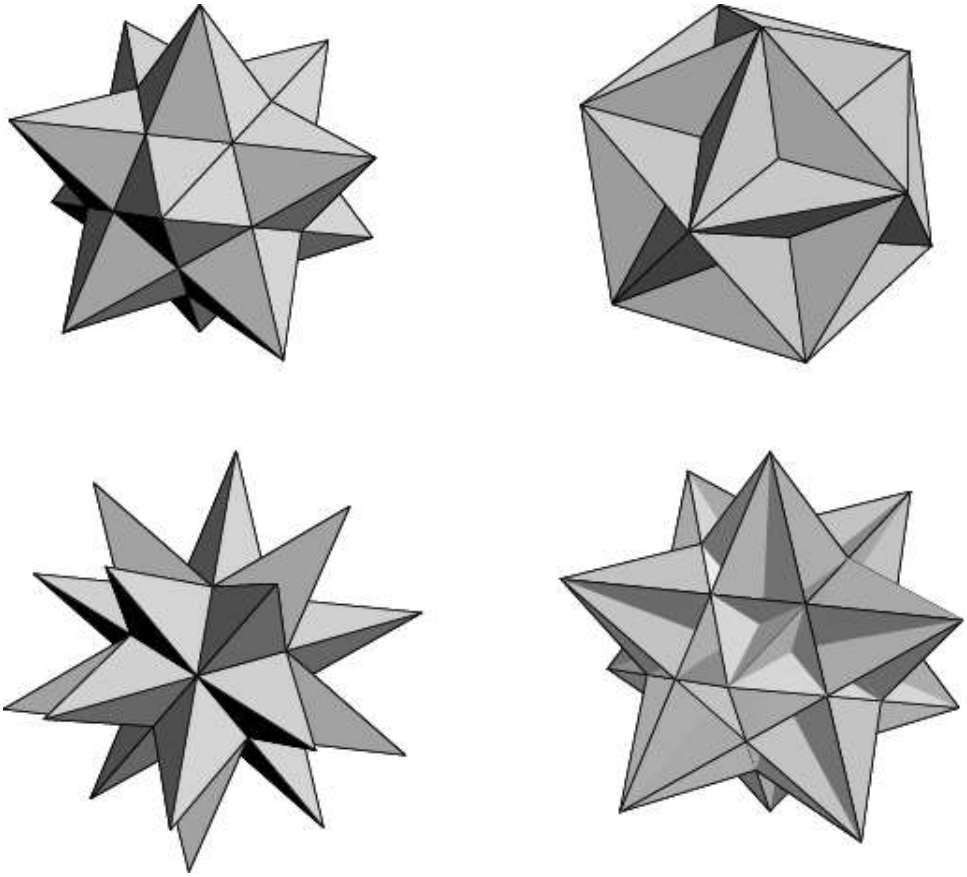


Многогранники, двойственные телам Архимеда, называются телами Каталана.



Кроме правильных и полуправильных многогранников, красивые формы имеют, так называемые, правильные звездчатые многогранники. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или ребер. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером, это звездчатый додекаэдр и большой звездчатый додекаэдр. Два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777-1859), это

большой додекаэдр и большой икосаэдр. Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются телами Кеплера-Пуансо.



Здесь мы представим правильные, полуправильные и звездчатые многогранники, рассмотрим их свойства и предложим задачи для самостоятельного решения.

Предлагаемое пособие может быть использовано при проведении элективного курса по геометрии для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений.

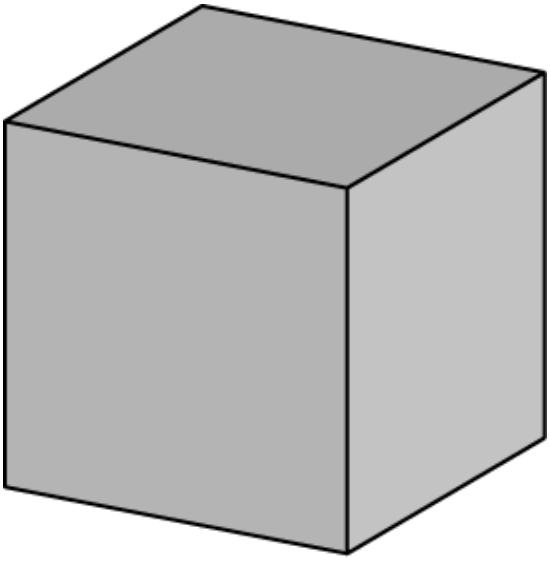
I. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

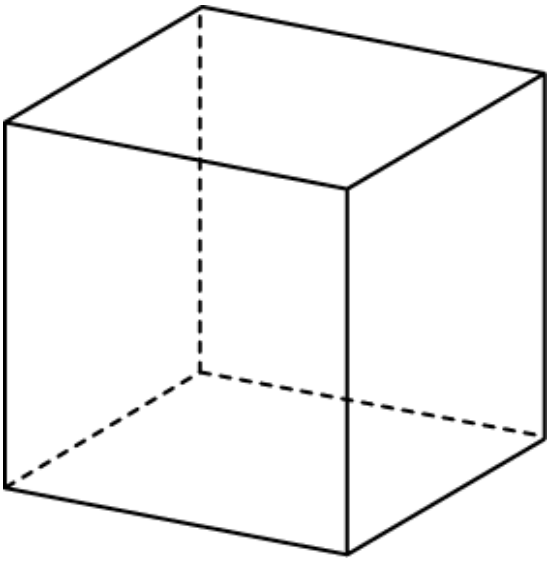
Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Существует только пять типов правильных многогранников: куб (гексаэдр), тетраэдр, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

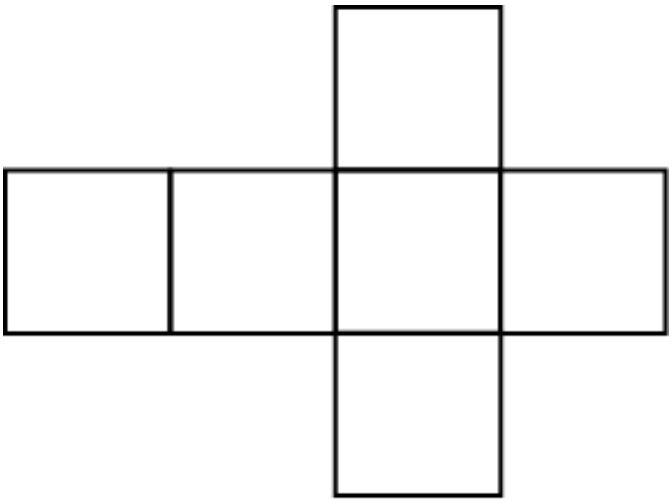
1. Куб

Куб (гексаэдр) – правильный многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

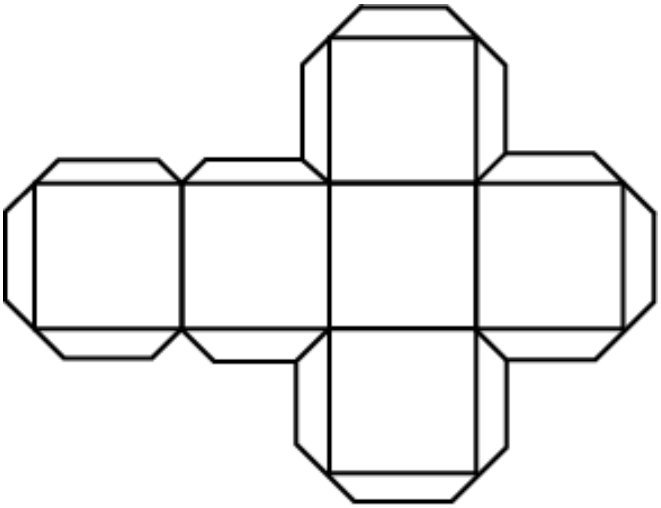




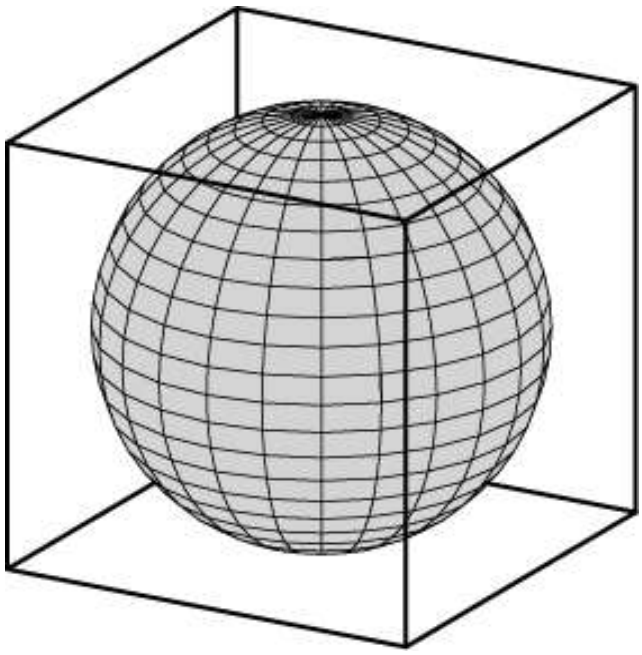
Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется разверткой многогранника. Например, на рисунке изображена развертка куба.



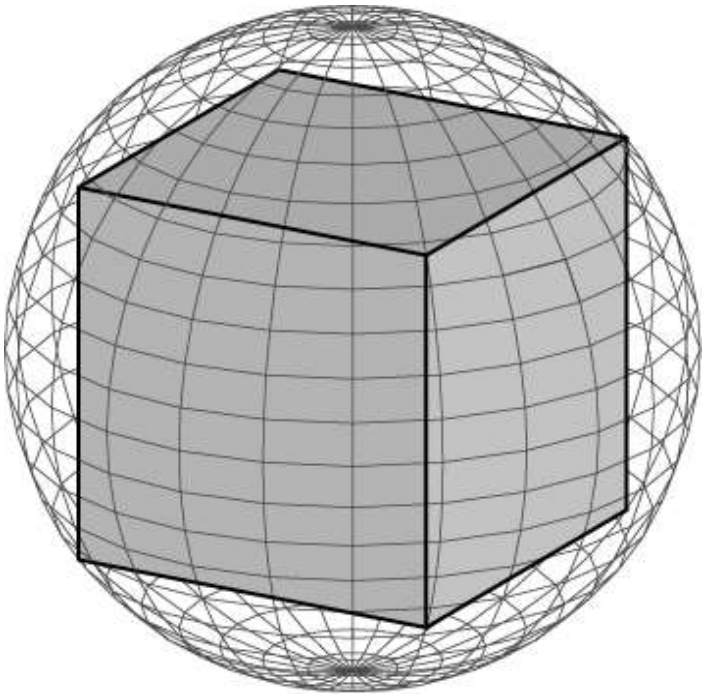
Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка.



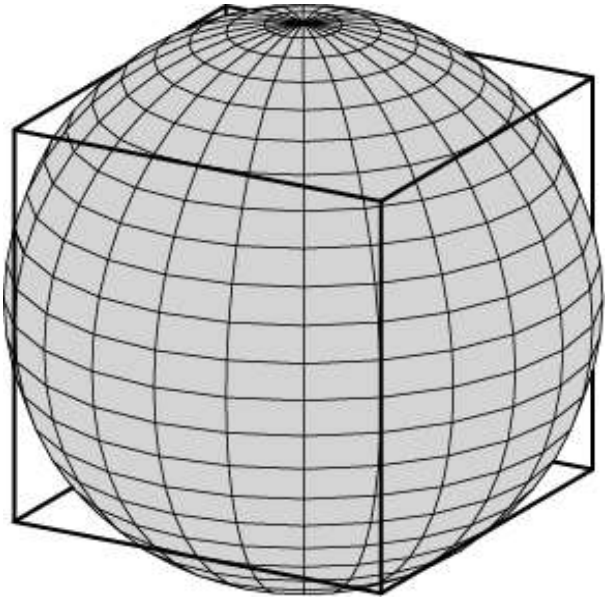
В куб можно вписать сферу. Она касается всех граней куба.



Около куба можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины куба.

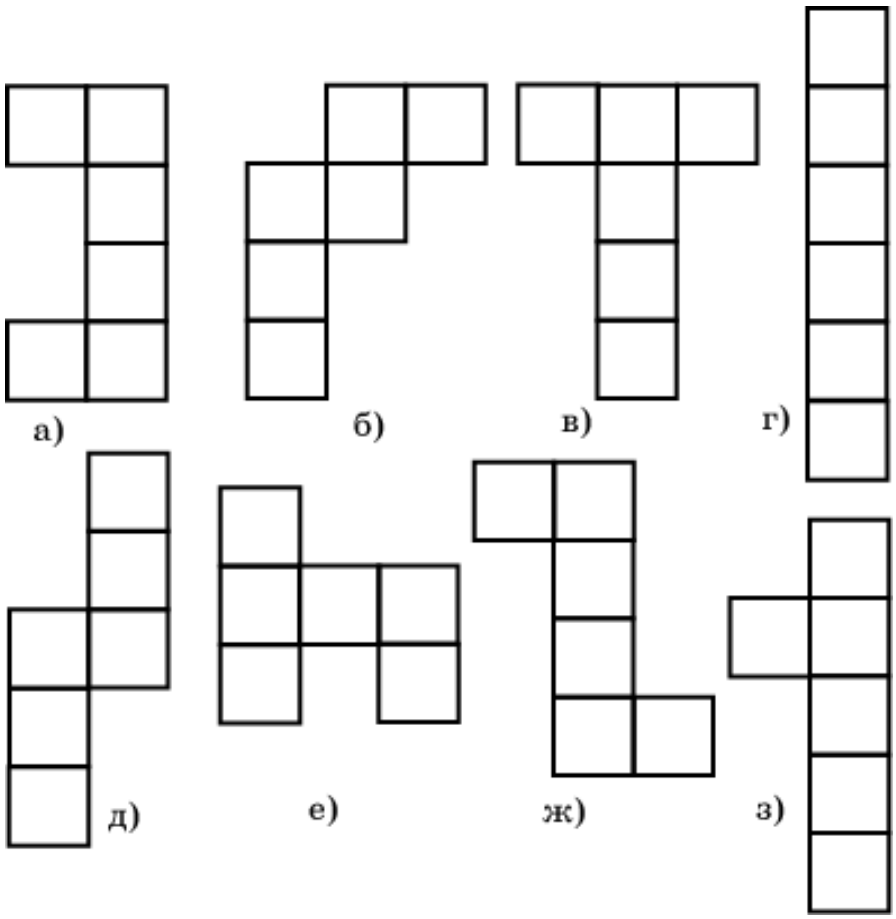


На рисунке показана сфера, полувписанная в куб. Она касается всех ребер куба.



Упражнения

1. Сколько вершин у куба?
2. Сколько ребер у куба?
3. Сколько пар параллельных ребер имеет куб?
4. Сколько пар перпендикулярных ребер имеет куб?
5. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет куб?
6. Сколько пар параллельных граней имеет куб?
7. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного куба.
8. Найдите диагональ единичного куба.
9. Имеет ли куб центр симметрии?
10. Сколько осей симметрии имеет куб?
11. Сколько плоскостей симметрии имеет куб?
12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней куба? (Раскраска считается правильной, если соседние грани окрашены в разные цвета.)
13. Какие из изображенных на рисунке фигур являются развертками куба?



14. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный куб.

15. Найдите радиус сферы, описанной около единичного куба.

16. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный куб.

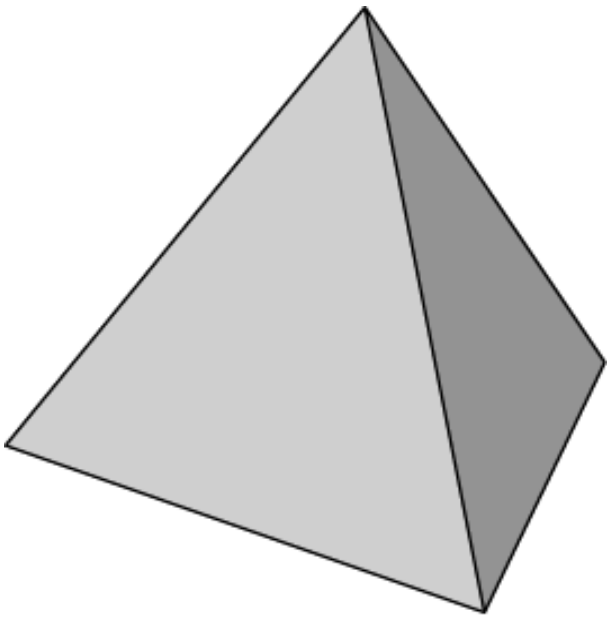
17. Куб повернут вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, на угол 45°. Какой многогранник будет общей частью исходного куба и повернутого?

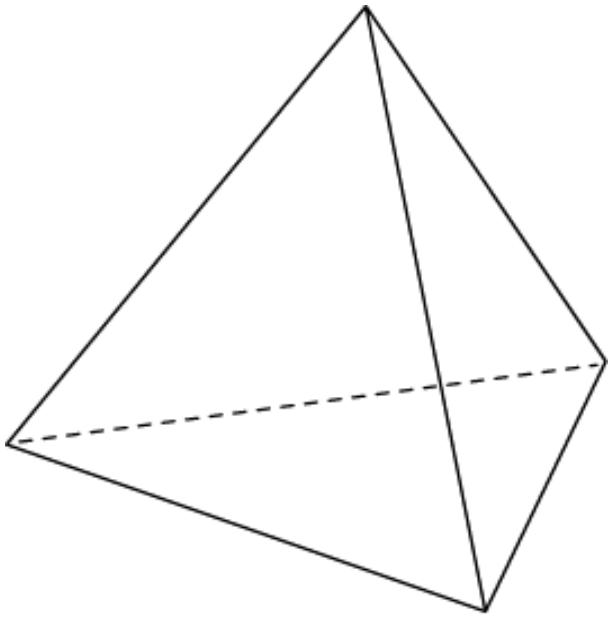
18. Куб повернут вокруг диагонали на угол 60°. Какой многогранник будет общей частью исходного куба и повернутого?

19. Куб повернут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, на угол 90°. Какой многогранник будет общей частью исходного куба и повернутого?

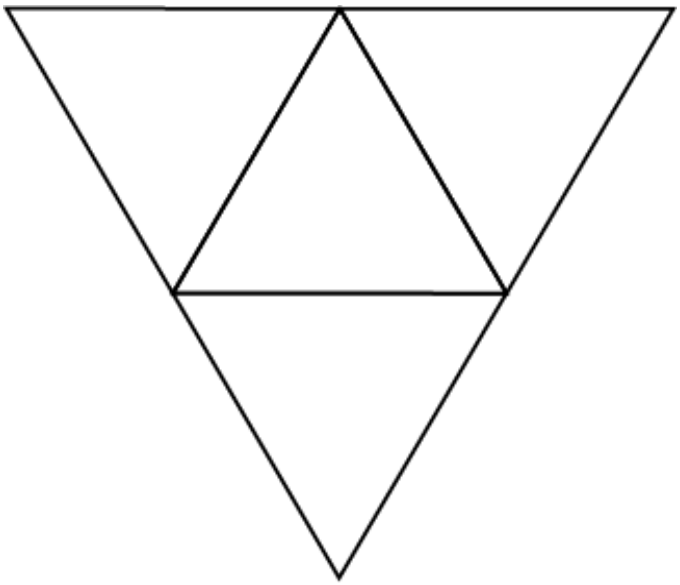
2. Тетраэдр

Тетраэдр – правильный многогранник, поверхность которого состоит из четырех правильных треугольников.

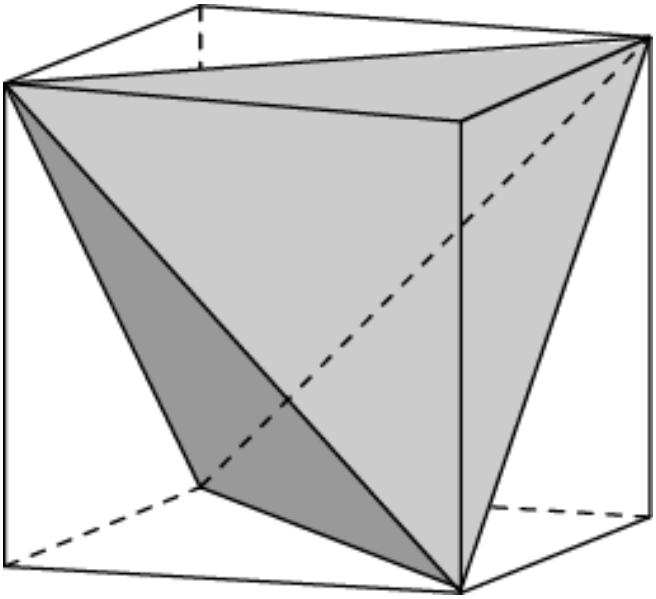




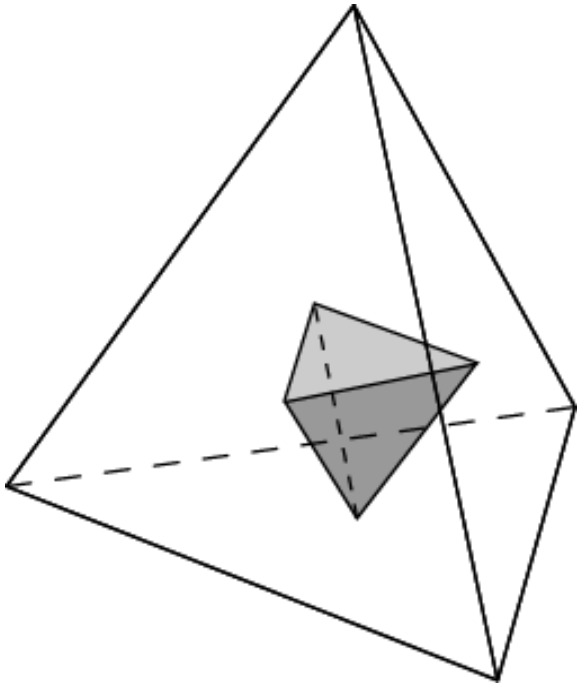
На рисунке изображена одна из возможных разверток тетраэдра.



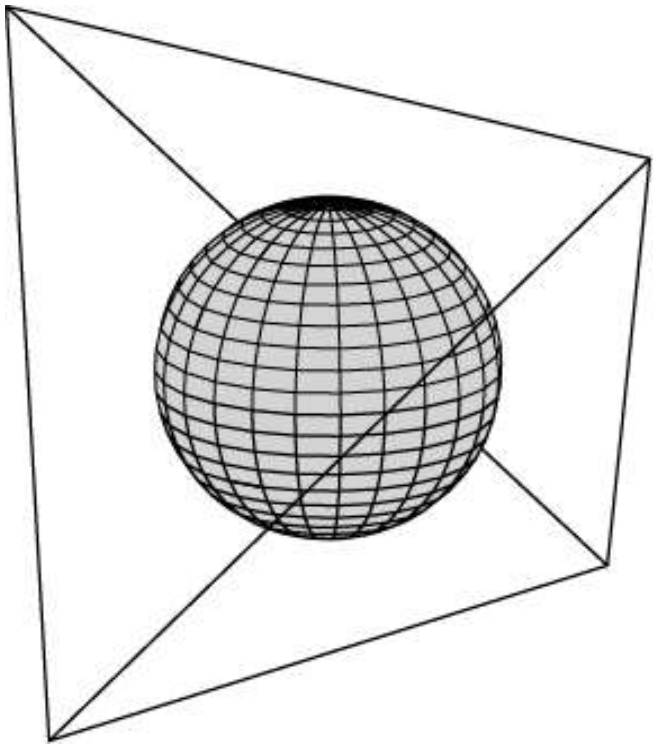
Тетраэдр можно вписать в куб. Четыре вершины куба будут вершинами тетраэдра.



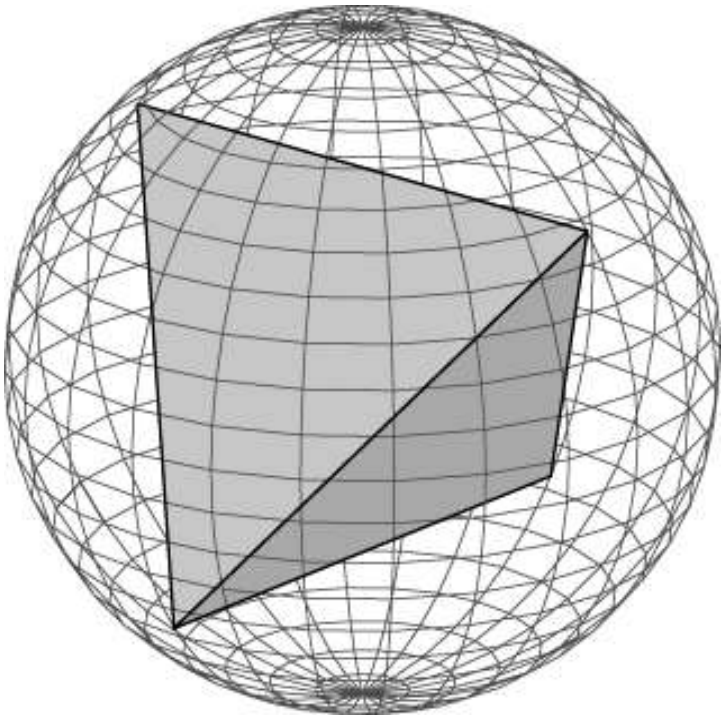
В тетраэдр можно вписать в тетраэдр. Вершинами вписанного тетраэдра будут центры граней данного тетраэдра.



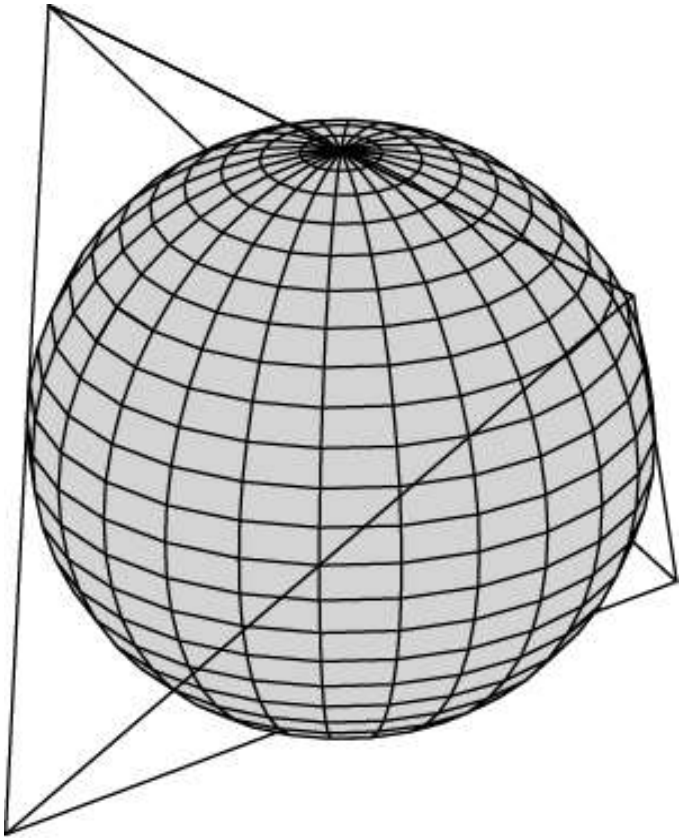
В тетраэдр можно вписать сферу. Она касается всех граней тетраэдра.



Около тетраэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины тетраэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в тетраэдр. Она касается всех ребер тетраэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин у тетраэдра?

2. Сколько ребер у тетраэдра?

3. Имеются ли у тетраэдра параллельные ребра? Если имеются, то сколько пар?

4. Имеются ли у тетраэдра перпендикулярные ребра. Если имеются, то сколько пар?

5. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет тетраэдр?

6. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного тетраэдра.

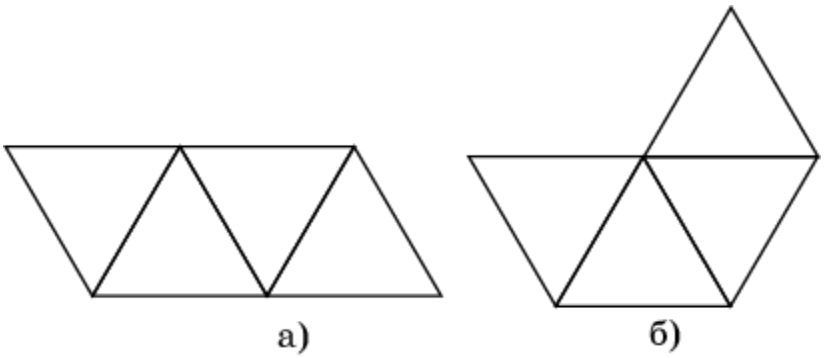
7. Имеет ли тетраэдр центр симметрии?

8. Имеет ли тетраэдр оси симметрии. Если имеет, то сколько?

9. Имеет ли тетраэдр плоскости симметрии. Если имеет, то сколько?

10. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней тетраэдра?

11. Какие из изображенных на рисунке фигур являются развертками тетраэдра?



12. Найдите ребро тетраэдра, вписанного в единичный куб.

13. Найдите ребро тетраэдра, вписанного в единичный тетраэдр.

14. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный тетраэдр.

15. Найдите радиус сферы, описанной около единичного тетраэдра.

16. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный тетраэдр.

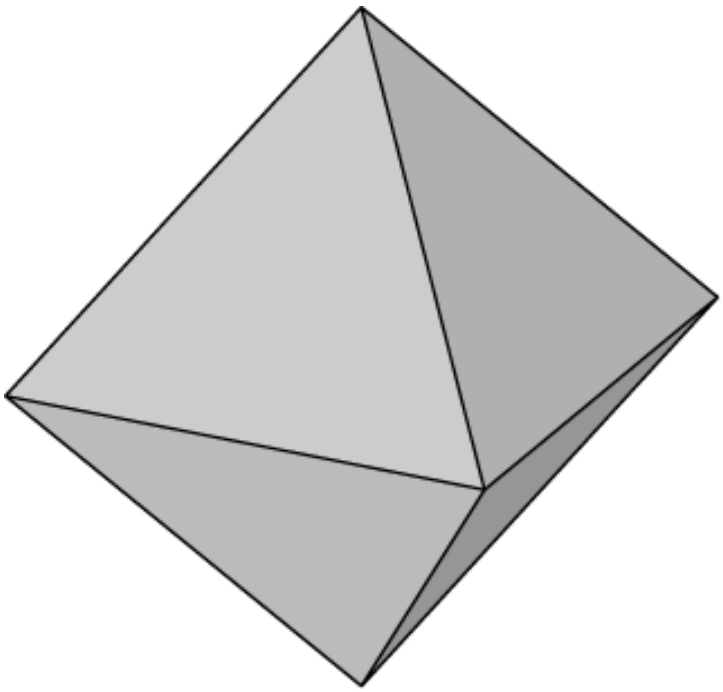
17. Тетраэдр повернут вокруг высоты на угол 60°. Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повернутого?

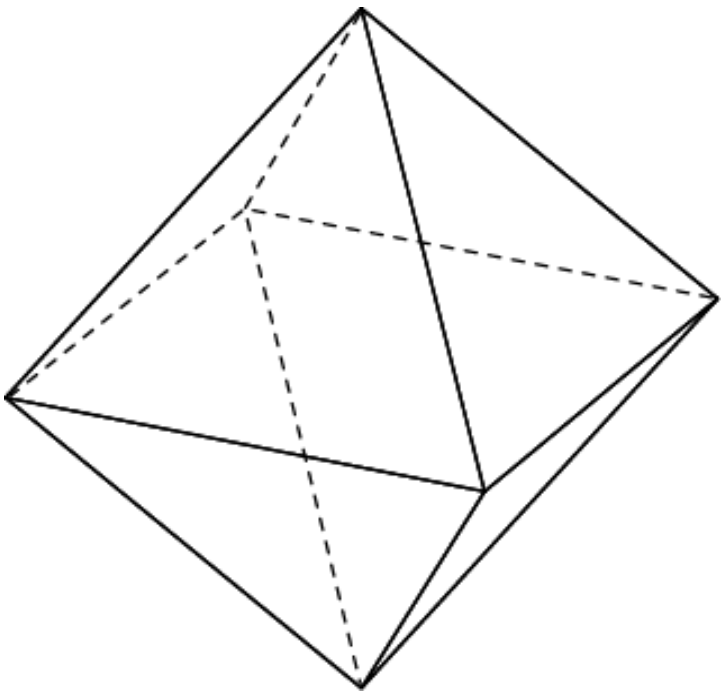
18. Через каждое ребро тетраэдра параллельно противоположному ребру проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

19. Через каждую вершину тетраэдра параллельно противоположной грани проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

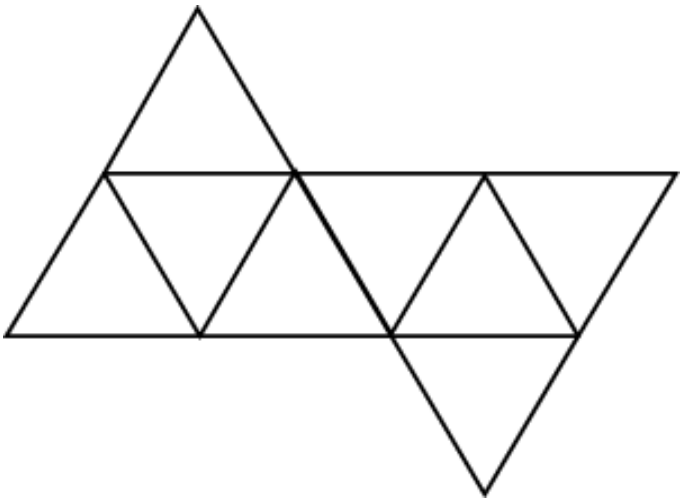
3. Октаэдр

Октаэдр – правильный многогранник, поверхность которого состоит из восьми правильных треугольников.

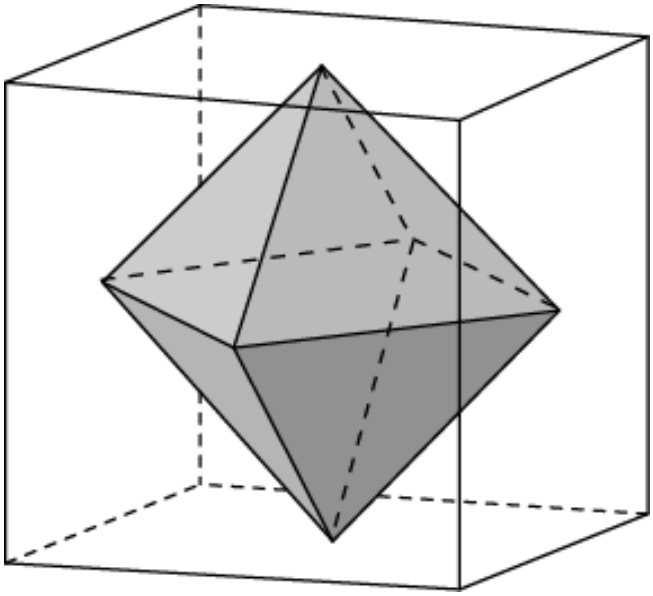




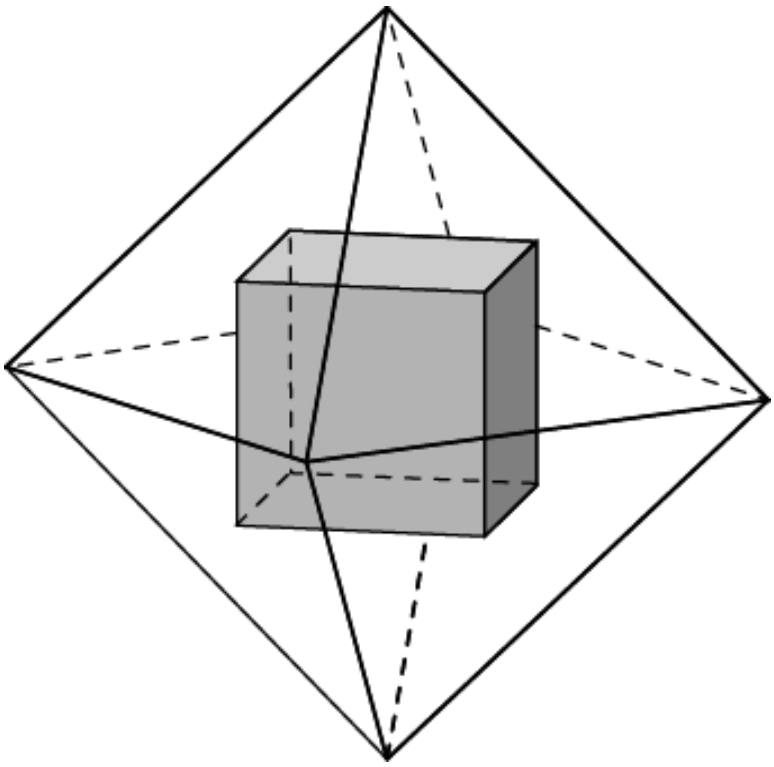
На рисунке показана одна из возможных разверток октаэдра.



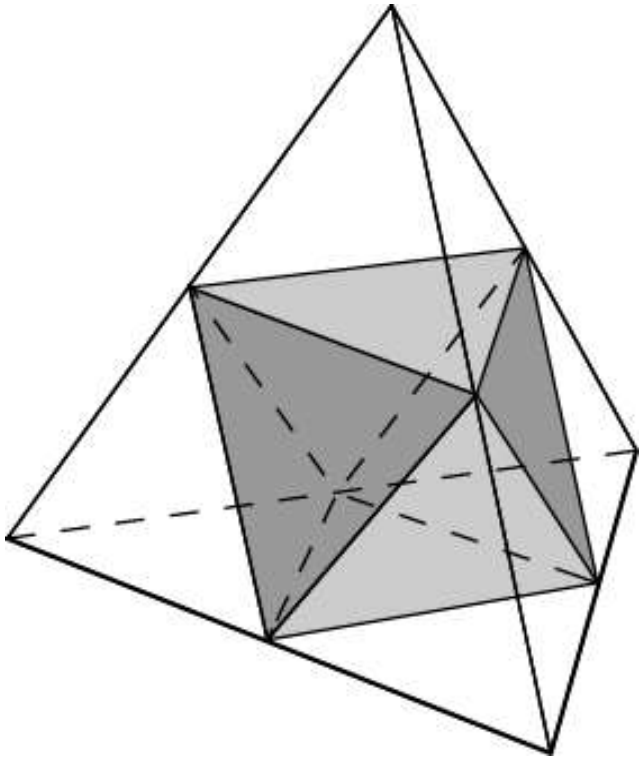
Октаэдр можно вписать в куб. Вершинами этого октаэдра будут центры граней куба.



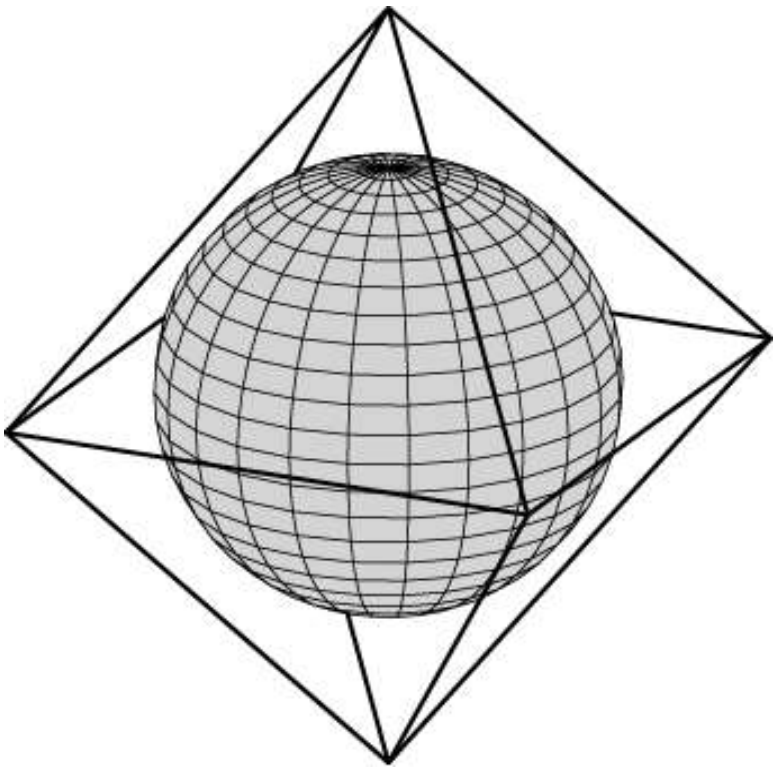
Октаэдр можно описать около куба. Вершинами куба будут центры граней октаэдра.



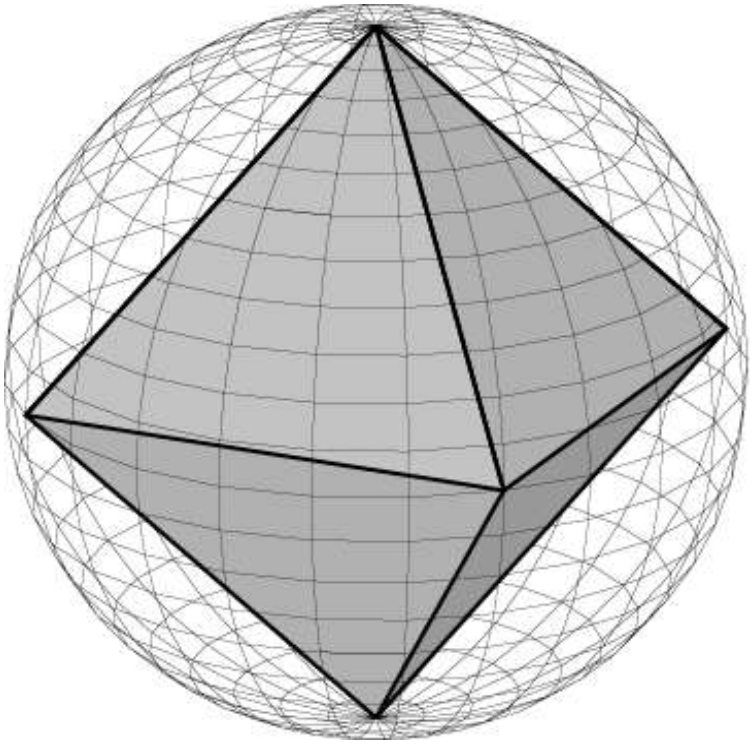
Октаэдр можно вписать в тетраэдр. Вершинами этого октаэдра будут середины ребер тетраэдра.



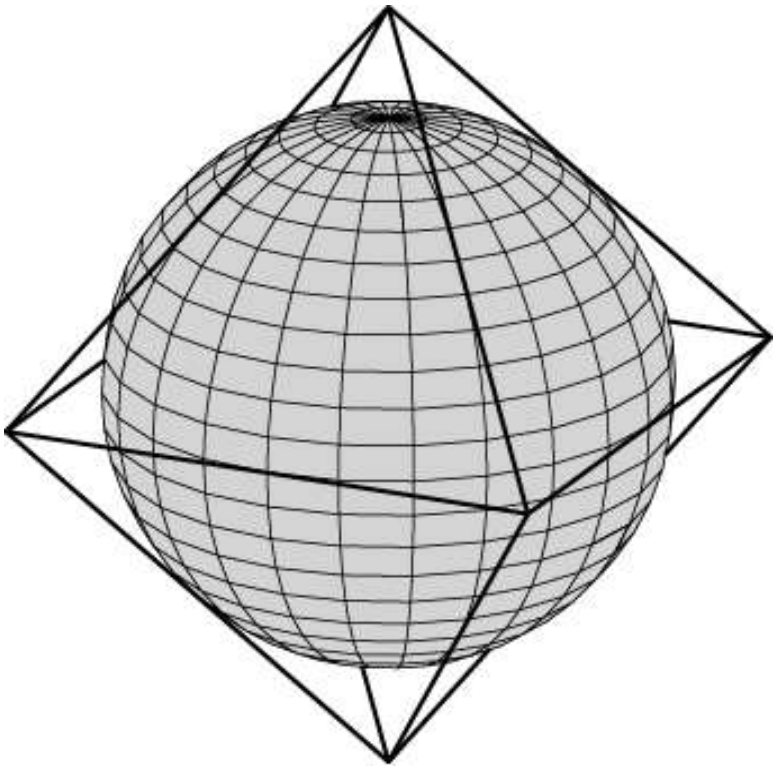
В октаэдр можно вписать сферу. Она касается всех граней октаэдра.



Около октаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины октаэдра.

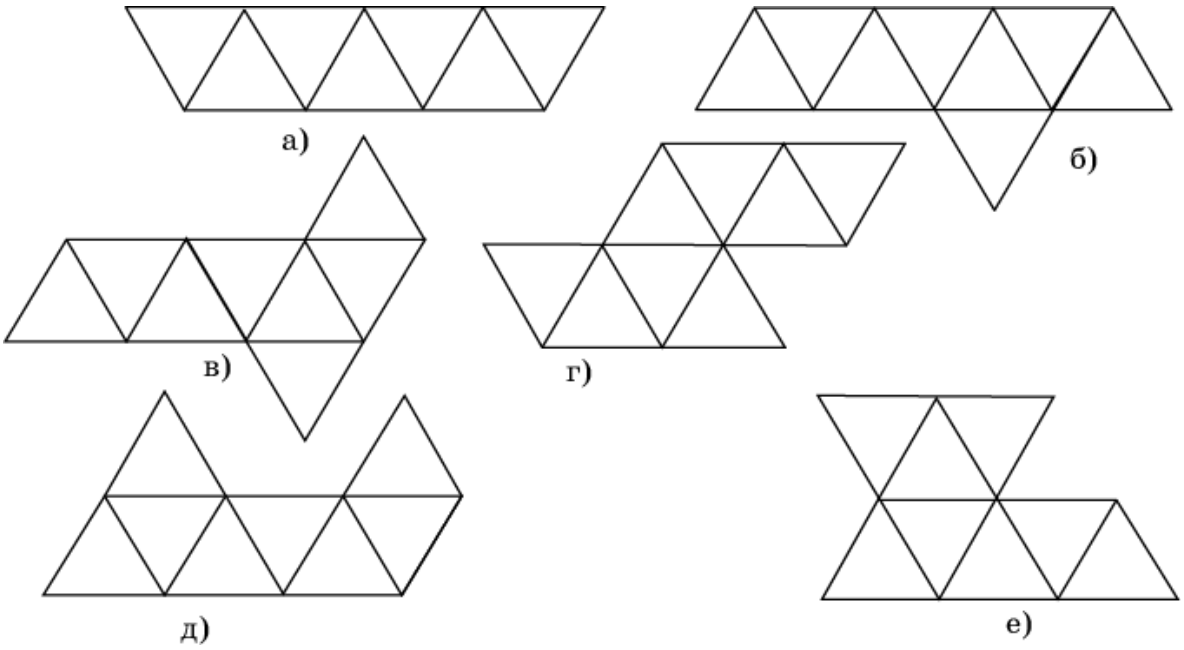


На рисунке показана сфера, полувписанная в октаэдр. Она касается всех ребер октаэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин у октаэдра?
2. Сколько ребер у октаэдра?
3. Сколько пар параллельных ребер имеет октаэдр?
4. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет октаэдр?
5. Сколько пар параллельных граней имеет октаэдр?
6. Найдите расстояние между противоположными вершинами единичного октаэдра.
7. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного октаэдра.
8. Найдите расстояние между противоположными гранями единичного октаэдра.
9. Имеет ли октаэдр центр симметрии?
10. Сколько осей симметрии имеет октаэдр?
11. Сколько плоскостей симметрии имеет октаэдр?
12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней октаэдра?
13. Какие из изображенных на рисунке фигур являются развертками октаэдра?



14. Найдите ребро октаэдра, вписанного в единичный куб.

15. Найдите ребро октаэдра, описанного около единичного куба.

16. Найдите ребро октаэдра, вписанного в единичный тетраэдр.

17. Какой многогранник останется от куба после отсечения от его углов правильных треугольных пирамид, вершинами которых являются вершины куба, а боковые ребра равны ребрам куба?

18. Найдите радиус сферы, вписанной в единичный октаэдр.

19. Найдите радиус сферы, описанной около единичного октаэдра.

20. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный октаэдр.

21. Тетраэдр повернут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, на угол 90°. Какой многогранник является общей частью исходного тетраэдра и повернутого?

22. Октаэдр повернут вокруг диагонали на угол 45°. Какой многогранник является общей частью исходного октаэдра и повернутого?

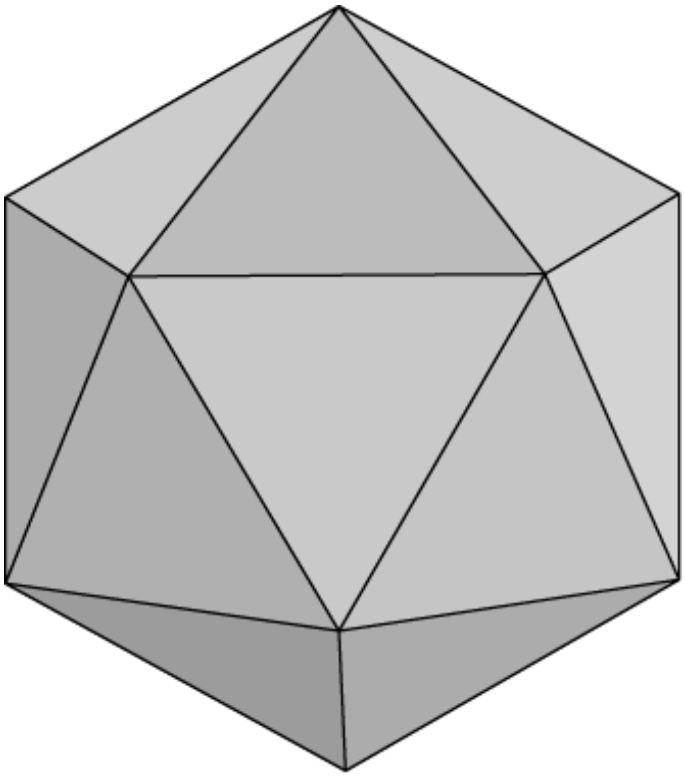
23. Октаэдр повернут вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, на угол 60°. Какой многогранник является общей частью исходного октаэдр и повернутого?

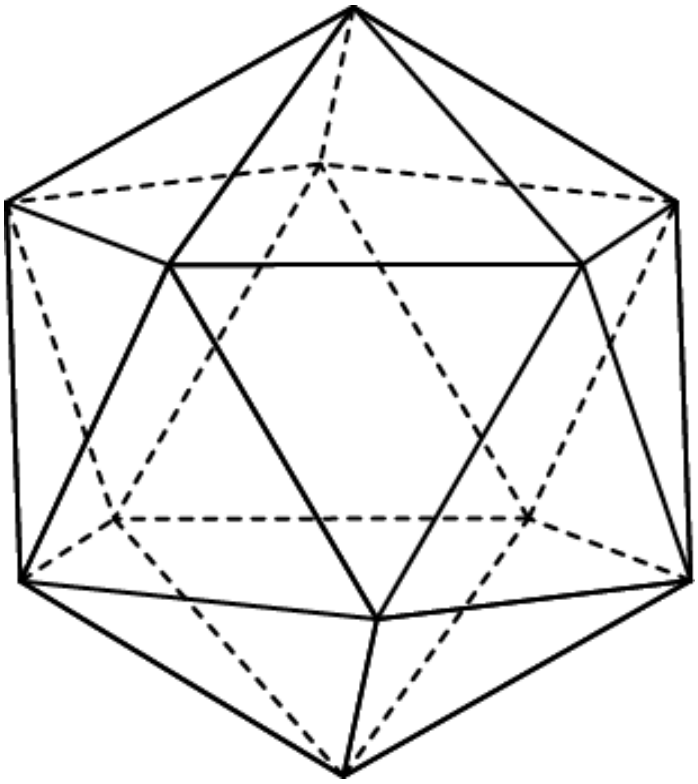
24. Через каждую вершину октаэдра перпендикулярно диагонали, проходящей через эту вершину, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

25. Через каждую вершину куба перпендикулярно диагонали, проходящей через эту вершину, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

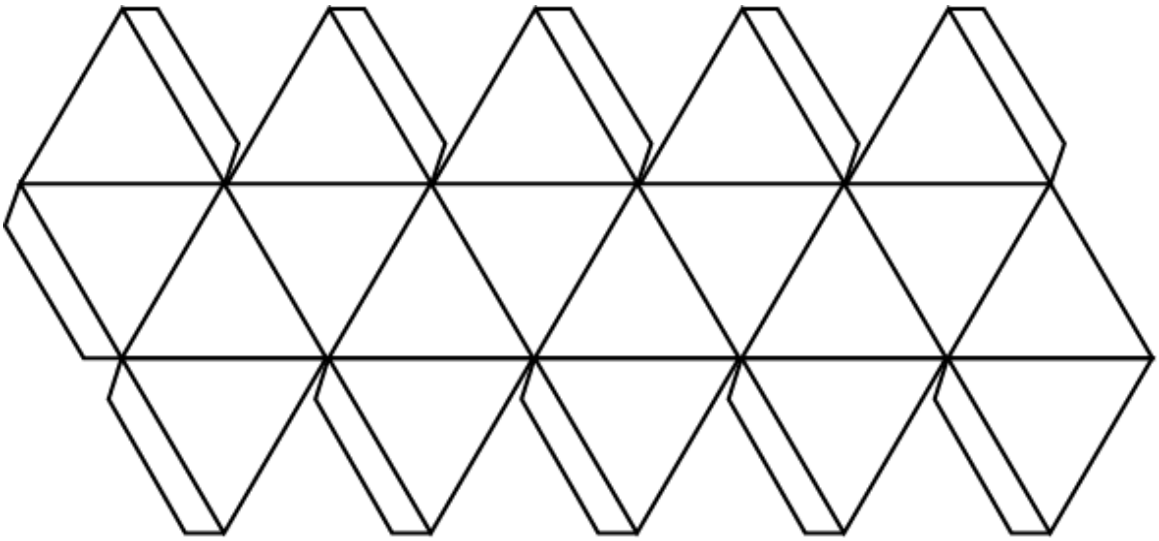
4. Икосаэдр

Икосаэдр – правильный многогранник, поверхность которого состоит из двадцати правильных треугольников.

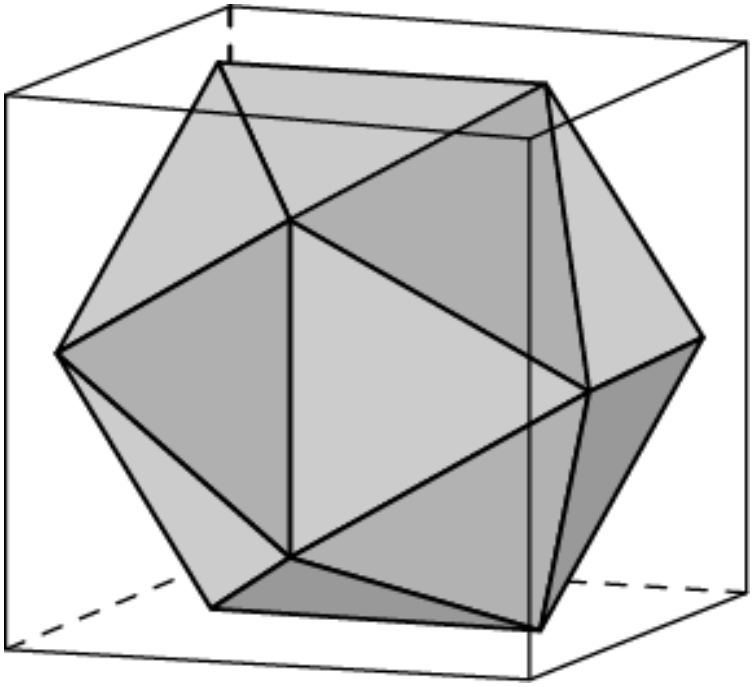




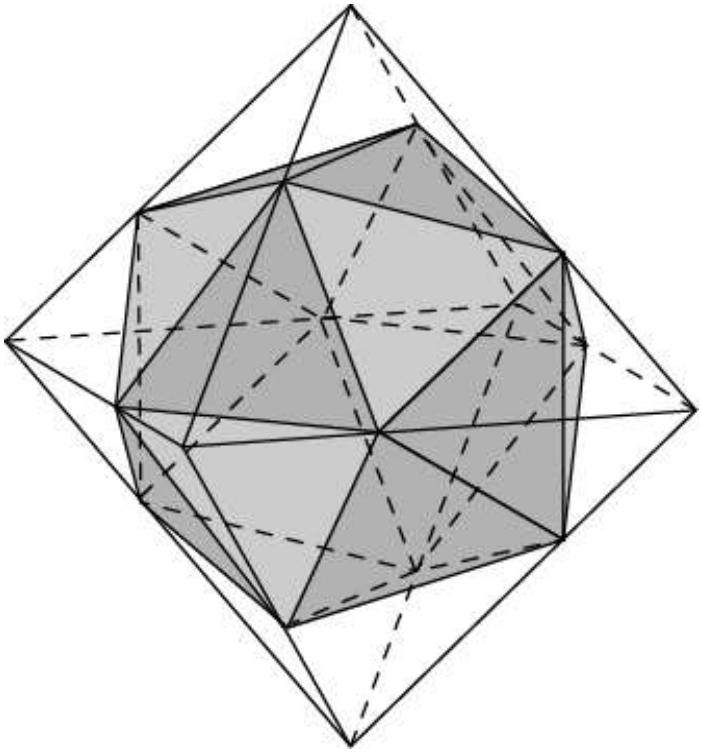
На рисунке показана одна из возможных разверток икосаэдра с клапанами.



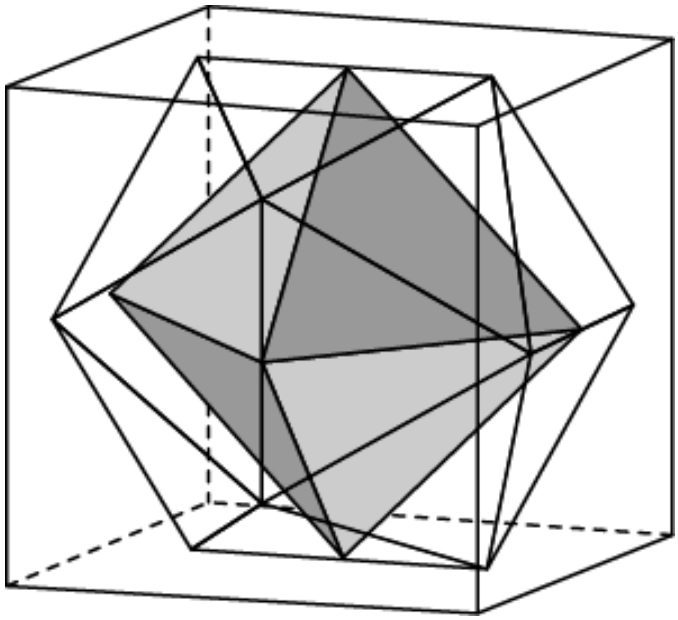
Икосаэдр можно вписать в куб. Центры граней куба будут серединами ребер икосаэдра.



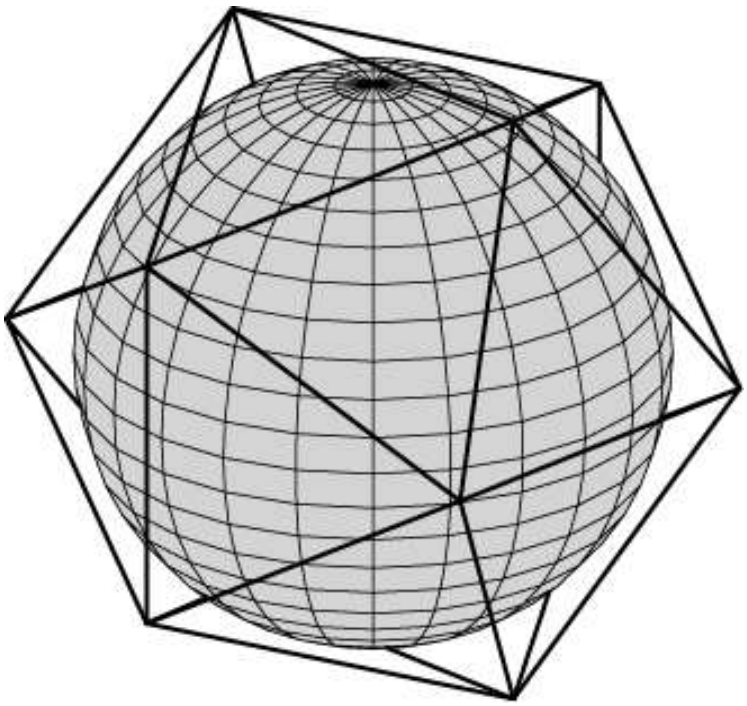
Икосаэдр можно вписать в октаэдр. Вершины икосаэдра будут лежать на ребрах октаэдра.



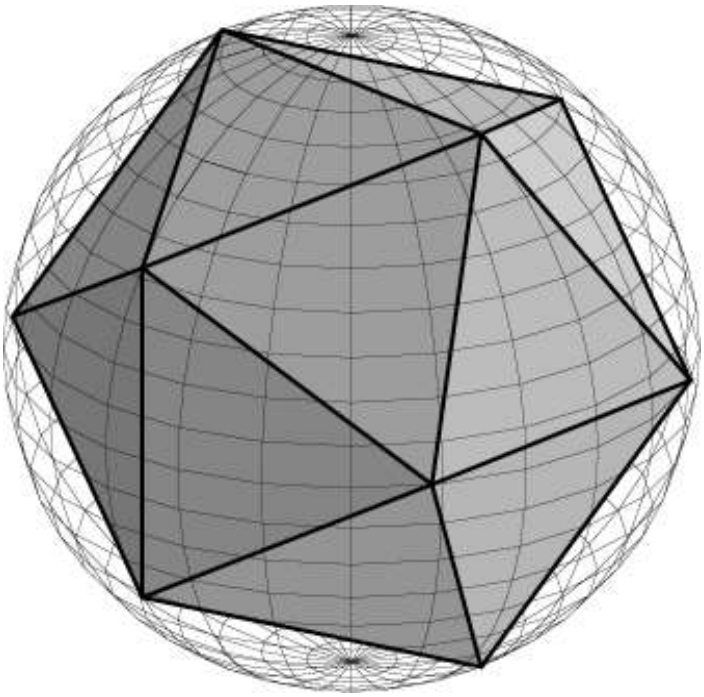
В икосаэдр можно вписать октаэдр. Вершинами этого октаэдра являются середины противоположных ребер икосаэдра.



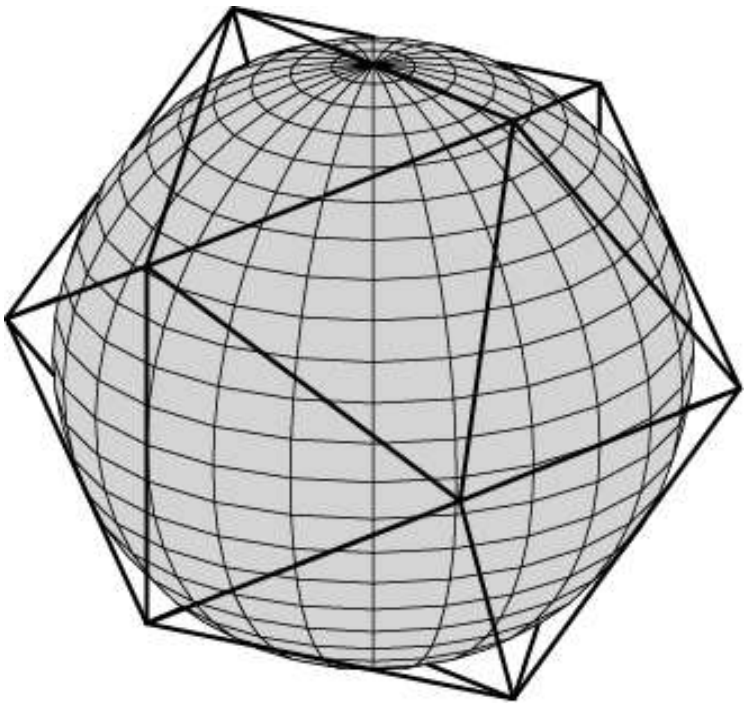
В икосаэдр можно вписать сферу. Она касается всех граней икосаэдра.



Около икосаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины икосаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в икосаэдр. Она касается всех ребер икосаэдра.

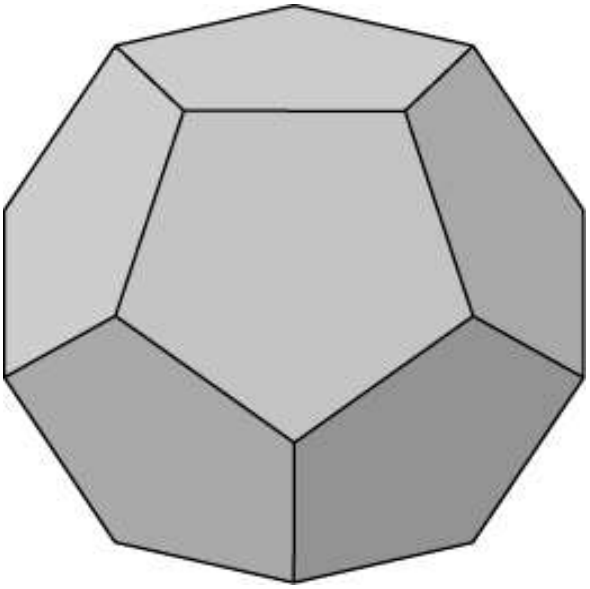


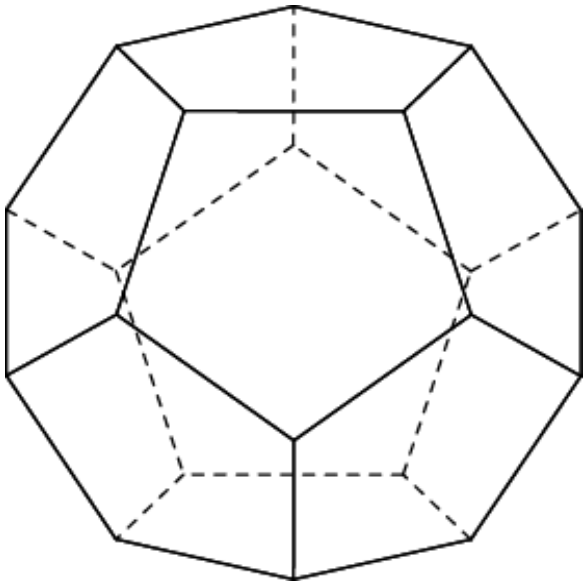
Упражнения

1. Сколько вершин у икосаэдра?
2. Сколько ребер у икосаэдра?
3. Сколько пар параллельных ребер имеет икосаэдр?
4. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет икосаэдр?
5. Сколько пар параллельных граней имеет икосаэдр?
6. Имеет ли икосаэдр центр симметрии?
7. Сколько осей симметрии имеет икосаэдр?
8. Сколько плоскостей симметрии имеет икосаэдр?
9. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного икосаэдра.
10. Найдите расстояние между противоположными вершинами единичного икосаэдра.
11. Найдите ребро икосаэдра, вписанного в единичный куб.
12. В каком отношении вершины икосаэдра, вписанного в октаэдр, делят ребра этого октаэдра?
13. Найдите ребро икосаэдра, вписанного в единичный октаэдр.
14. Найдите ребро октаэдра, вписанного в единичный икосаэдр.
15. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный икосаэдр.
16. Найдите радиус сферы, описанной около единичного икосаэдра.
17. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней икосаэдра?

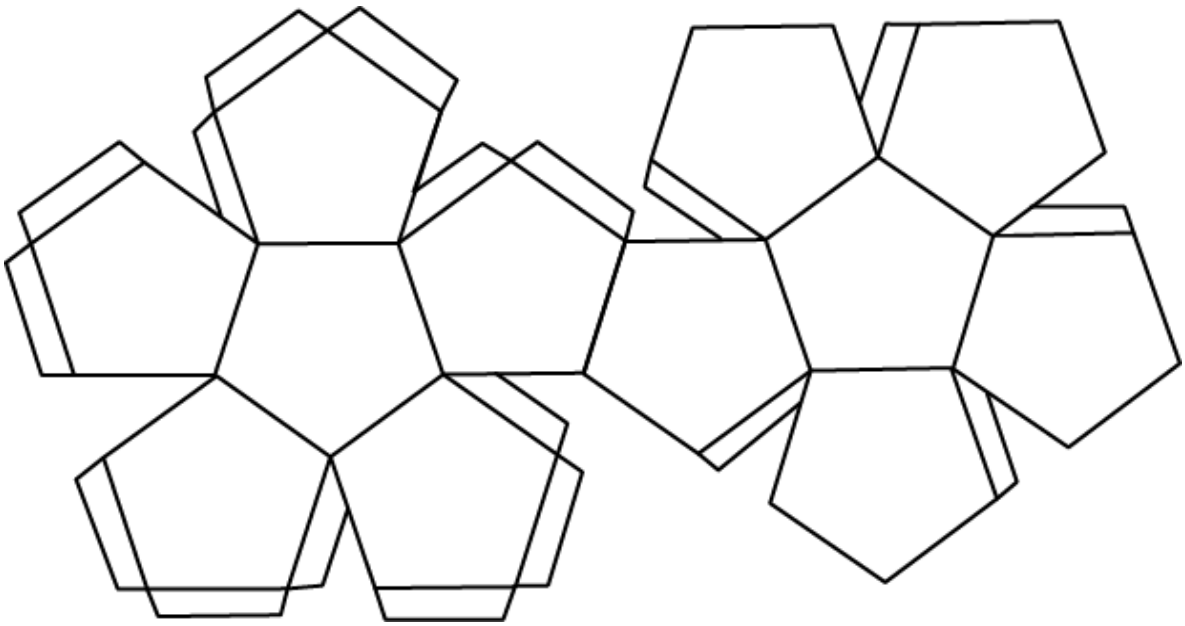
5. Додекаэдр

Додекаэдр – правильный многогранник, поверхность которого состоит из двенадцати правильных пятиугольников.

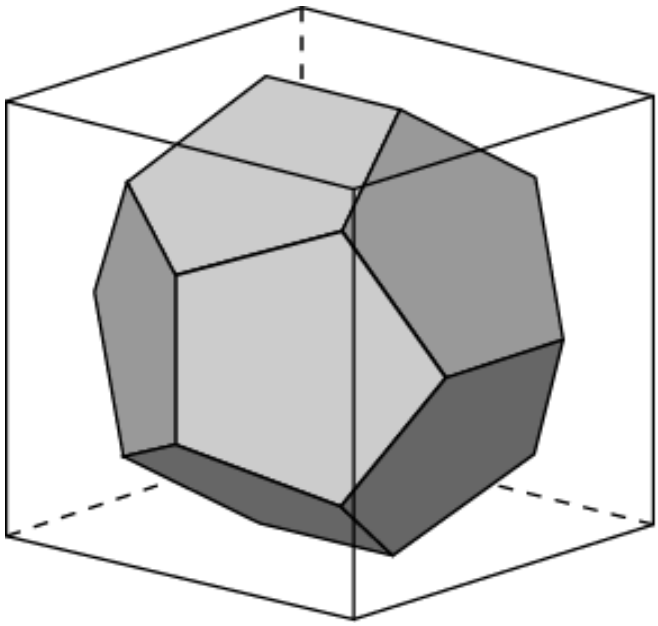




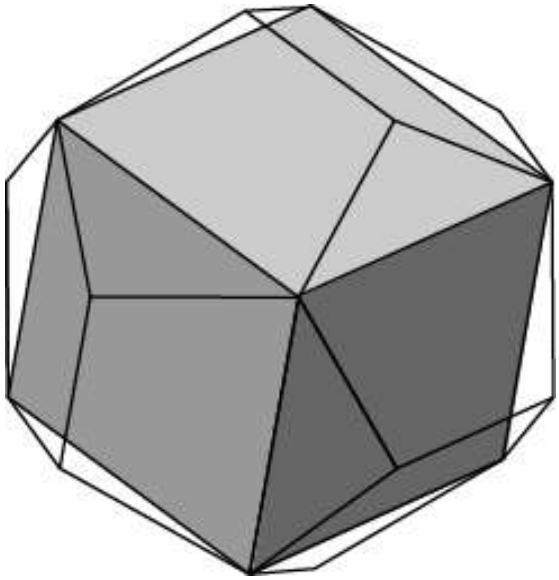
На рисунке показана одна из возможных разверток додекаэдра с клапанами.



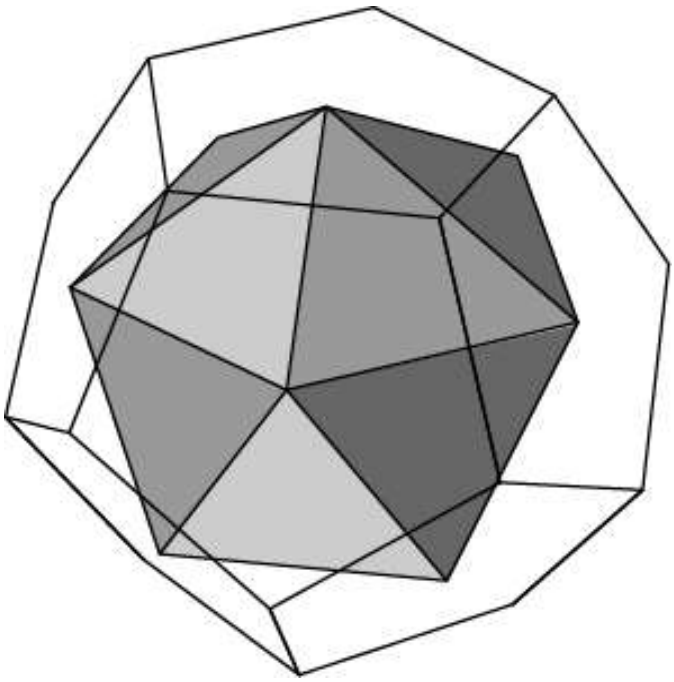
Додекаэдр можно вписать в куб. Центры граней куба будут серединами ребер додекаэдра.



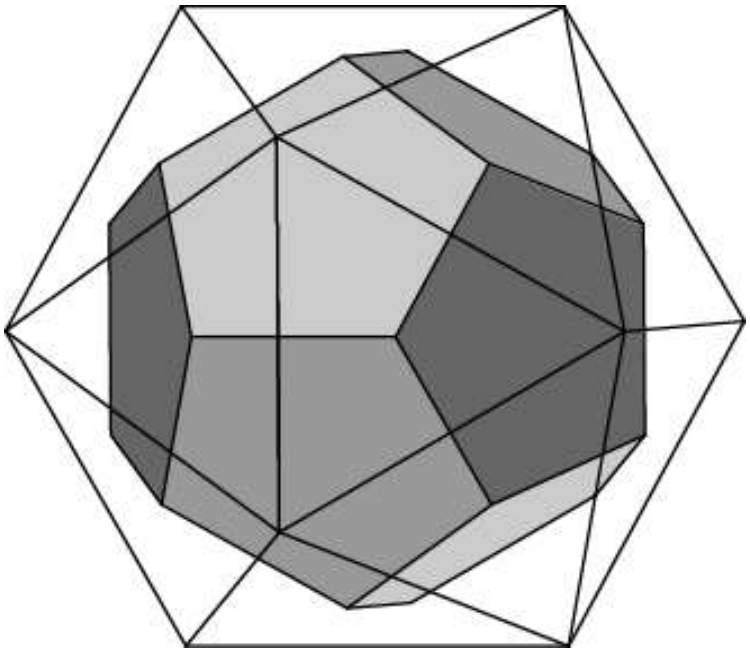
В додекаэдр можно вписать куб. Вершины куба будут вершинами додекаэдра.



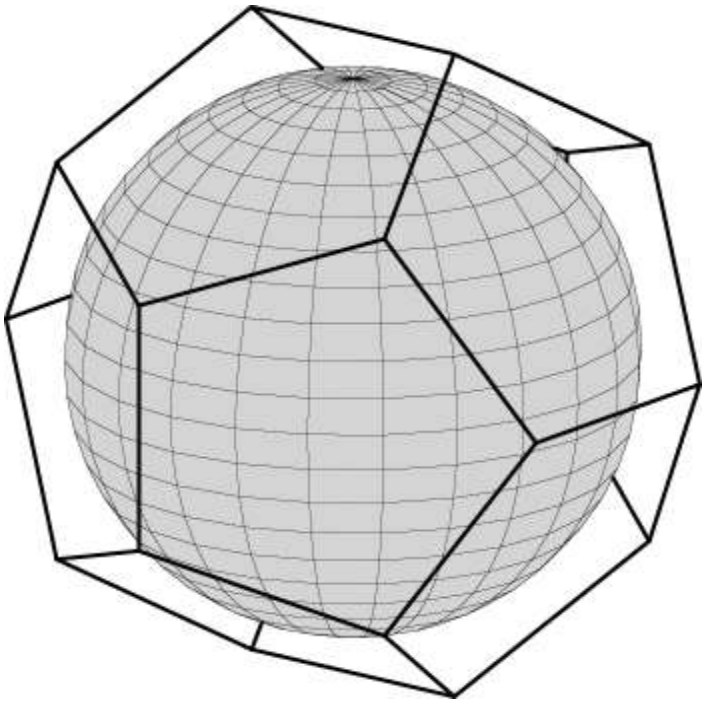
В додекаэдр можно вписать икосаэдр. Вершинами икосаэдра будут центры граней додекаэдра.



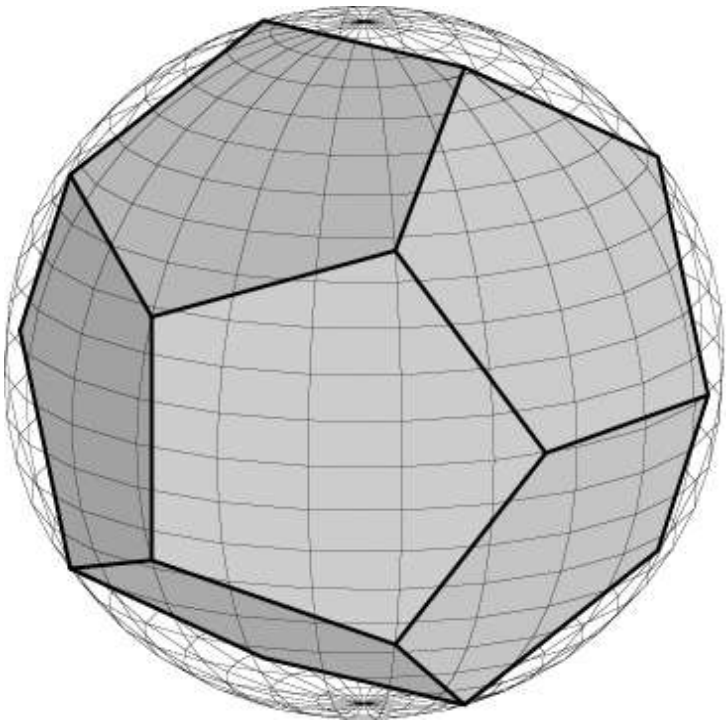
Додекаэдр можно вписать в икосаэдр. Вершинами додекаэдра будут центры граней икосаэдра.



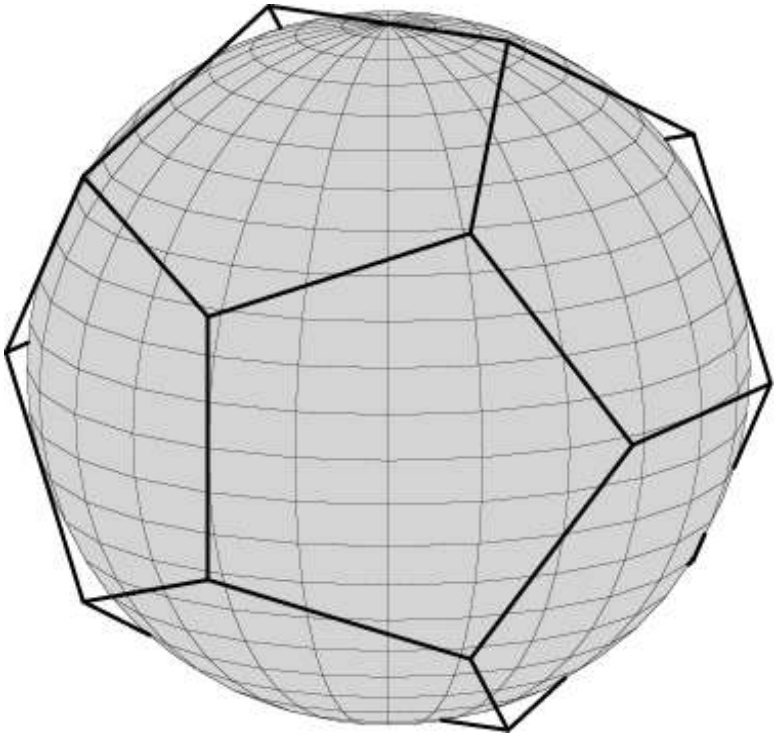
В додекаэдр можно вписать сферу. Она касается всех граней додекаэдра.



Около додекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины додекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в додекаэдр. Она касается всех ребер додекаэдра.



Упражнения

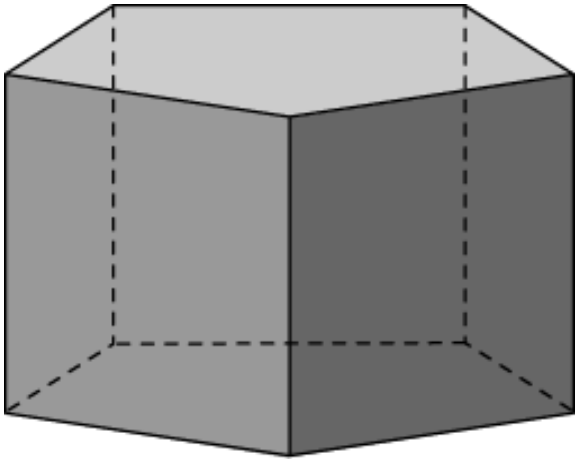
1. Сколько вершин у додекаэдра?
2. Сколько ребер у додекаэдра?
3. Сколько пар параллельных ребер имеет додекаэдр?
4. Сколько пар скрещивающихся ребер имеет додекаэдр?
5. Сколько пар параллельных граней имеет додекаэдр?
6. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного додекаэдра.
7. Найдите расстояние между противоположными вершинами единичного додекаэдра.
8. Имеет ли додекаэдр центр симметрии?
9. Сколько осей симметрии имеет додекаэдр?
10. Сколько плоскостей симметрии имеет додекаэдр?
11. Найдите ребро додекаэдра, вписанного в единичный куб.
12. Найдите ребро куба, вписанного в единичный додекаэдр.
13. Найдите ребро додекаэдра, вписанного в единичный икосаэдр.
14. Найдите ребро икосаэдра, вписанного в единичный додекаэдр.
15. Можно ли в додекаэдр вписать тетраэдр так, чтобы вершины тетраэдра находились в вершинах додекаэдра? Если да, то найдите ребро тетраэдра, вписанного в единичный додекаэдр.
16. Можно ли в икосаэдр вписать куб так, чтобы вершины куба находились в центрах граней икосаэдра? Если да, то найдите ребро куба, вписанного в единичный икосаэдр.
17. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный додекаэдр.
18. Найдите радиус сферы, описанной около единичного додекаэдра.
19. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней додекаэдра?
20. Через каждую вершину додекаэдра перпендикулярно прямой, проходящей через эту вершину и центр симметрии, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?
21. Через каждую вершину икосаэдра перпендикулярно прямой, проходящей через эту вершину и центр симметрии, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

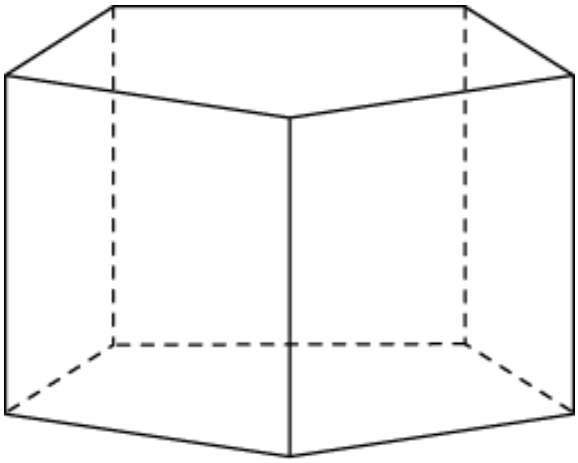
II. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, поверхность которого состоит из правильных многоугольников, возможно, с разным числом сторон и все многогранные углы равны, причем существует движение многогранника, переводящее один из них в другой.

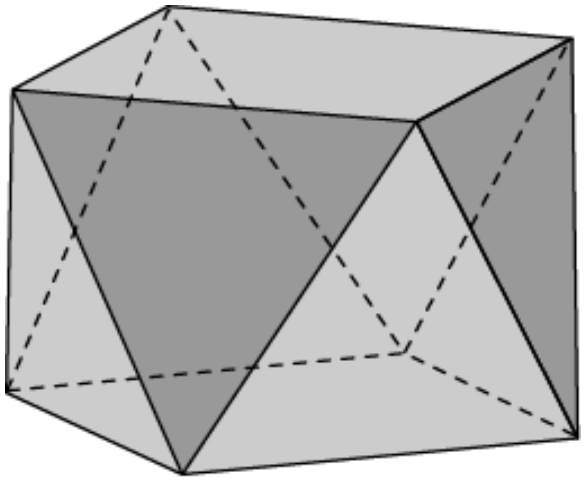
1. Призмы и антипризмы

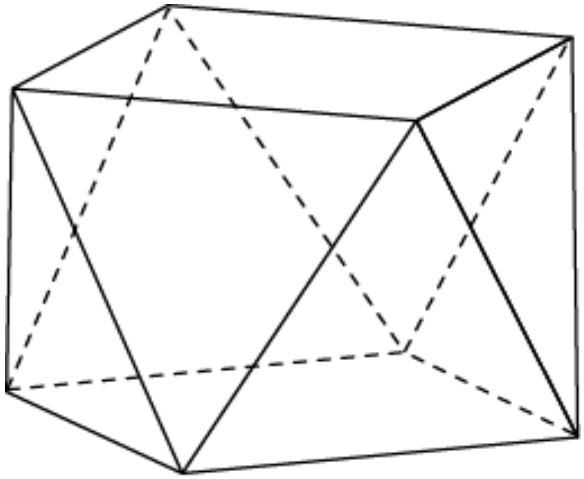
К полуправильным многогранникам относятся правильные *n*-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма имеет своими гранями два правильных пятиугольника - основания призмы, и пять квадратов, образующих боковую поверхность призмы.





К полуправильным многогранникам относятся и так называемые правильные антипризмы, все ребра которых равны. На рисунке показана правильная четырехугольная антипризма, полученная из четырехугольной призмы поворотом одного из оснований относительно другого на угол $45°$. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.



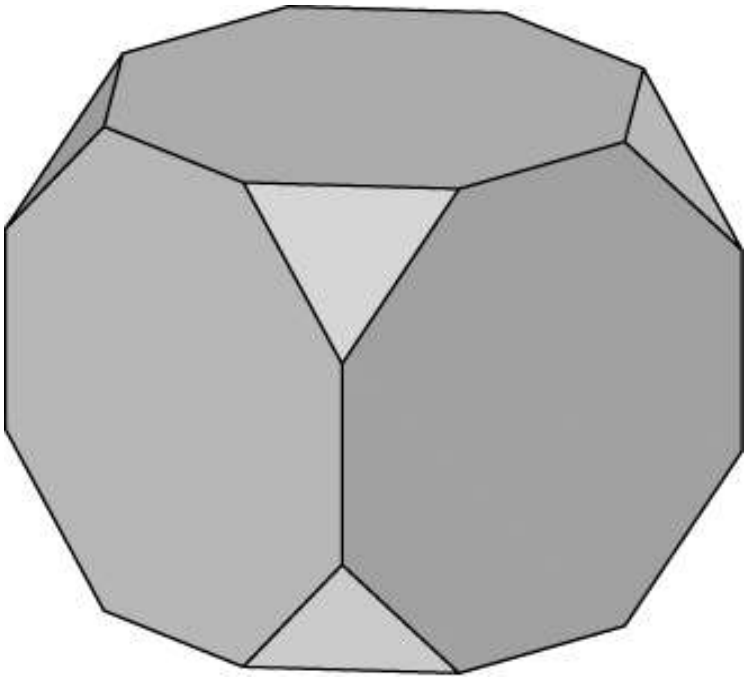


Упражнения

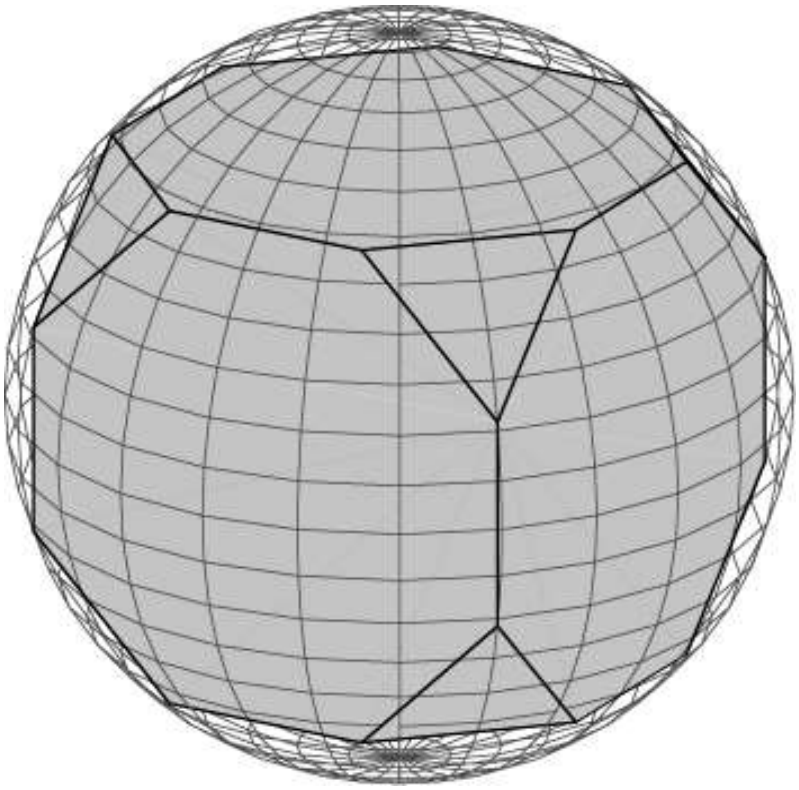
1. Сколько вершин у n-угольной призмы?
2. Сколько ребер у n-угольной призмы?
3. Сколько граней имеет n-угольной призма?
4. Сколько вершин у n-угольной антипризмы?
5. Сколько ребер у n-угольной антипризмы?
6. Сколько граней имеет n-угольная антипризма?
7. Найдите высоту четырехугольной антипризмы, все ребра которой равны 1.
8. Имеет ли пятиугольная призма центр симметрии?
9. Имеет ли четырехугольная антипризма центр симметрии?
10. Имеет ли пятиугольная призма оси симметрии? Если имеет, то сколько?
11. Имеет ли четырехугольная антипризма оси симметрии? Если имеет, то сколько?
12. Имеет ли пятиугольная призма плоскости симметрии? Если имеет, то сколько?
13. Имеет ли четырехугольная антипризма плоскости симметрии? Если имеет, то сколько?
14. Нарисуйте какую-нибудь развертку пятиугольной призмы.
15. Нарисуйте какую-нибудь развертку четырехугольной антипризмы.
16. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней пятиугольной призмы?
17. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней четырехугольной антипризмы?
18. Можно ли вписать сферу в пятиугольной призму, все ребра которой равны 1?
19. Можно ли вписать сферу в четырехугольной антипризму, все ребра которой равны 1?
20. Можно ли описать сферу около правильной пятиугольной призмы?
21. Можно ли описать сферу около правильной четырехугольной антипризмы?
22. Существует ли сфера, полувписанная в правильную пятиугольную призму?
23. Существует ли сфера, полувписанная в правильную четырехугольную антипризму?

2. Усеченный куб

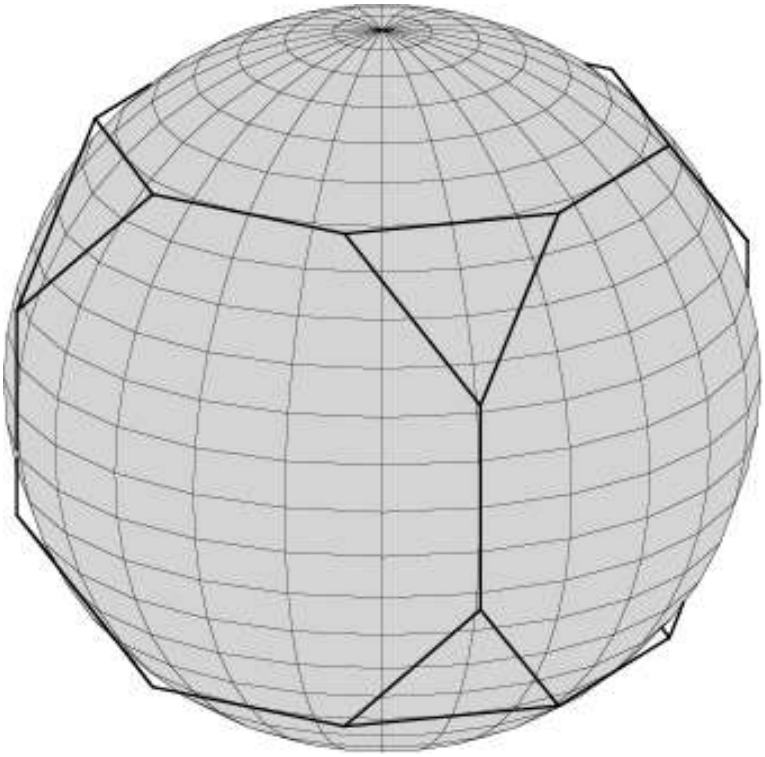
Усеченный куб – полуправильный многогранник, получающийся из куба отсечением от его углов правильных треугольных пирамид. Поверхность усеченного куба состоит из правильных треугольников и восьмиугольников.



Около усеченного куба можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного куба.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный куб. Она касается всех ребер усеченного куба.

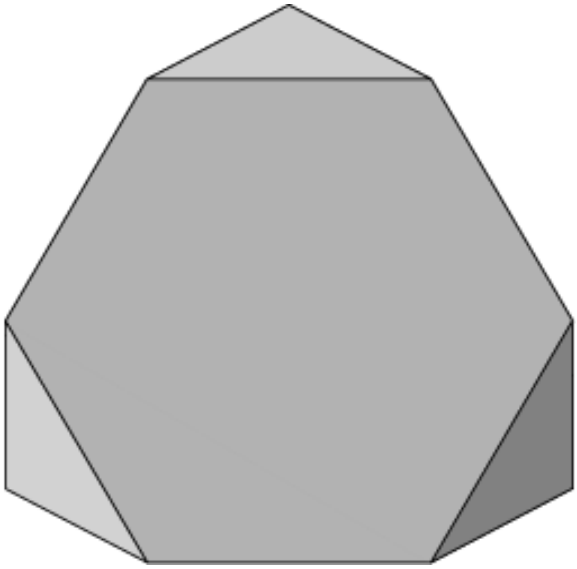


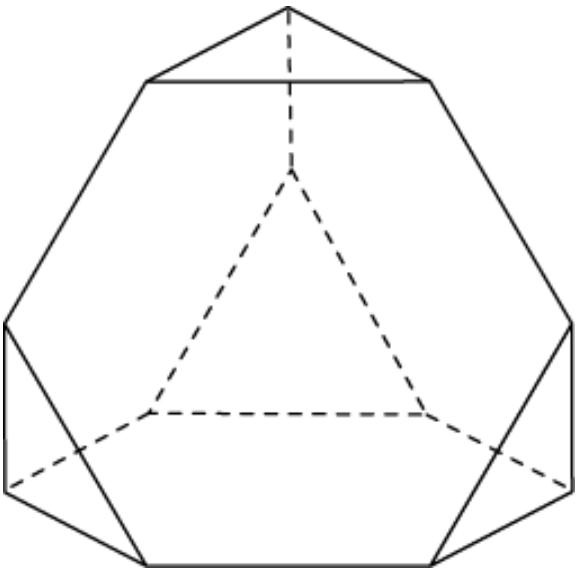
Упражнения

1. Сколько вершин у усеченного куба?
2. Сколько ребер у усеченного куба?
3. Сколько граней имеет усеченный куб?
4. Какими должны быть боковые ребра правильных треугольных пирамид, отсекаемых от единичного куба, чтобы в результате получился усеченный куб?
5. Найдите ребро усеченного куба, полученного усечением куба с ребром 1.
6. Имеет ли усеченный куб центр симметрии?
7. Сколько осей симметрии имеет усеченный куб?
8. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный куб?
9. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный куб с ребром 1.
10. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного куба.
11. Можно ли вписать сферу в усеченный куб?
12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного куба?

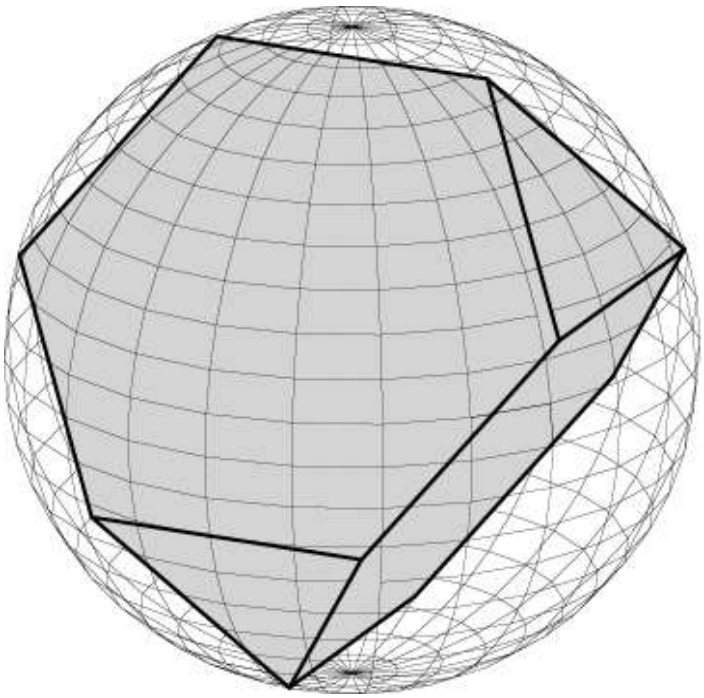
3. Усеченный тетраэдр

Усеченный тетраэдр – полуправильный многогранник, получающийся из тетраэдра отсечением от его углов правильных треугольных пирамид. Поверхность усеченного тетраэдра состоит из правильных треугольников и шестиугольников.

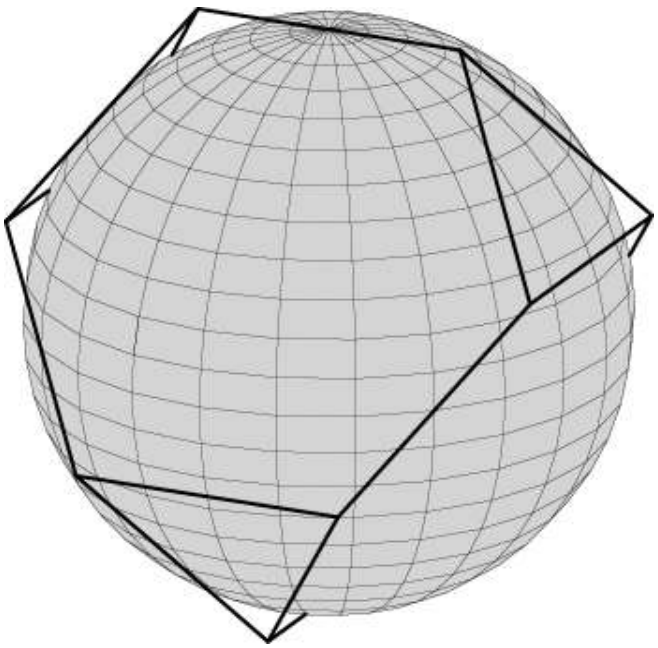




Около усеченного тетраэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного тетраэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный тетраэдр. Она касается всех ребер усеченного тетраэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин у усеченного тетраэдра?

2. Сколько ребер у усеченного тетраэдра?

3. Сколько граней имеет усеченный тетраэдр?

4. Какими должны быть боковые ребра правильных треугольных пирамид, отсекаемых от единичного тетраэдра, чтобы в результате получился усеченный тетраэдр?

5. Найдите ребро усеченного тетраэдра, полученного усечением тетраэдра с ребром 1.

6. Имеет ли усеченный тетраэдр центр симметрии?

7. Сколько осей симметрии имеет усеченный тетраэдр?

8. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный тетраэдр?

9. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный тетраэдр с ребром 1.

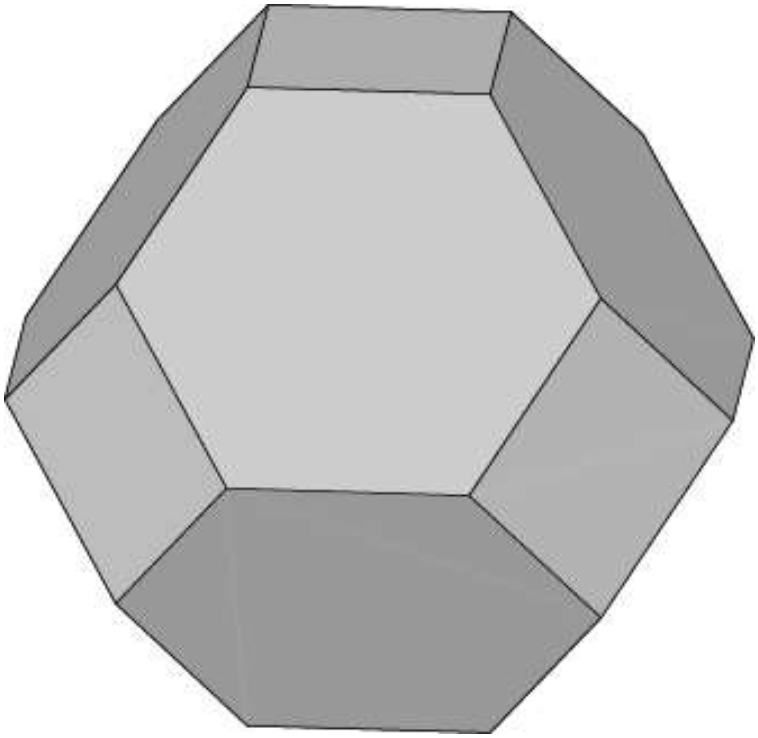
10. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного тетраэдра.

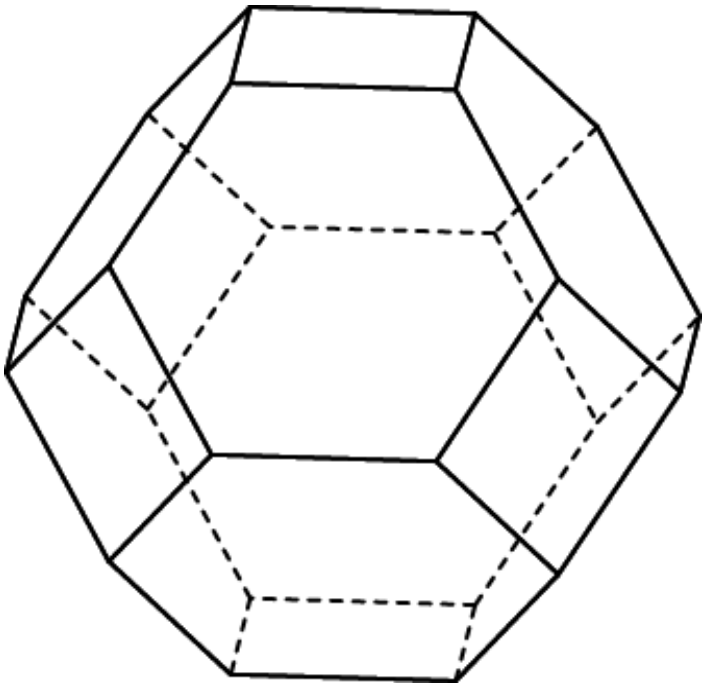
11. Можно ли вписать сферу в усеченный тетраэдр?

12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного тетраэдра?

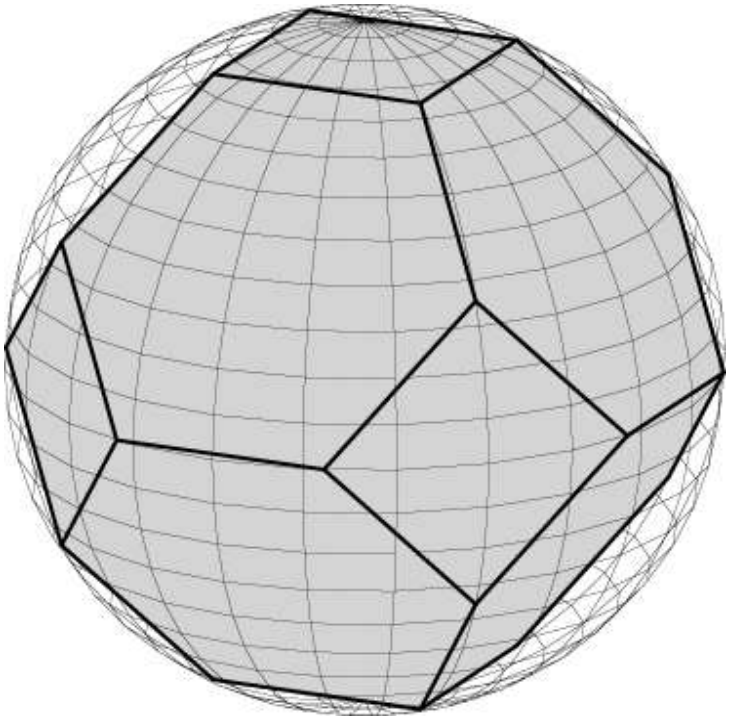
4. Усеченный октаэдр

Усеченный октаэдр – полуправильный многогранник, получающийся из октаэдра отсечением от его углов правильных четырехугольных пирамид. Поверхность усеченного октаэдра состоит из квадратов и правильных шестиугольников.

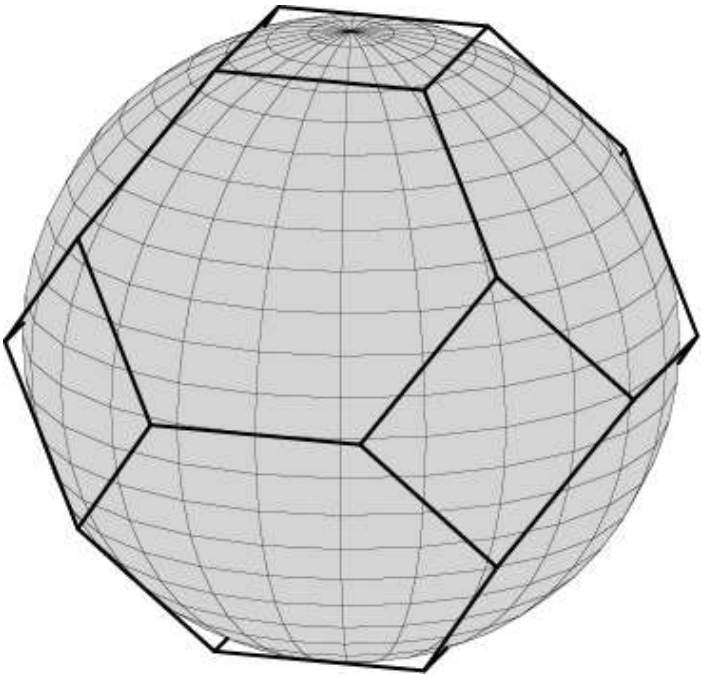




Около усеченного октаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного октаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный октаэдр. Она касается всех ребер усеченного октаэдра.



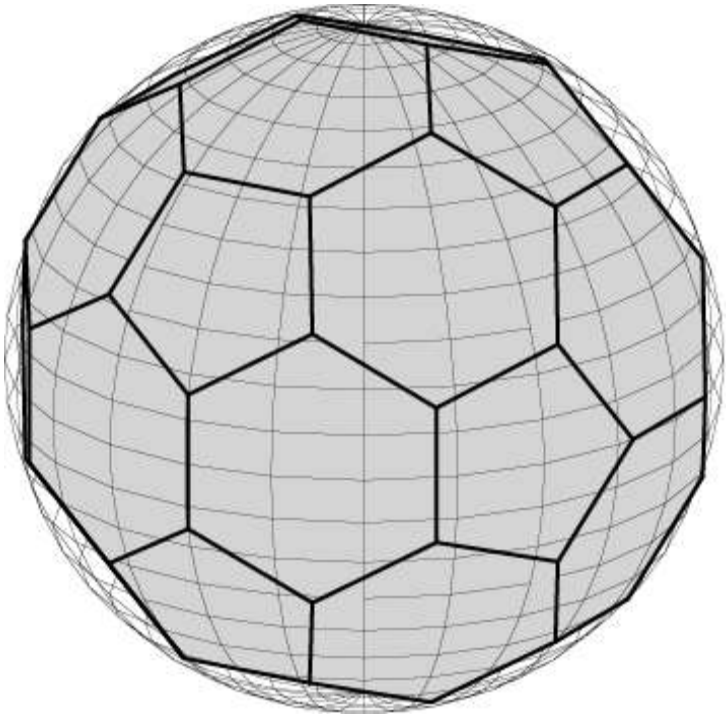
Упражнения

1. Сколько вершин у усеченного октаэдра?
2. Сколько ребер у усеченного октаэдра?
3. Сколько граней имеет усеченный октаэдр?
4. Какими должны быть боковые ребра правильных четырехугольных пирамид, отсекаемых от единичного октаэдра, чтобы в результате получился усеченный октаэдр?
5. Найдите ребро усеченного октаэдра, полученного усечением октаэдра с ребром 1.
6. Какими должны быть боковые ребра правильных треугольных пирамид, отсекаемых от единичного куба, чтобы в результате получился усеченный октаэдр?
7. Имеет ли усеченный октаэдр центр симметрии?
8. Сколько осей симметрии имеет усеченный октаэдр?
9. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный октаэдр?
10. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный октаэдр с ребром 1.
11. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного октаэдра.
12. Можно ли вписать сферу в усеченный октаэдр?
13. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного октаэдра?

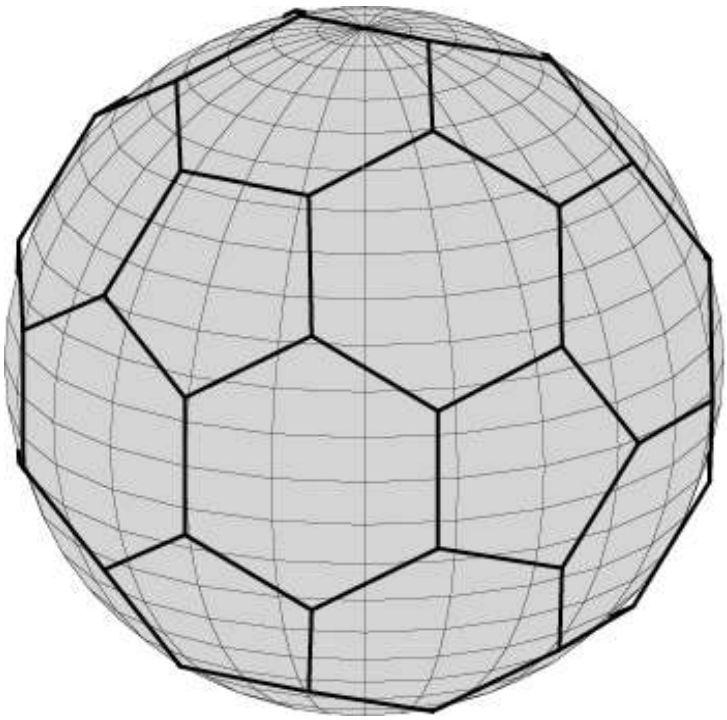
5. Усеченный икосаэдр

Усеченный икосаэдр – полуправильный многогранник, получающийся из икосаэдра отсечением от его углов правильных пятиугольных пирамид. Поверхность усеченного икосаэдра состоит из правильных пятиугольников и шестиугольников.

Около усеченного икосаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного икосаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный икосаэдр. Она касается всех ребер усеченного икосаэдра.

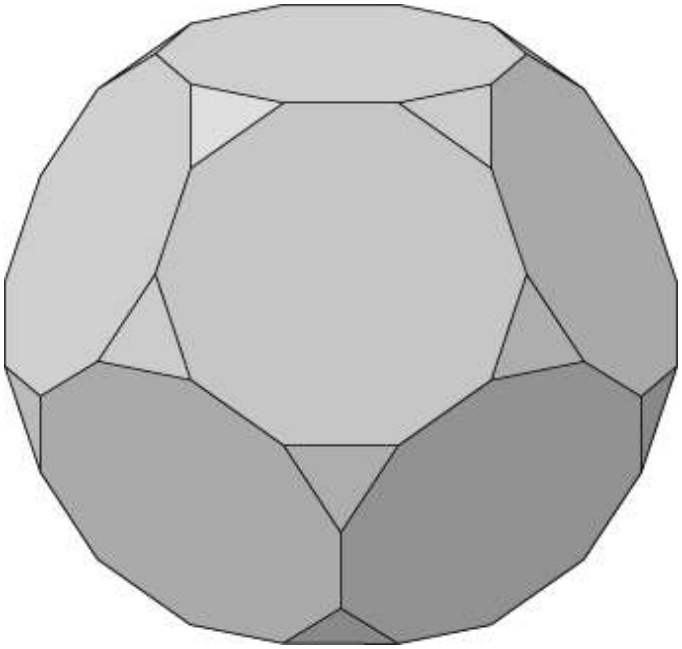


Упражнения

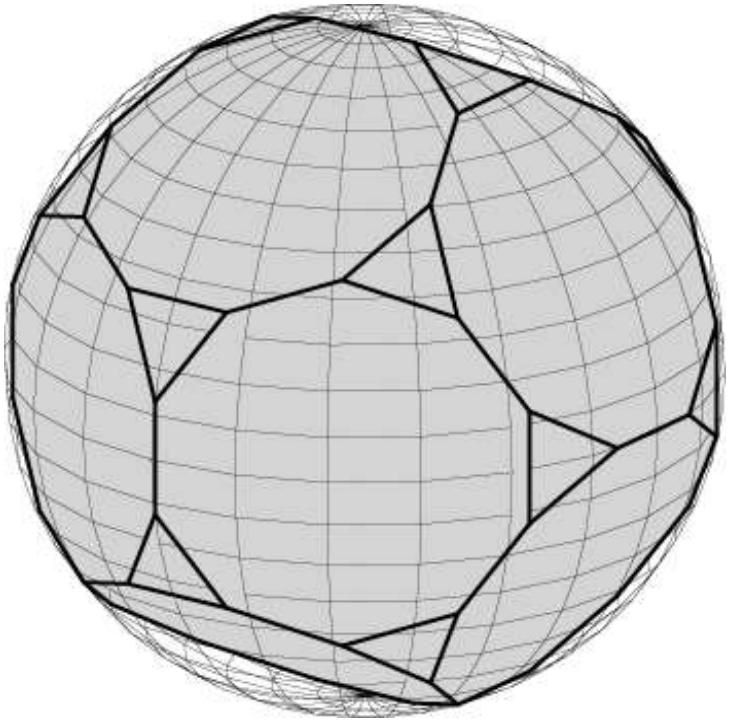
1. Сколько вершин у усеченного икосаэдра?
2. Сколько ребер у усеченного икосаэдра?
3. Сколько граней имеет усеченный икосаэдр?
4. Какими должны быть боковые ребра правильных пятиугольных пирамид, отсекаемых от единичного икосаэдра, чтобы в результате получился усеченный икосаэдр?
5. Найдите ребро усеченного икосаэдра, полученного усечением икосаэдра с ребром 1.
6. Имеет ли усеченный икосаэдр центр симметрии?
7. Сколько осей симметрии имеет усеченный икосаэдр?
8. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный икосаэдр?
9. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный икосаэдр с ребром 1.
10. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного икосаэдра.
11. Можно ли вписать сферу в усеченный икосаэдр?
12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного икосаэдра?

6. Усеченный додекаэдр

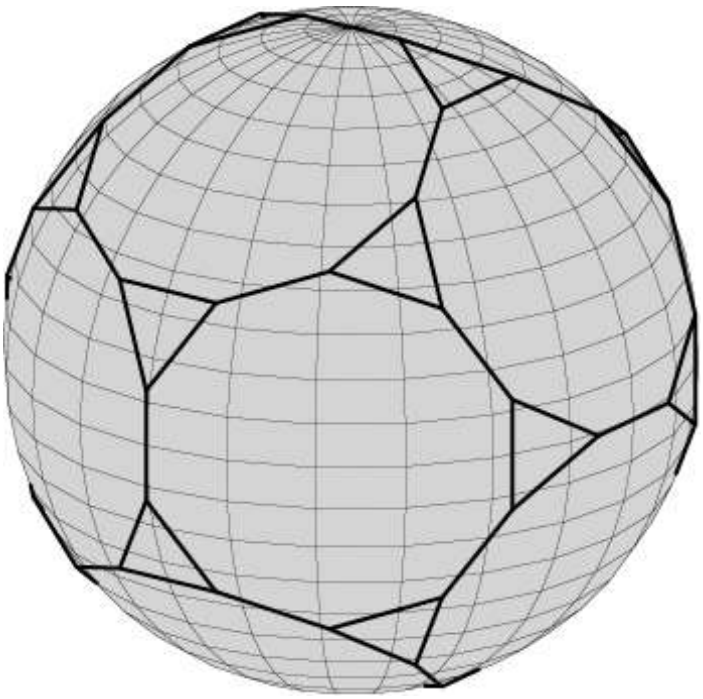
Усеченный додекаэдр – полуправильный многогранник, получающийся из додекаэдра отсечением от его углов правильных треугольных пирамид. Поверхность усеченного додекаэдра состоит из правильных треугольников и десятиугольников.



Около усеченного додекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного додекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный додекаэдр. Она касается всех ребер усеченного додекаэдра.

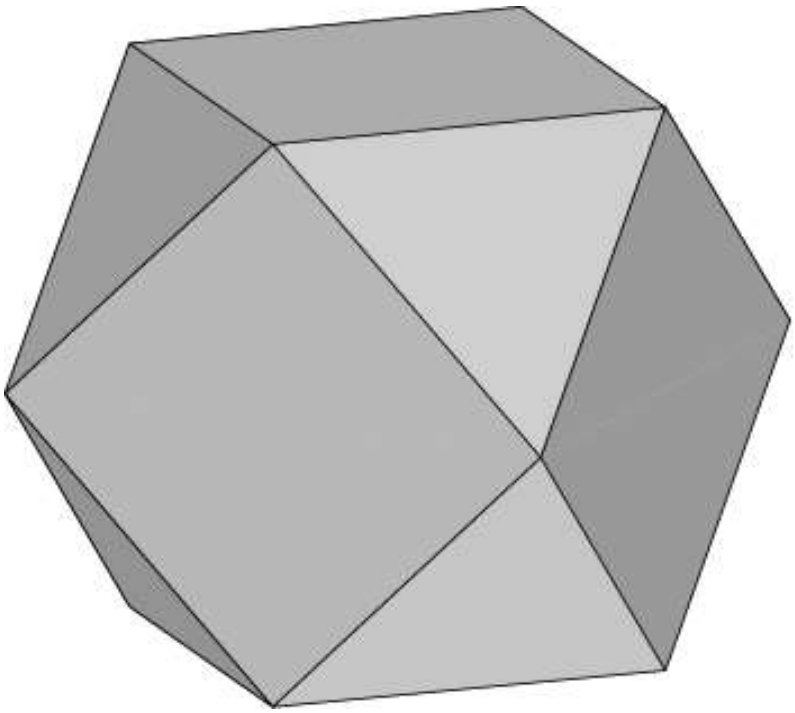


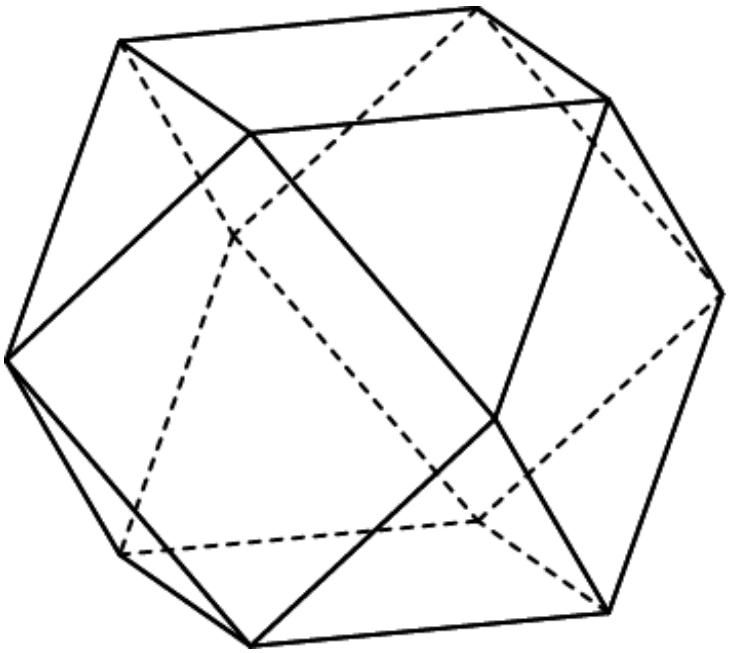
Упражнения

1. Сколько вершин у усеченного додекаэдра?
2. Сколько ребер у усеченного додекаэдра?
3. Сколько граней имеет усеченный додекаэдр?
4. Какими должны быть боковые ребра правильных треугольных пирамид, отсекаемых от единичного додекаэдра, чтобы в результате получился усеченный додекаэдр?
5. Найдите ребро усеченного додекаэдра, полученного усечением додекаэдра с ребром 1.
6. Имеет ли усеченный додекаэдр центр симметрии?
7. Сколько осей симметрии имеет усеченный додекаэдр?
8. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный додекаэдр?
9. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный додекаэдр с ребром 1.
10. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного додекаэдра?
11. Можно ли вписать сферу в усеченный додекаэдр?
12. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного додекаэдра?

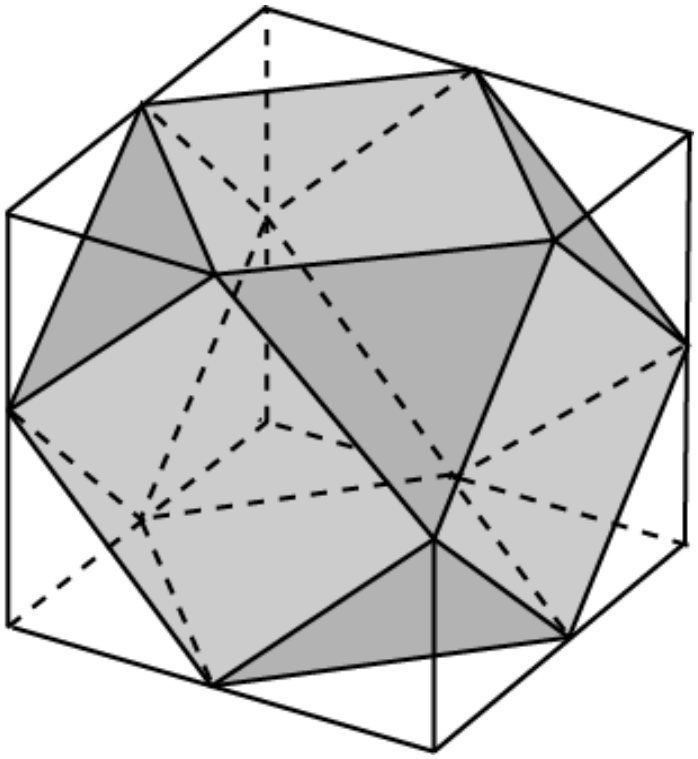
7. Кубооктаэдр

Кубооктаэдр – многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (как у куба) и восьми правильных треугольников (как у октаэдра). Отсюда и его название – кубооктаэдр.

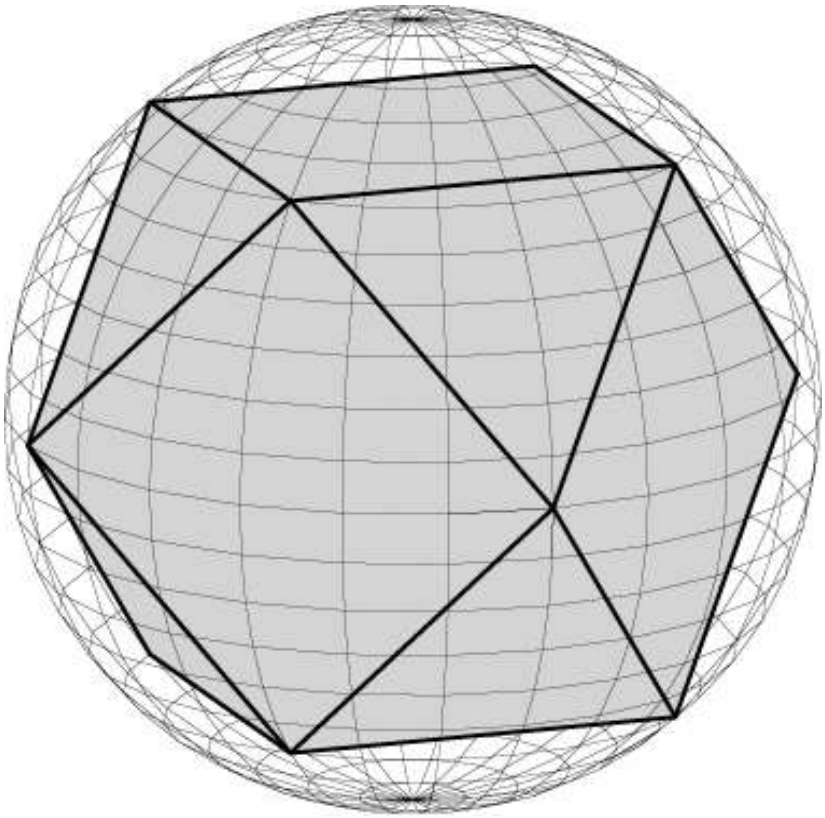




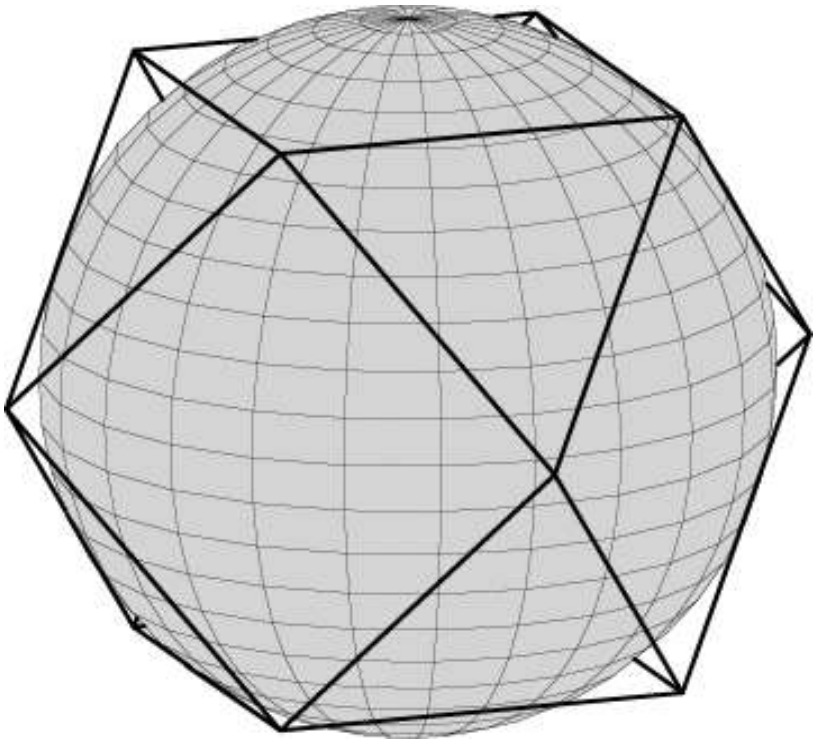
Кубооктаэдр получается из куба отсечением от его вершин правильных треугольных пирамид, боковые ребра которых равны половине ребра куба.



Около кубооктаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины кубооктаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в кубооктаэдр. Она касается всех ребер кубооктаэдра.

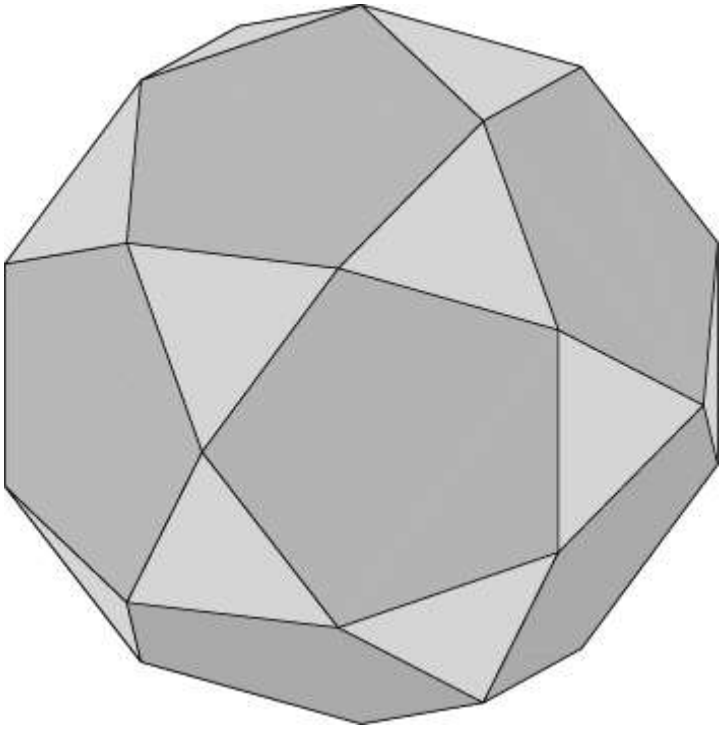


Упражнения

1. Сколько вершин имеет кубооктаэдр?
2. Сколько ребер имеет кубооктаэдр?
3. Сколько граней имеет кубооктаэдр?
4. Найдите ребро кубооктаэдра, полученного усечением единичного куба.
5. Имеет ли кубооктаэдр центр симметрии?
6. Сколько осей симметрии имеет кубооктаэдр?
7. Сколько плоскостей симметрии имеет кубооктаэдр?
8. Как можно получить кубооктаэдр усечением октаэдра?
9. Найдите расстояние между противоположными вершинами единичного кубооктаэдра.
10. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного кубооктаэдра.
11. Найдите радиус сферы, описанной около кубооктаэра с ребром 1.
12. Найдите радиус сферы, полувписанной в кубооктаэдр с ребром 1.
13. Можно ли вписать сферу в кубооктаэдр? Если можно, найдите ее радиус?
14. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней кубооктаэдра?

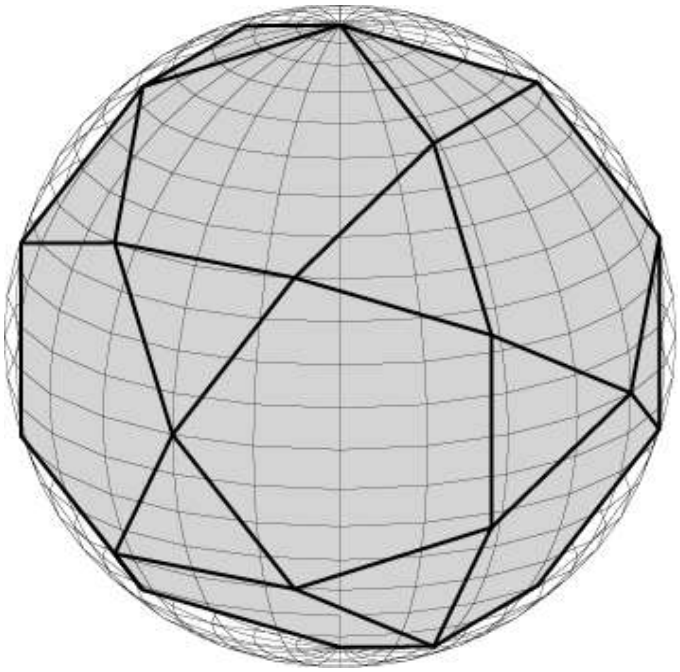
8. Икосододекаэдр

Икосододекаэдр – многогранник, поверхность которого состоит из двадцати правильных треугольников (как у икосаэдра) и двенадцати правильных пятиугольников (как у додекаэдра). Отсюда и его название – икосододекаэдр.

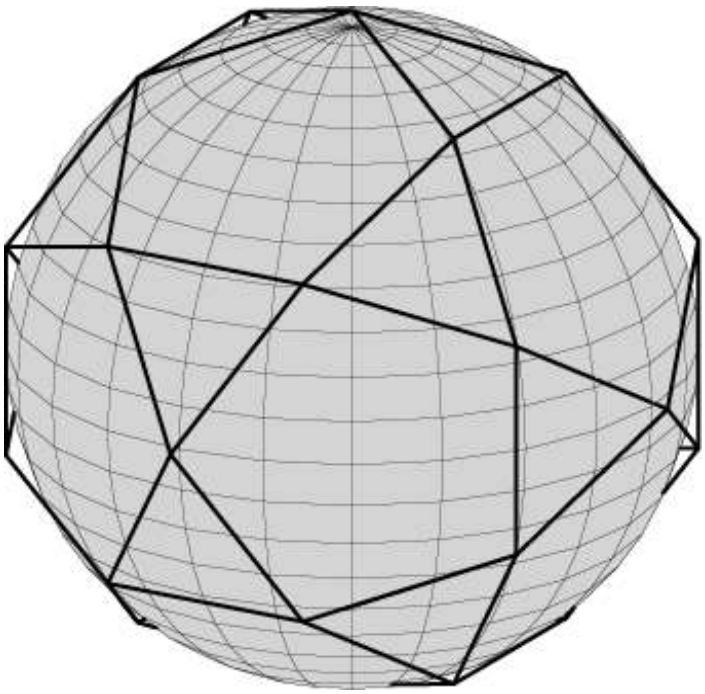


Икосододекаэдр получается из додекаэдра отсечением от его вершин правильных треугольных пирамид, боковые ребра которых равны половине ребра додекаэдра.

Около икосододекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины икосододекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в икосододекаэдр. Она касается всех ребер икосододекаэдра.

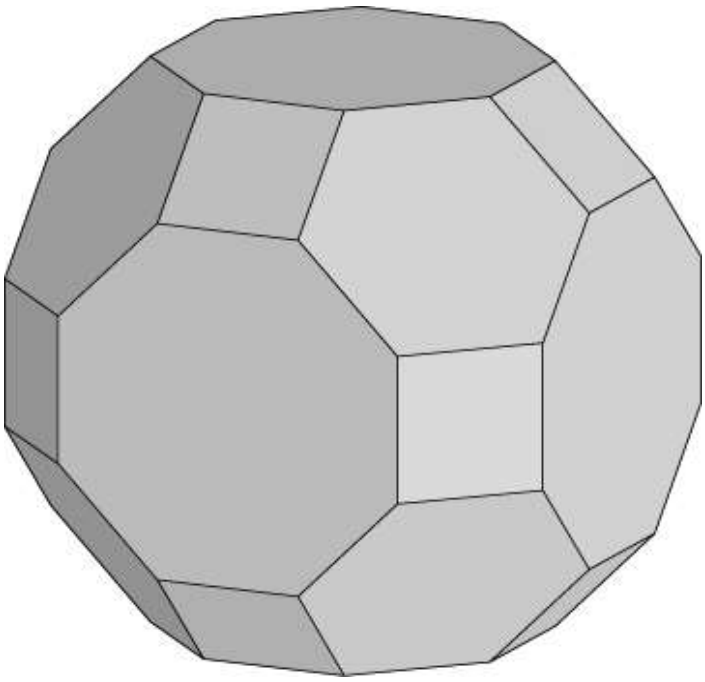


Упражнения

1. Сколько вершин имеет икосододекаэдр?
2. Сколько ребер имеет икосододекаэдр?
3. Сколько граней имеет икосододекаэдр?
4. Найдите ребро икосододекаэдра, полученного усечением додекаэдра с ребром 1.
5. Имеет ли икосододекаэдр центр симметрии?
6. Сколько осей симметрии имеет икосододекаэдр?
7. Сколько плоскостей симметрии имеет икосододекаэдр?
8. Как икосододекаэдр можно получить усечением икосаэдра?
9. Найдите расстояние между противоположными вершинами единичного икосододекаэдра.
10. Найдите расстояние между противоположными ребрами единичного икосододекаэдра.
11. Найдите радиус сферы, описанной около единичного икосододекаэра.
12. Найдите радиус сферы, полувписанной в единичный икосододекаэдр.
13. Можно ли вписать сферу в икосододекаэдр? Если да, то найдите ее радиус.
14. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней икосододекаэдра?

9. Усеченный кубооктаэдр

Усеченный кубооктаэдр – многогранник, изображенный на рисунке. Его поверхность состоит из правильных восьмиугольников, шестиугольников и квадратов.

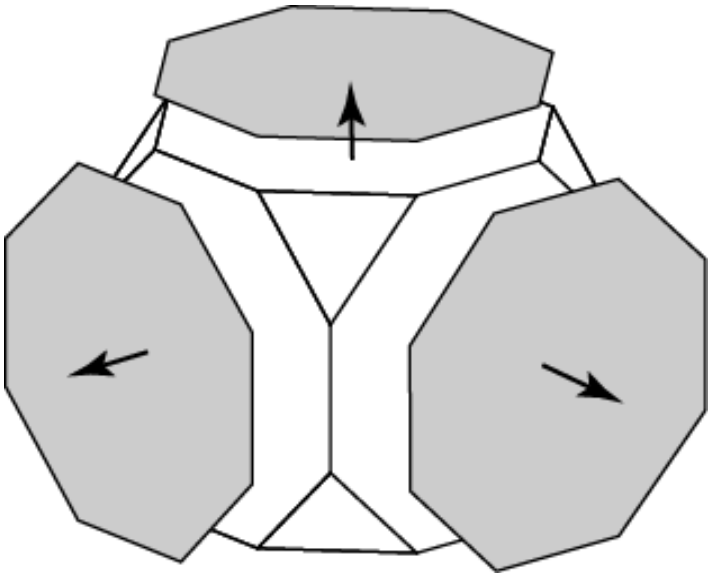


Несмотря на название, этот многогранник не получается усечением кубооктаэдра. Усечением кубооктаэдра получается многогранник, гранями которого будут не квадраты, а прямоугольники, а вместо правильных шестиугольников – неправильные.

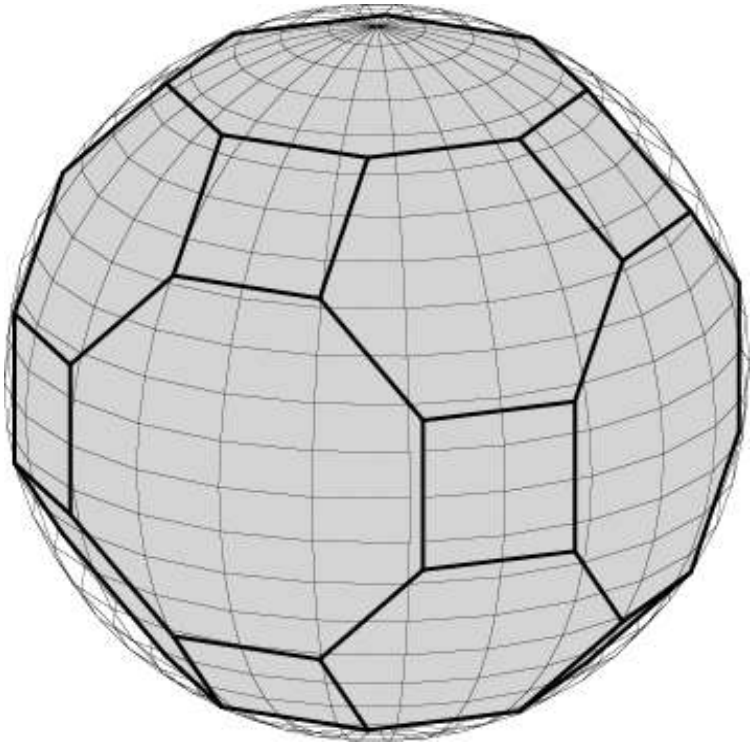
Так получается потому, что четырехгранные углы кубооктаэдра не являются правильными и, следовательно, пирамиды, которые отсекаются от этих углов, также не являются правильными. Их основаниями будут не квадраты, а прямоугольники.

Получить усеченный кубооктаэдр можно из усеченного куба следующим образом.

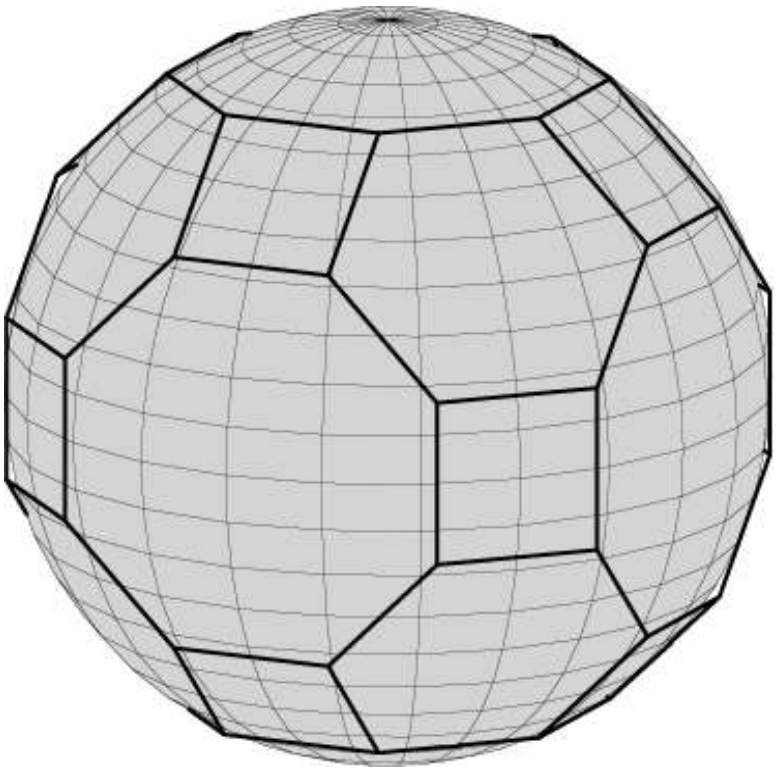
Будем раздвигать правильные восьмиугольники, являющиеся гранями усеченного куба, по направлению от центра так, чтобы расстояние между соседними параллельными ребрами было равно ребру усеченного куба. Образовавшиеся промежутки между этими гранями можно будет заполнить квадратами и правильными шестиугольниками.



Около усеченного кубооктаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного кубооктаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный кубооктаэдр. Она касается всех ребер усеченного кубооктаэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин имеет усеченный кубооктаэдр?

2. Сколько ребер имеет усеченный кубооктаэдр?

3. Сколько граней имеет усеченный кубооктаэдр? Сколько из них восьмиугольников, шестиугольников и квадратов?

4. На какое расстояние нужно переместить восьмиугольные грани усеченного куба с ребром 1, по направлению от центра, чтобы получить усеченный кубооктаэдр?

5. Имеет ли усеченный кубооктаэдр центр симметрии?

6. Сколько осей симметрии имеет усеченный кубооктаэдр?

7. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный кубооктаэдр?

8. Найдите радиус сферы, полувписанной в усеченный кубооктаэдр с ребром 1.

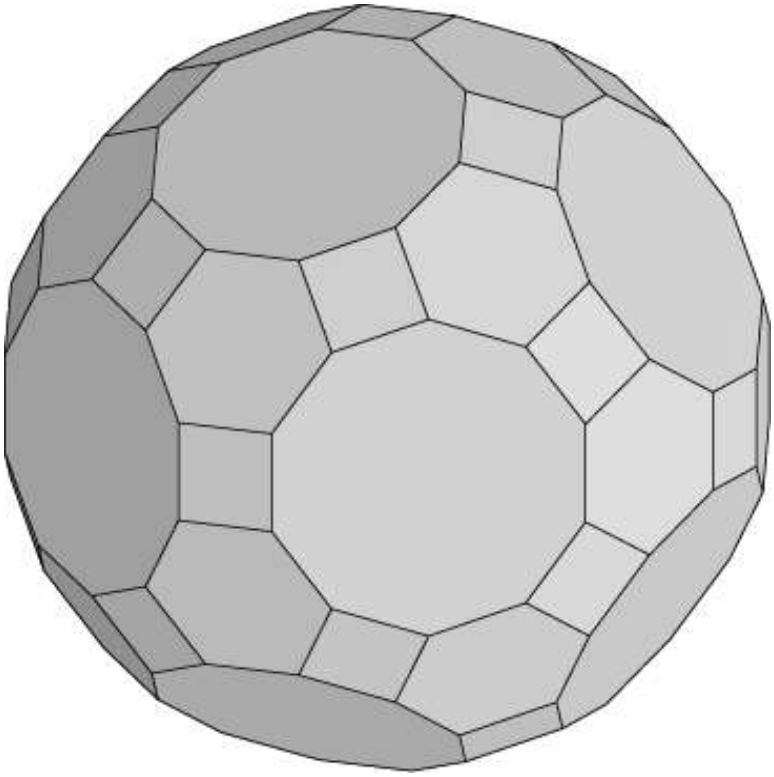
9. Найдите радиус сферы, описанной около усеченного кубооктаэра

10. Можно ли вписать сферу в усеченный кубооктаэдр?

11. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного кубооктаэдра?

10. Усеченный икосододекаэдр

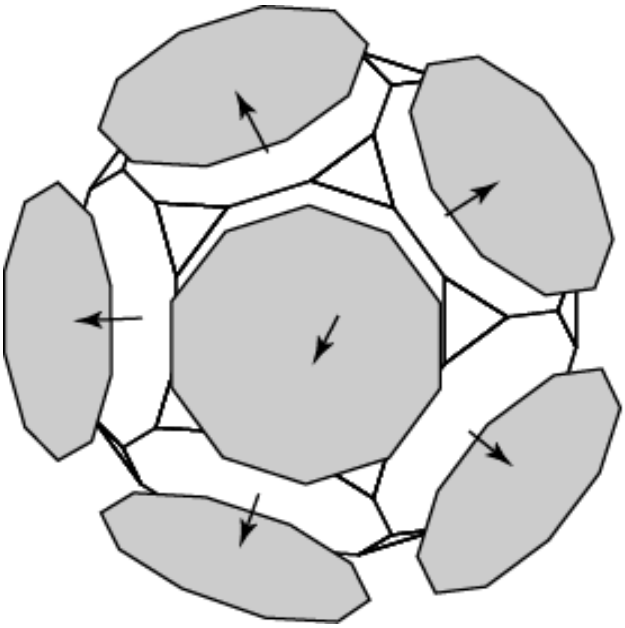
Усеченный икосододекаэдр – многогранник, изображенный на рисунке. Его поверхность состоит из правильных десятиугольников, правильных шестиугольников и квадратов.



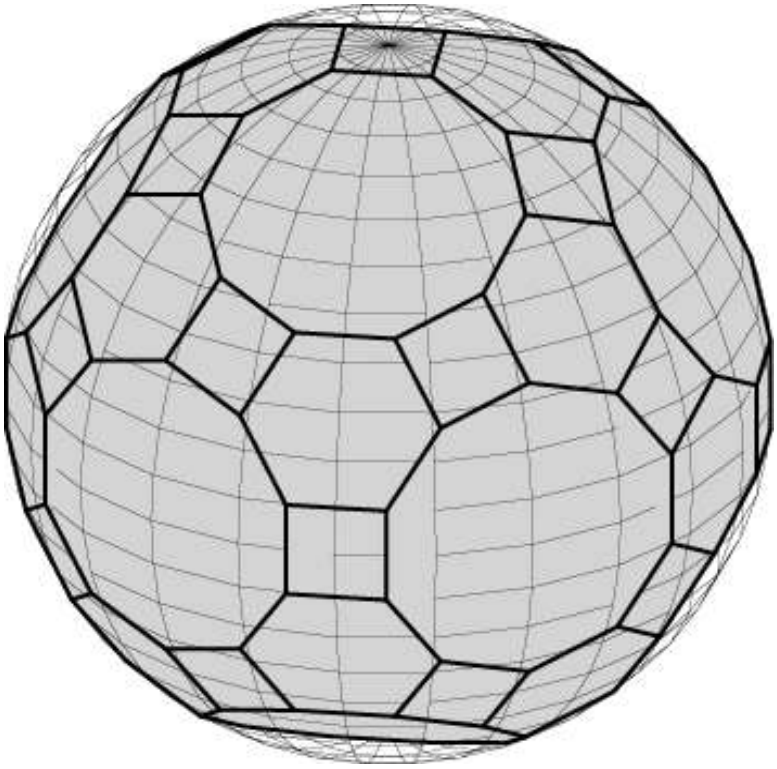
Несмотря на название, этот многогранник не получается усечением икосододекаэдра. Усечением икосододекаэдра получается многогранник, гранями которого вместо квадратов будут прямоугольники, а вместо правильных шестиугольников – неправильные.

Это происходит потому, что четырехгранные углы икосододекаэдра не являются правильными и, следовательно, пирамиды, которые отсекаются от этих углов, также не являются правильными. Их основаниями будут не квадраты, а прямоугольники.

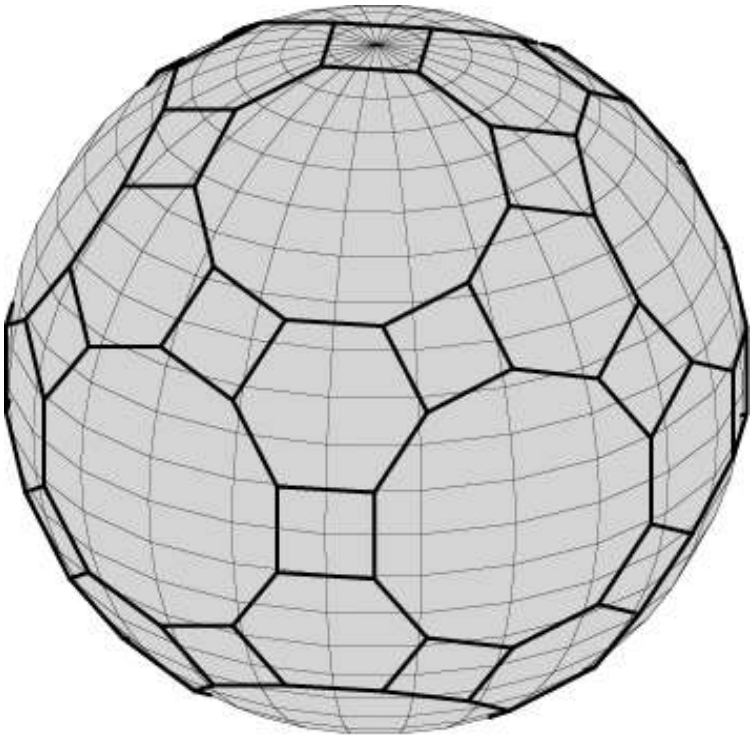
Получить усеченный икосододекаэдр можно из усеченного додекаэдра следующим образом. Будем раздвигать правильные десятиугольники, являющиеся гранями усеченного додекаэдра, по направлению от центра так, чтобы расстояние между соседними параллельными ребрами было равно ребру усеченного додекаэдра. Образовавшиеся промежутки между этими гранями можно будет заполнить квадратами и правильными шестиугольниками.



Около усеченного икосододекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины усеченного икосододекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в усеченный икосододекаэдр. Она касается всех его ребер.

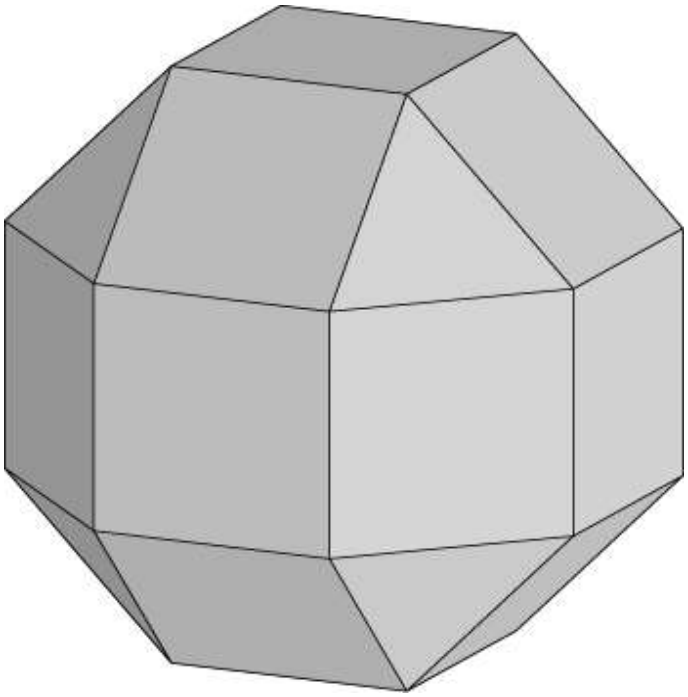


Упражнения

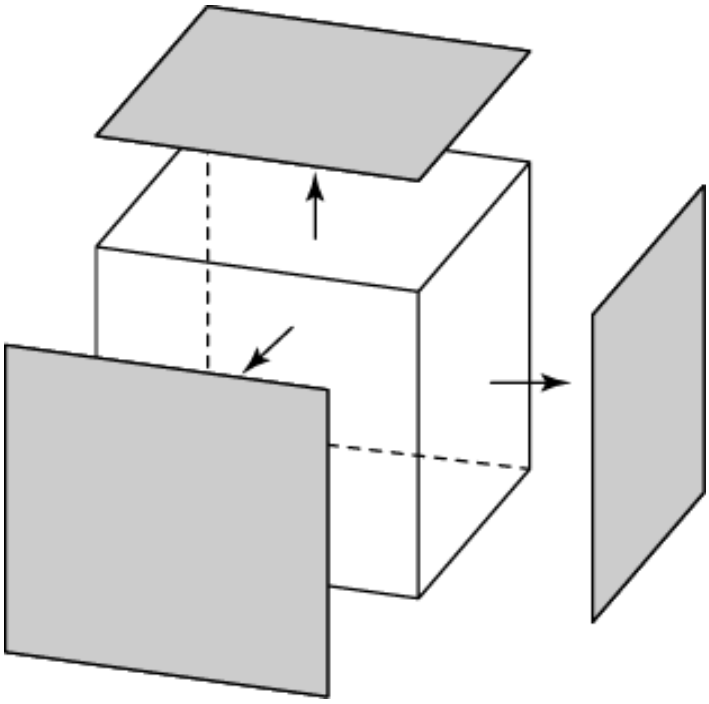
1. Сколько вершин имеет усеченный икосододекаэдр?
2. Сколько ребер имеет усеченный икосододекаэдр?
3. Сколько граней имеет усеченный икосододекаэдр? Сколько из них десятиугольников, шестиугольников и квадратов?
4. Имеет ли усеченный икосододекаэдр центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет усеченный икосододекаэдр?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет усеченный икосододекаэдр?
7. Можно ли вписать сферу в усеченный икосододекаэдр?
8. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней усеченного икосододекаэдра?

11. Ромбокубооктаэдр

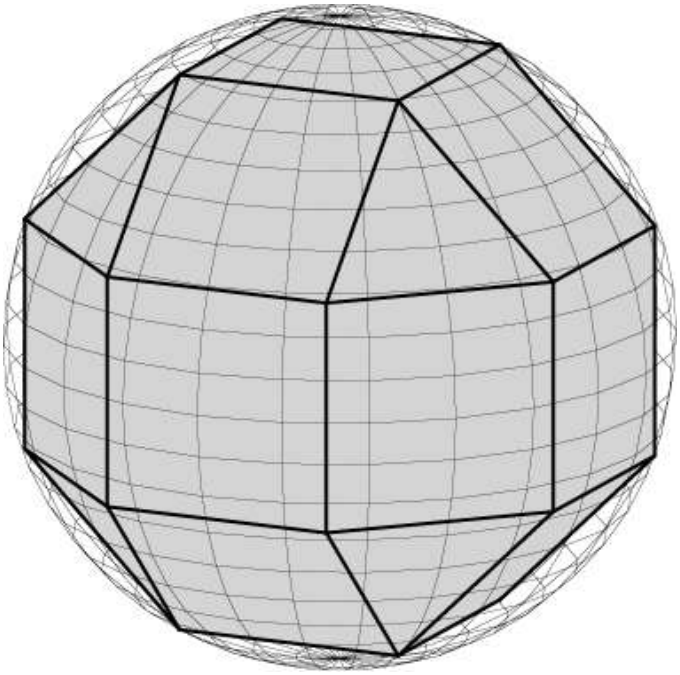
Ромбокубооктаэдр – многогранник, изображенный на рисунке. Его гранями являются квадраты и правильные треугольники.



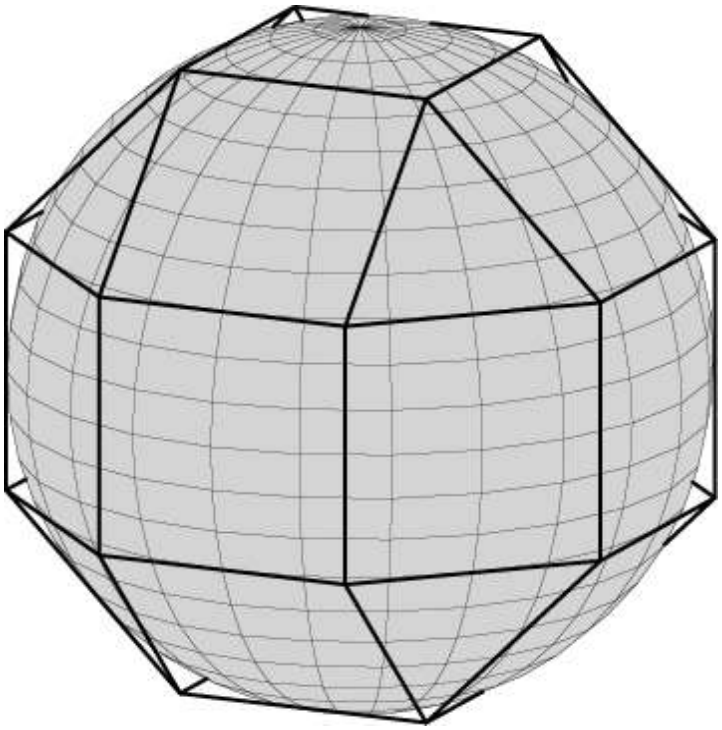
Получить ромбокубооктаэдр можно из куба следующим образом. Будем раздвигать квадраты, являющиеся гранями куба, по направлению от центра так, чтобы расстояние между соседними параллельными ребрами было равно ребру куба. Образовавшиеся промежутки между этими гранями можно будет заполнить квадратами и правильными треугольниками.



Около ромбоубооктаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины ромбокубооктаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в ромбокубооктаэдр. Она касается всех ребер ромбокубооктаэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин имеет ромбокубооктаэдр?

2. Сколько ребер имеет ромбокубооктаэдр?

3. Сколько граней имеет ромбокубооктаэдр? Сколько из них треугольников и квадратов?

4. На какое расстояние нужно переместить грани куба с ребром 1, по направлению от центра, чтобы получить ромбокубооктаэдр?

5. Имеет ли ромбокубооктаэдр центр симметрии?

6. Сколько осей симметрии имеет ромбокубооктаэдр?

7. Сколько плоскостей симметрии имеет ромбокубооктаэдр?

8. Найдите радиус сферы, полувписанной в ромбокубооктаэдр с ребром 1.

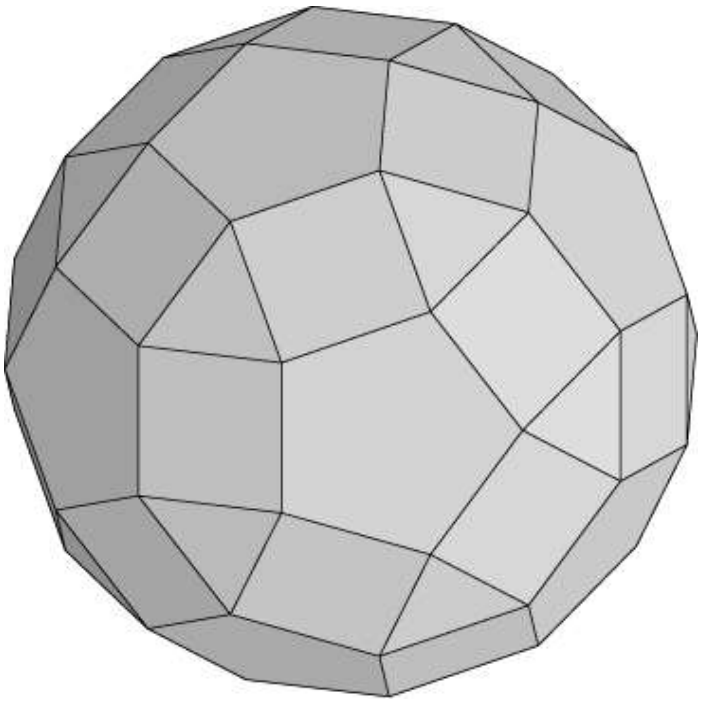
9. Найдите радиус сферы, описанной около ромбокубооктаэра.

10. Можно ли вписать сферу в ромбокубооктаэдр?

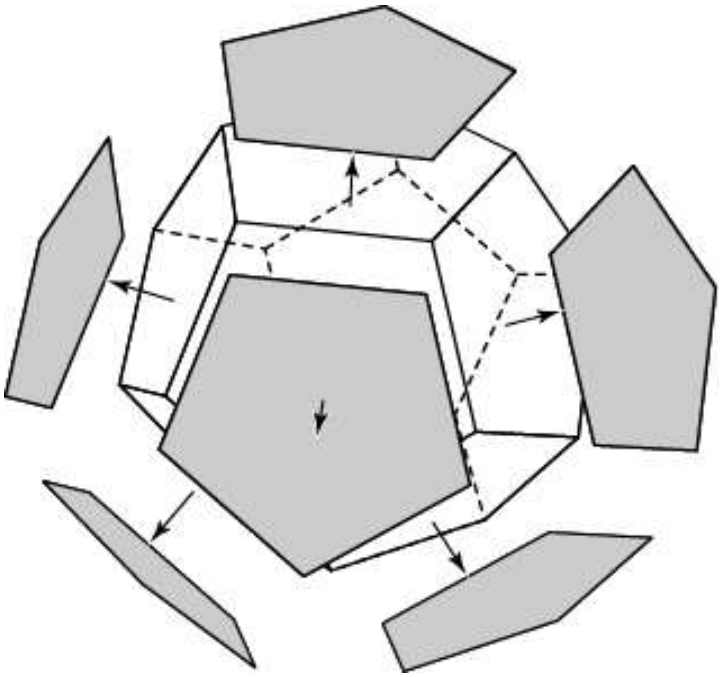
11. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней ромбокубооктаэдра?

12. Ромбоикосододекаэдр

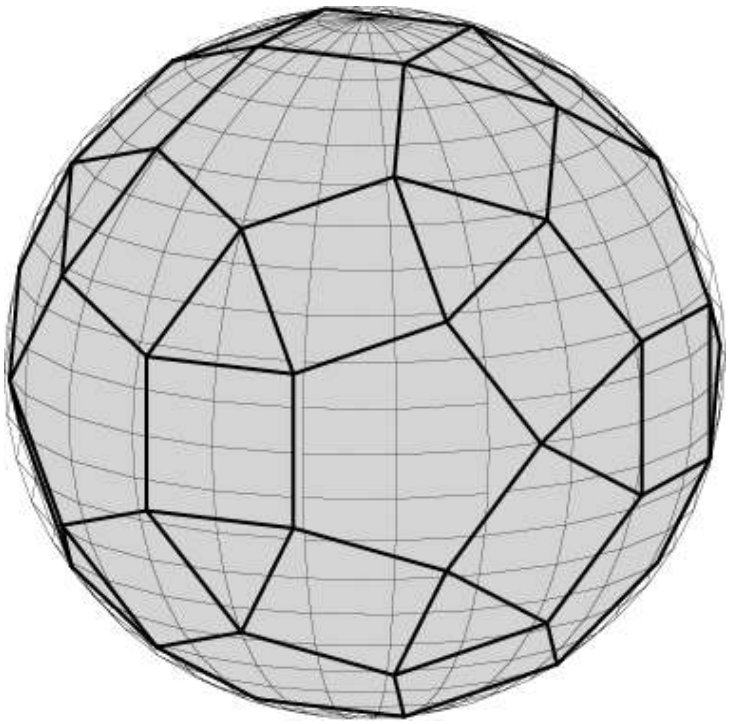
Ромбоикосододекаэдр – многогранник, изображенный на рисунке. Его поверхность состоит из правильных пятиугольников, треугольников и квадратов.



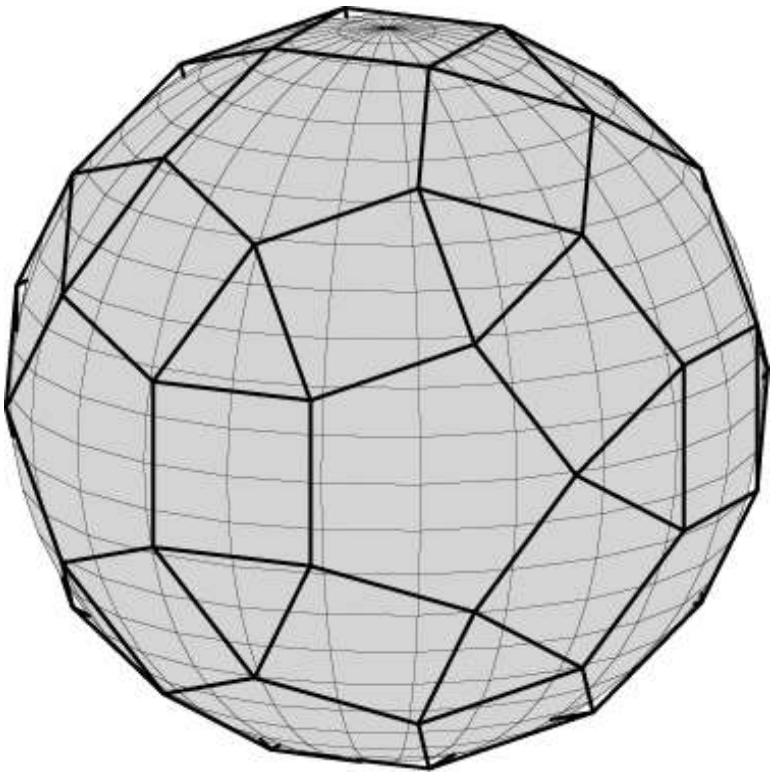
Получить ромбоикосододекаэдр можно из додекаэдра следующим образом. Будем раздвигать правильные пятиугольники, являющиеся гранями додекаэдра, по направлению от центра так, чтобы расстояние между соседними параллельными ребрами было равно ребру додекаэдра. Образовавшиеся промежутки между этими гранями можно будет заполнить квадратами и правильными треугольниками.



Около ромбоикосододекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины ромбоикосододекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в ромбокубооктаэдр. Она касается всех ребер ромбоикосододекаэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин имеет ромбоикосододекаэдр?

2. Сколько ребер имеет ромбоикосододекаэдр?

3. Сколько граней имеет ромбоикосододекаэдр? Сколько из них треугольников, квадратов и пятиугольников?

4. Имеет ли ромбоикосододекаэдр центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет ромбоикосододекаэдр?

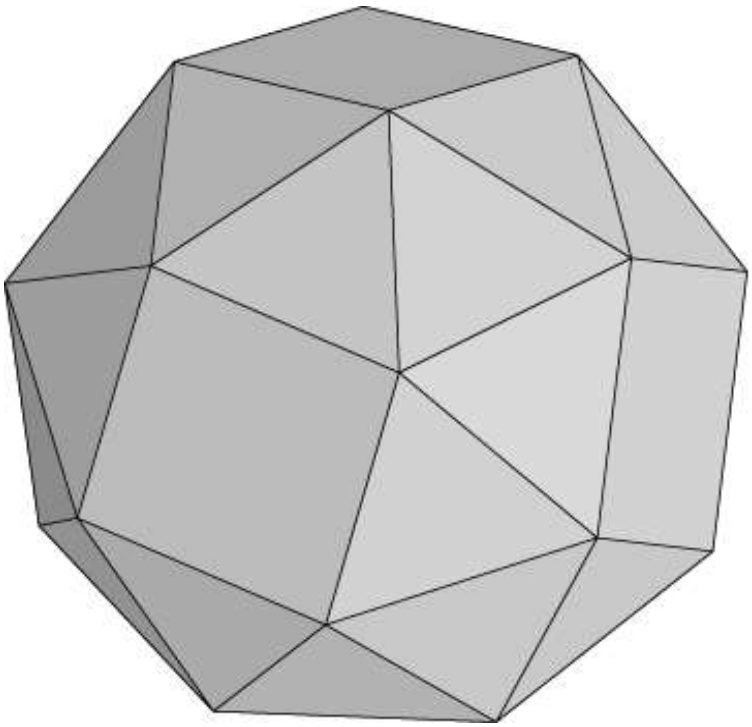
6. Сколько плоскостей симметрии имеет ромбоикосододекаэдр?

7. Можно ли вписать сферу в ромбоикосододекаэдр?

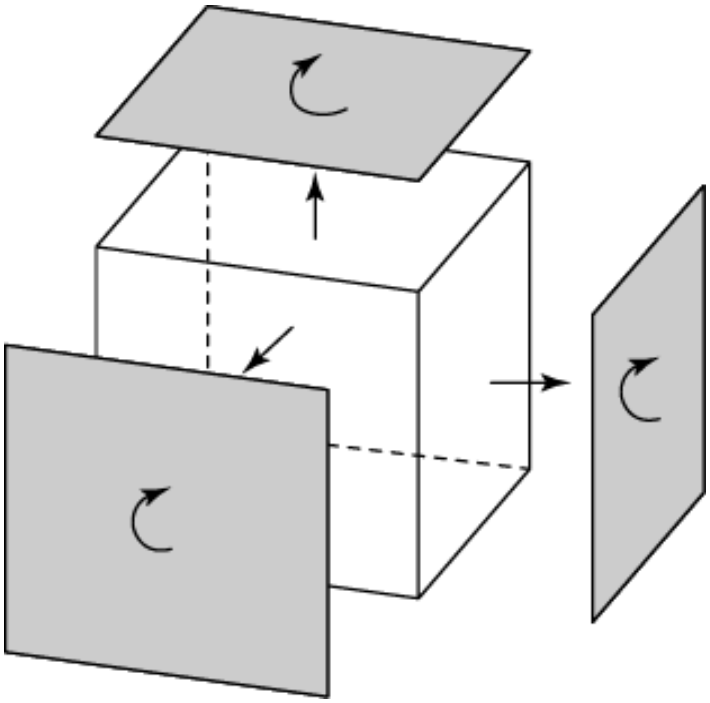
8. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней ромбоикосододекаэдра?

13. Курносый куб

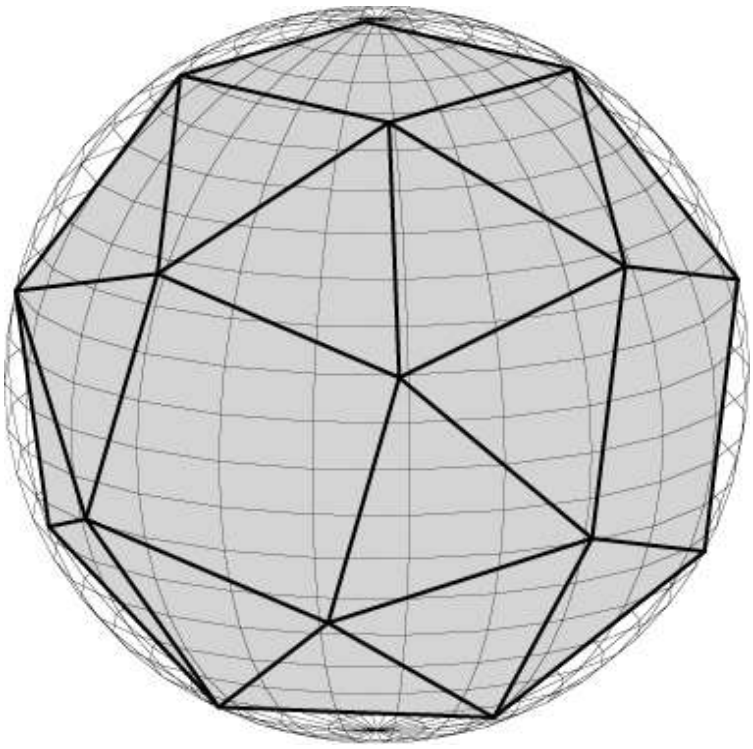
Курносый куб – многогранник, изображенный на рисунке. Его гранями являются квадраты и правильные треугольники.



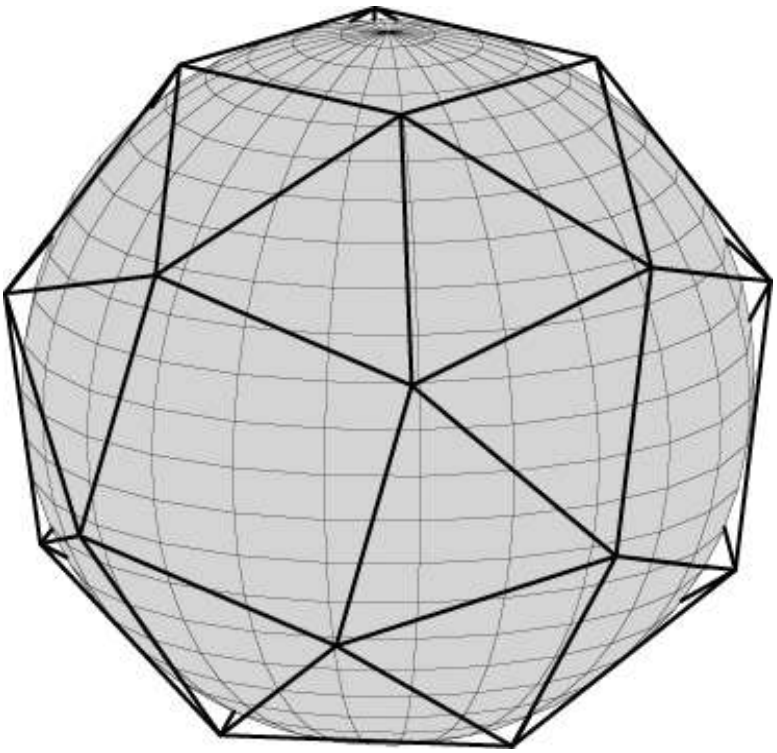
Получить курносый куб можно из ромбокубооктаэдра поворотом квадратных граней, полученных сдвигом граней куба, по часовой стрелке.



Около курносого куба можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины курносого куба.



На рисунке показана сфера, полувписанная в курносый куб. Она касается всех ребер курносого куба.

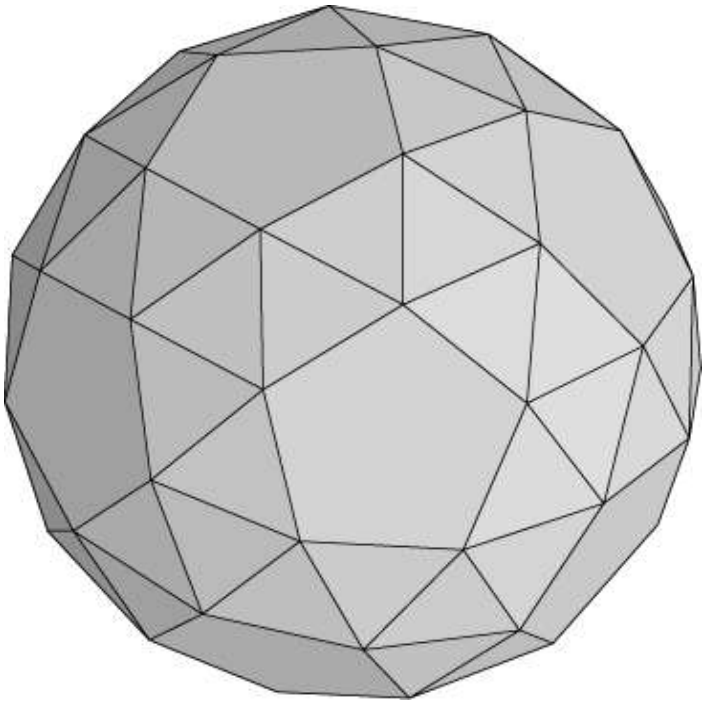


Упражнения

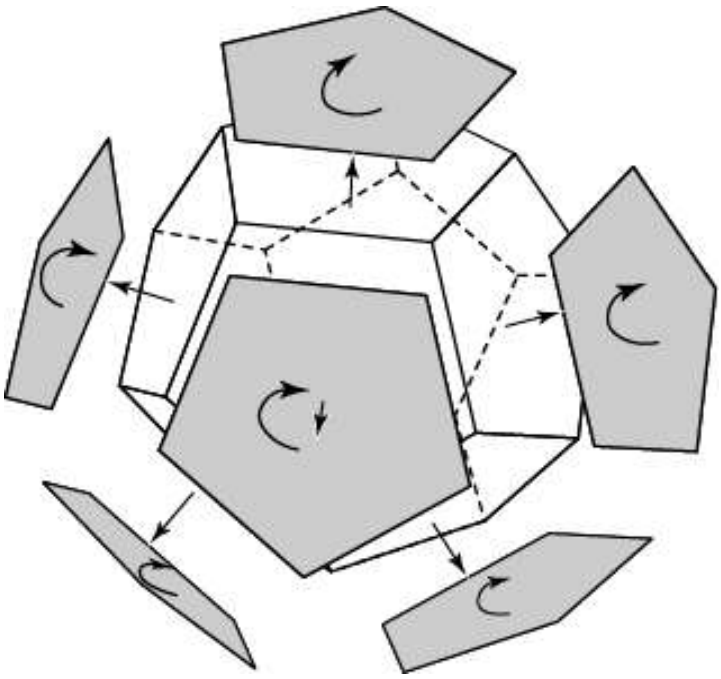
1. Сколько вершин имеет курносый куб?
2. Сколько ребер имеет курносый куб?
3. Сколько граней имеет курносый куб? Сколько из них треугольников и квадратов?
4. Имеет ли курносый куб центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет курносый куб?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет курносый куб?
7. Можно ли вписать сферу в курносый куб?
8. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней курносого куба?

14. Курносый додекаэдр

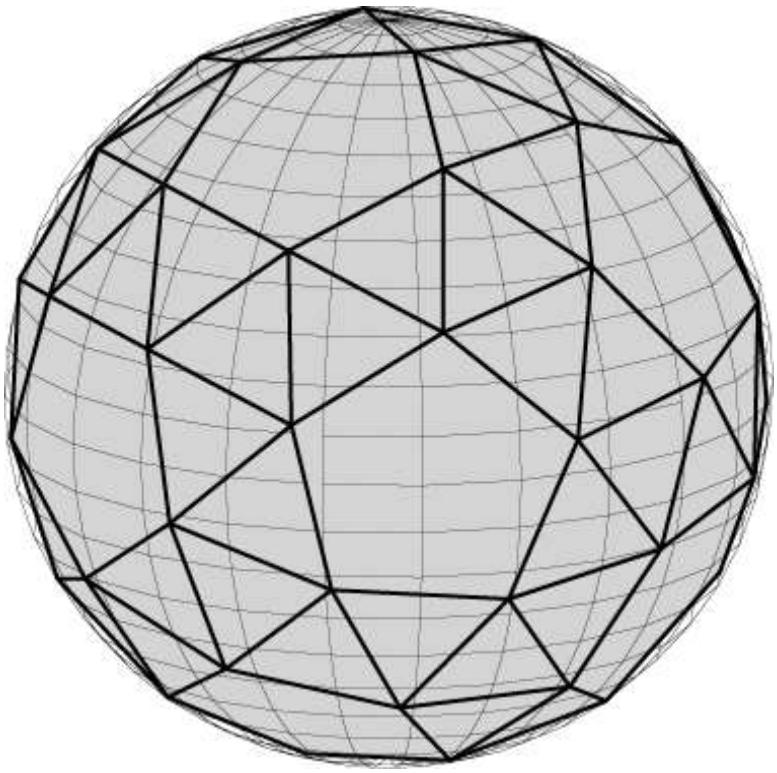
Курносый додекаэдр – многогранник, изображенный на рисунке. Его гранями являются правильные треугольники и пятиугольники.



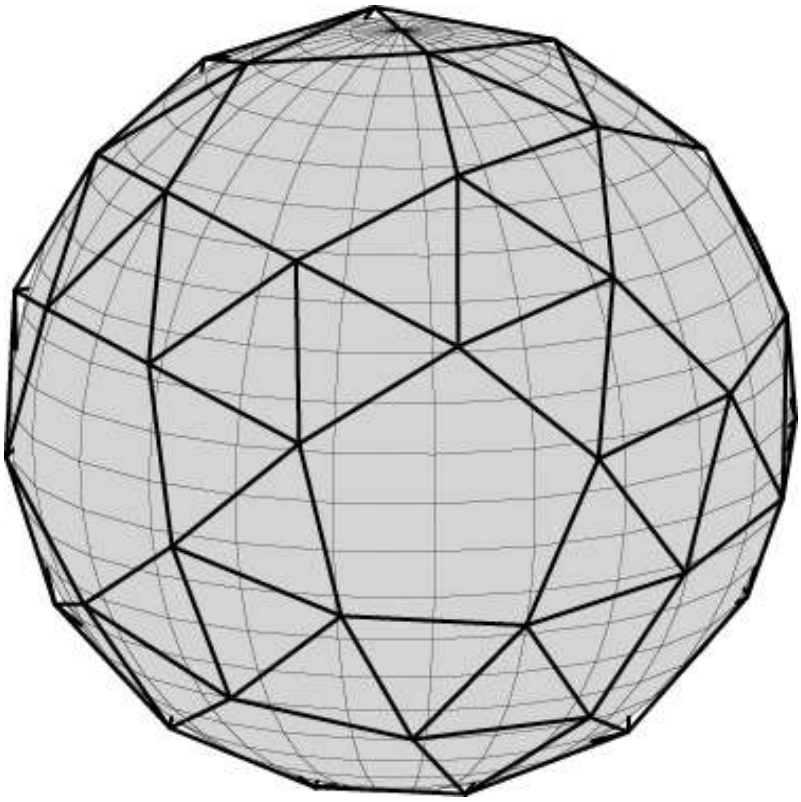
Получить курносый додекаэдр можно из ромбоикосододекаэдра поворотом пятиугольных граней, полученных сдвигом граней додекаэдра, по часовой стрелке.



Около курносого додекаэдра можно описать сферу. Ей принадлежат все вершины курносого додекаэдра.



На рисунке показана сфера, полувписанная в курносый додекаэдр. Она касается всех ребер курносого додекаэдра.



Упражнения

1. Сколько вершин имеет курносый додекаэдр?
2. Сколько ребер имеет курносый додекаэдр?
3. Сколько граней имеет курносый додекаэдр? Сколько из них треугольников и пятиугольников?
4. Имеет ли курносый додекаэдр центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет курносый додекаэдр?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет курносый додекаэдр?
7. Можно ли вписать сферу в курносый додекаэдр?
8. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней курносого додекаэдр?

III. МНОГОГРАННИКИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ПОЛУПРАВИЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКАМ

Для правильных многогранников понятие двойственности можно определить следующим образом. Многогранником двойственным к правильному многограннику, называется многогранник, вершинами которого являются центры граней данного многогранника.

Двойственными многогранниками являются куб и октаэдр, икосаэдр и додекаэдр, тетраэдр двойственен самому себе.

Одним из характеристических свойств двойственных многогранников является то, что число вершин многогранника равно числу граней двойственного ему многогранника, а числа ребер у двойственных многогранников совпадают.

К сожалению, данное выше определение двойственности для правильных многогранников не переносится на полуправильные многогранники. Для полуправильных многогранников мы воспользуемся другим определением двойственности.

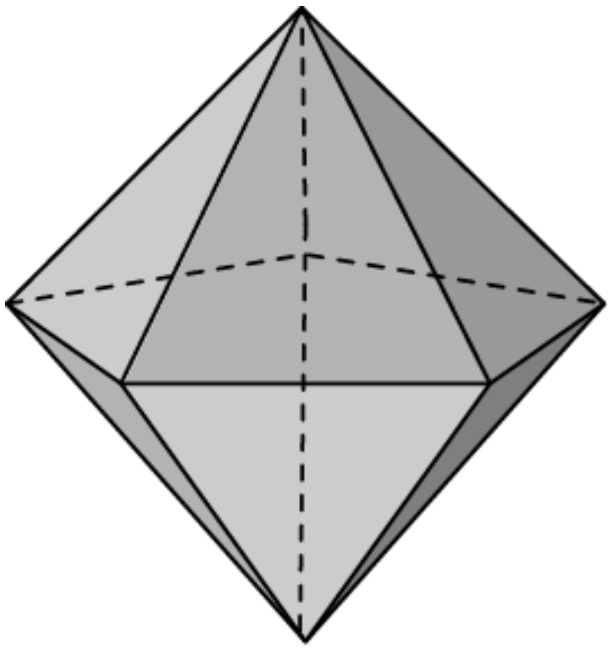
Для данного полуправильного многогранника рассмотрим сферу, полувписанную в этот многогранник, т.е. касающуюся всех его ребер. Проведем в середину каждого из этих ребер радиус полувписанной сферы. Повернем каждое ребро, точнее прямую, на которой лежит ребро полуправильного многогранника, вокруг соответствующего радиуса на угол 90°. Эти прямые после поворота будут содержать ребра двойственного многогранника, а их точки пересечения будут его вершинами.

Нетрудно видеть, что такое построение, примененное к кубу дает октаэдр, тетраэдру – тетраэдр, октаэдру – куб, икосаэдру – додекаэдр, додекаэдру – икосаэдр.

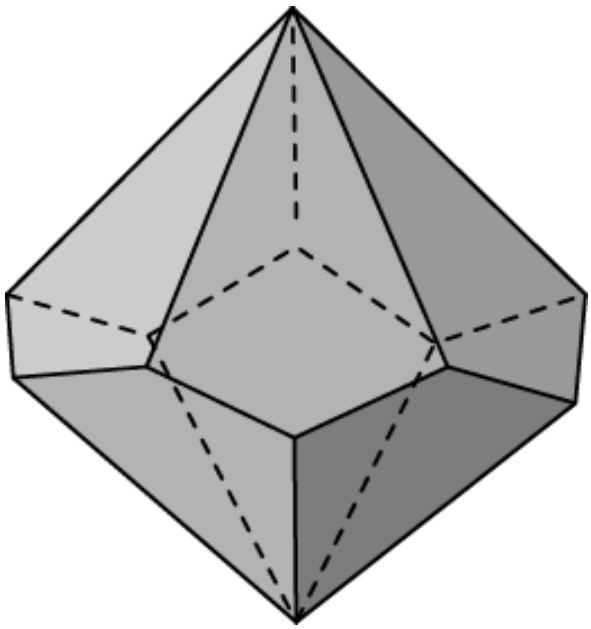
Можно доказать, что многогранники, двойственные к полуправильным многогранникам, имеют равные грани и правильные многогранные углы. Поэтому эти многогранники называются равногранно полуправильными многогранниками. Имеются две бесконечные серии равногранно полуправильных многогранников, двойственных призмам и антипризмам, а также 13 равногранно полуправильных многогранников, двойственных телам Архимеда. Эти многогранники называются телами Каталана.

1. Многогранники, двойственные призмам и антипризмам

Многогранником, двойственным n-угольной призме, будет n-угольная бипирамида – многогранник, составленный из двух равных n-угольных призм с общим основанием. На рисунке изображена пятиугольная бипирамида, двойственная пятиугольной призме.



Многогранник, двойственный *n*-угольной антипризме, называется *n*-угольной антибипирамидой. На рисунке изображена пятиугольная антибипирамида, двойственная пятиугольной антипризме.

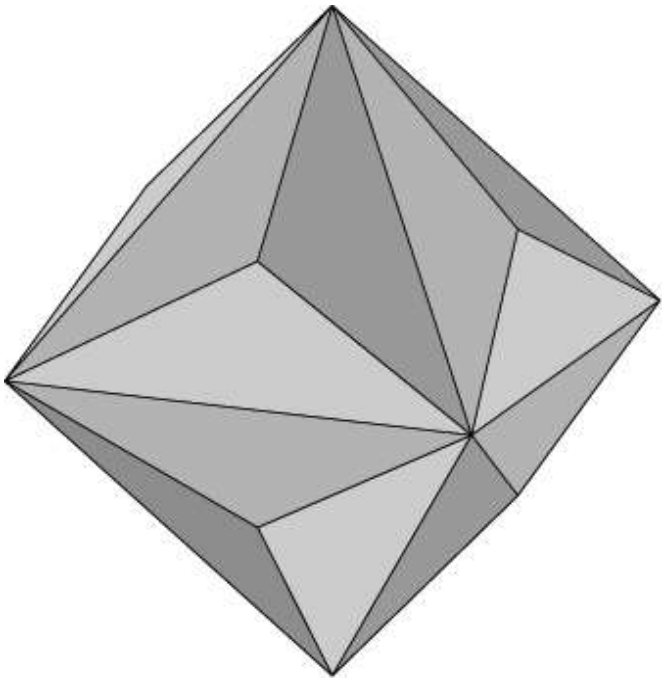


Упражнения

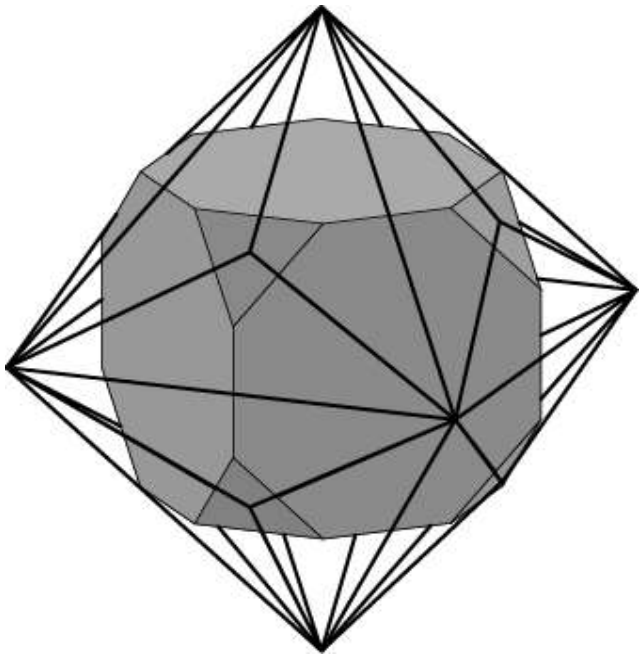
1. Сколько вершин у n-угольной бипирамиды?
2. Сколько ребер у n-угольной бипирамиды?
3. Сколько граней имеет n-угольной бипирамида?
4. Сколько вершин у n-угольной антибипирамиды?
5. Сколько ребер у n-угольной антибипирамиды?
6. Сколько граней имеет n-угольная антибипирамида?
7. Как по-другому называется треугольная антибипирамида?
8. Имеет ли 5-угольная бипирамида центр симметрии?
9. Имеет ли 5-угольная антибипирамида центр симметрии?
10. Имеет ли 5-угольная бипирамида оси симметрии? Если имеет, то сколько?
11. Имеет ли 5-угольная антибипирамида оси симметрии? Если имеет, то сколько?
12. Имеет ли 5-угольная бипирамида плоскости симметрии? Если имеет, то сколько?
13. Имеет ли 5-угольная антибипирамида плоскости симметрии? Если имеет, то сколько?
14. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней 5-угольной бипирамиды?
15. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней 5-угольной антибипирамиды?
16. Можно ли вписать сферу в n-угольную бипирамиду?
17. Можно ли вписать сферу в n-угольную антибипирамиду?
18. Можно ли описать сферу около n-угольной бипирамиды?
19. Можно ли описать сферу около n-угольной антибипирамиды?
20. Существует ли сфера, полувписанная в n-угольную бипирамиду?
21. Существует ли сфера, полувписанная в n-угольную антибипирамиду?

2. Многогранник, двойственный усеченному кубу

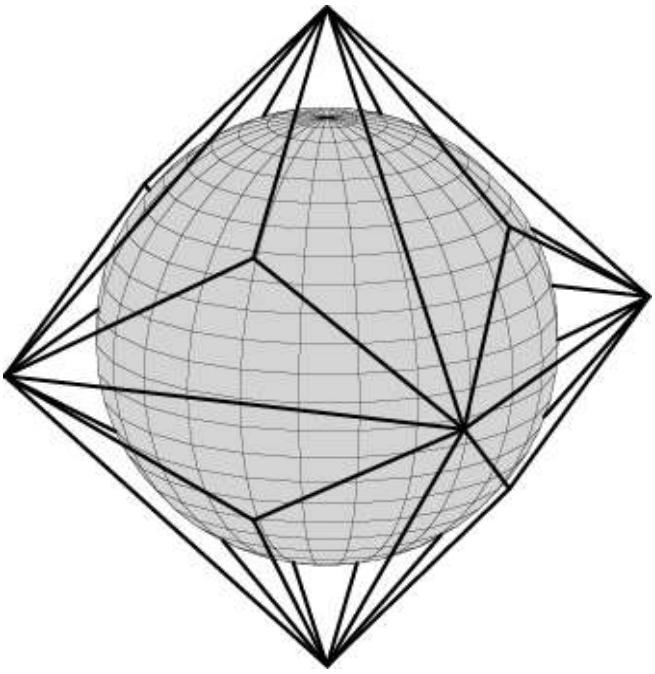
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному кубу. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного куба и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному кубу, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному кубу?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному кубу?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному кубу?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному кубу, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному кубу?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному кубу?

7. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней многогранника, двойственного усеченному кубу?

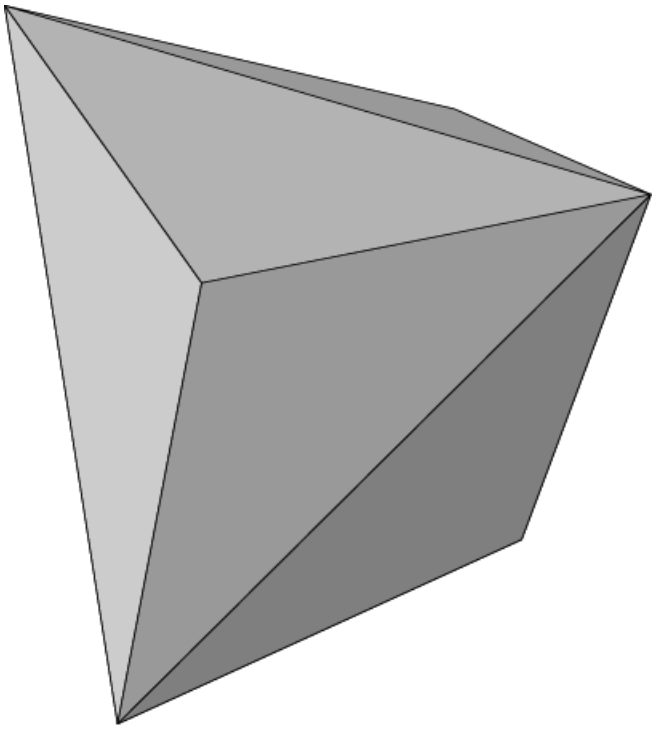
8. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному кубу?

9. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному кубу.

10. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному кубу? Если да, то найдите ее радиус.

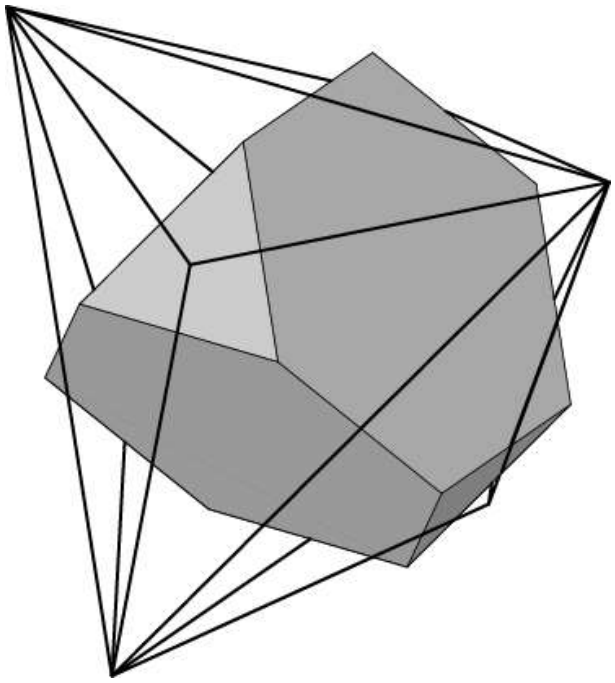
3. Многогранник, двойственный усеченному тетраэдру

На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному тетраэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.

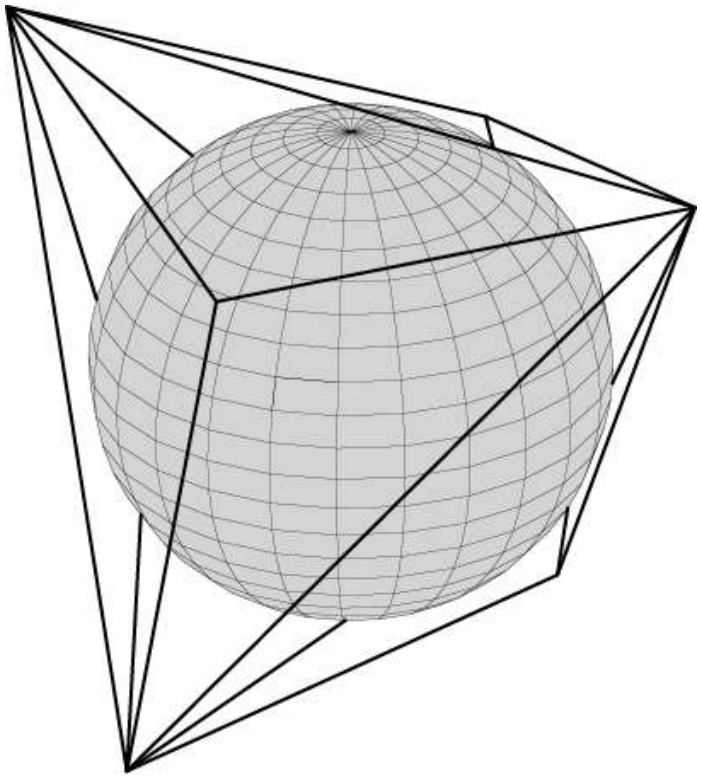


Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного тетраэдра и перпендикулярны им.

.



В многогранник, двойственный усеченному тетраэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному тетраэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному тетраэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному тетраэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному тетраэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному тетраэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному тетраэдру?

7. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней многогранника, двойственного усеченному тетраэдру?

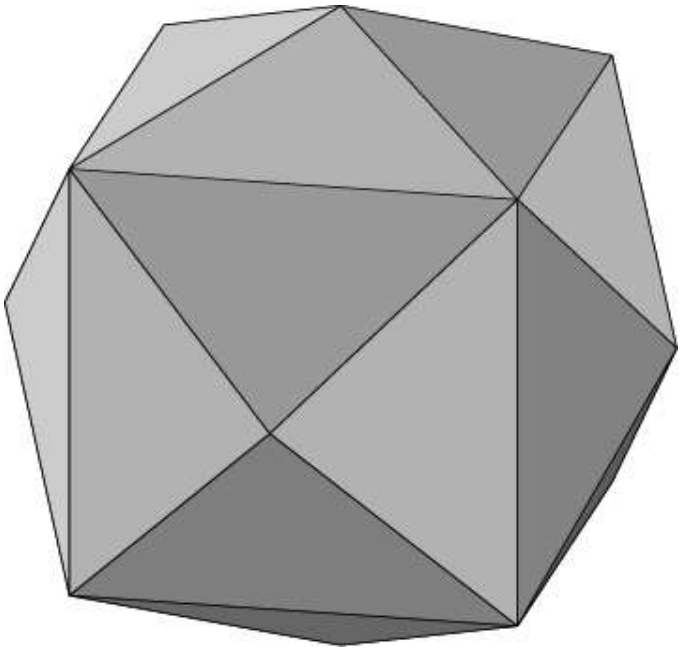
8. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному тетраэдру?

9. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному тетраэдру.

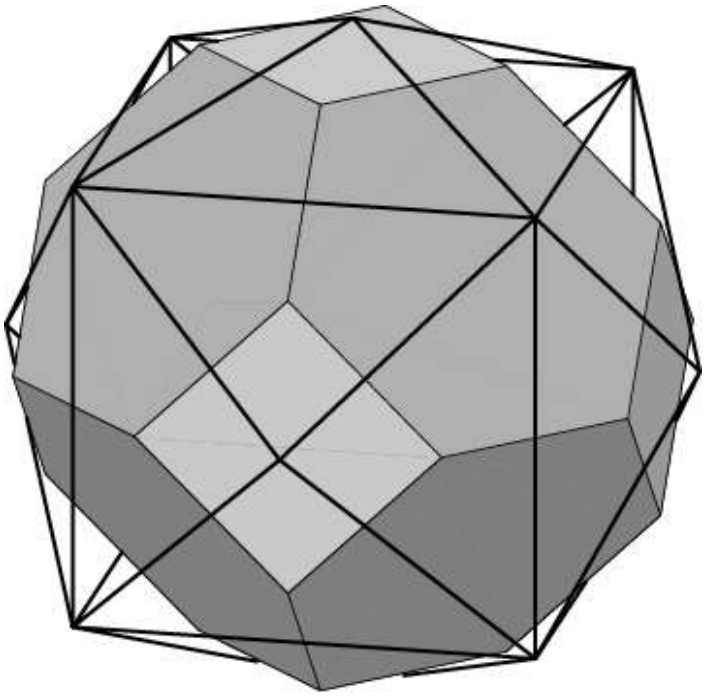
10. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному тетраэдру? Если да, то найдите ее радиус.

4. Многогранник, двойственный усеченному октаэдру

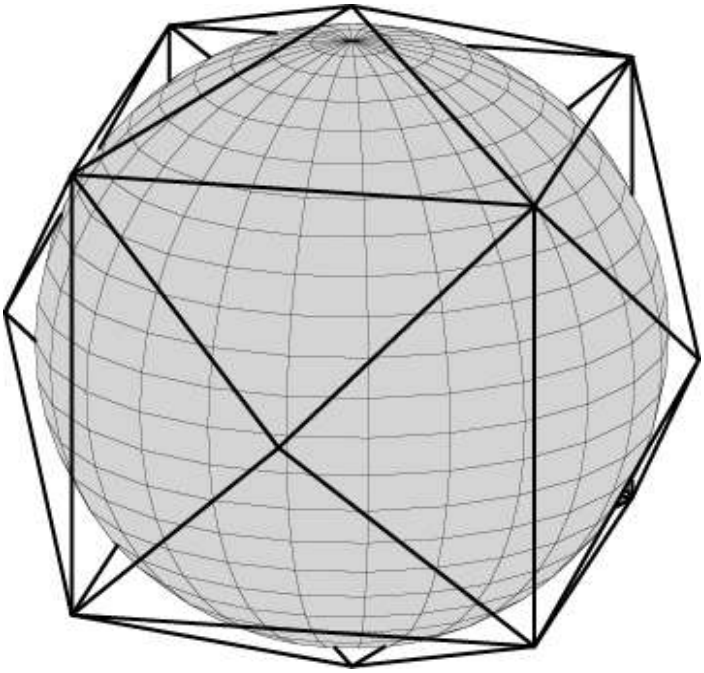
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному октаэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного октаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному октаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному октаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному октаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному октаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному октаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному октаэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному октаэдру?

7. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней многогранника, двойственного усеченному октаэдру?

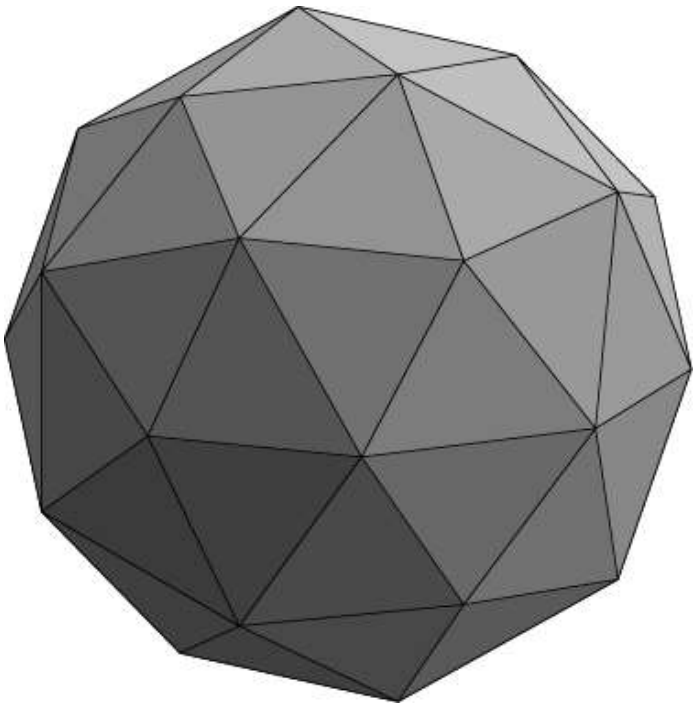
8. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному октаэдру?

9. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному октаэдру.

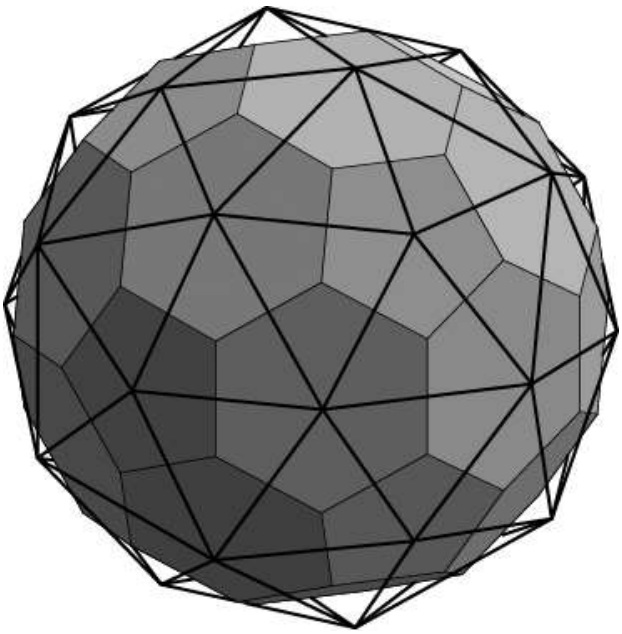
10. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному октаэдру? Если да, то найдите ее радиус.

5. Многогранник, двойственный усеченному икосаэдру

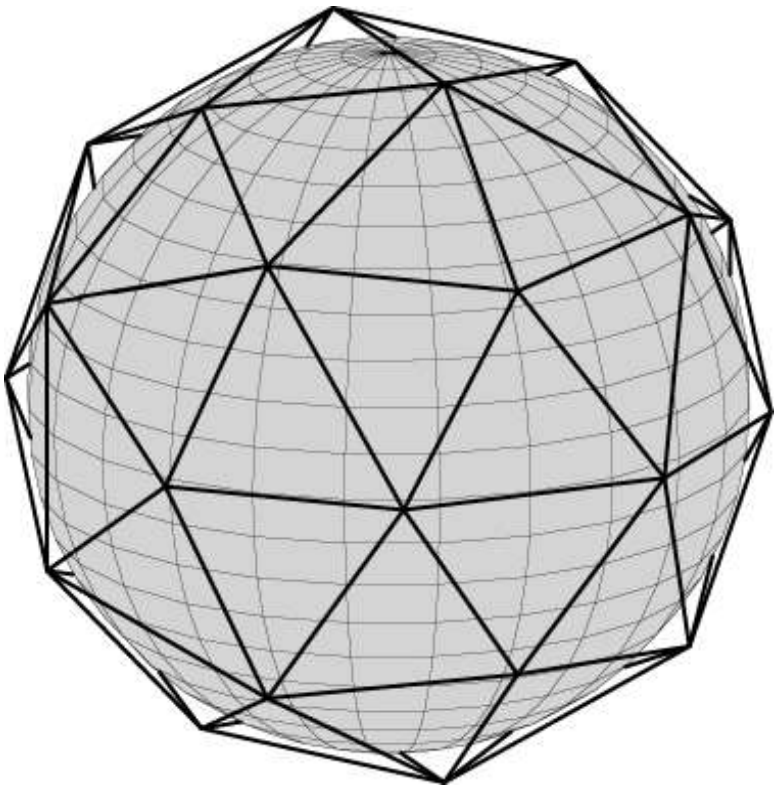
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному икосаэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного икосаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному икосаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному икосаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному икосаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному икосаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному икосаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному икосаэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному икосаэдру?

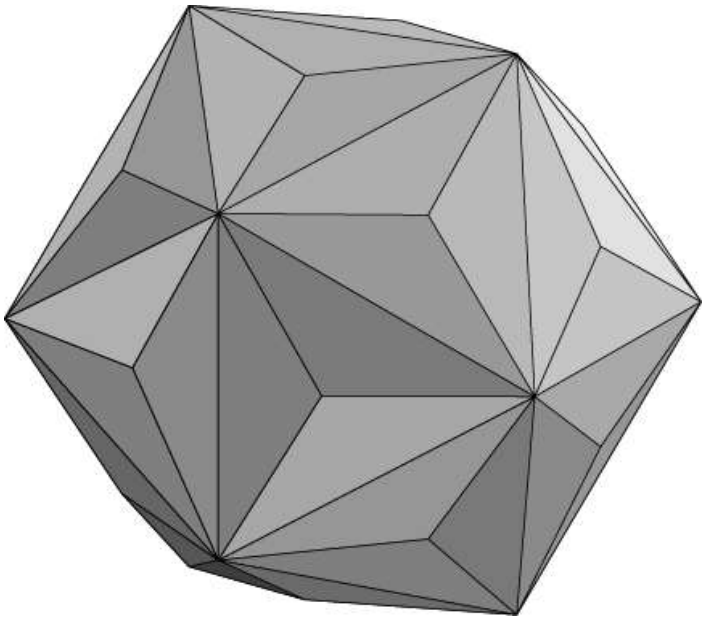
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному икосаэдру?

8. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному икосаэдру.

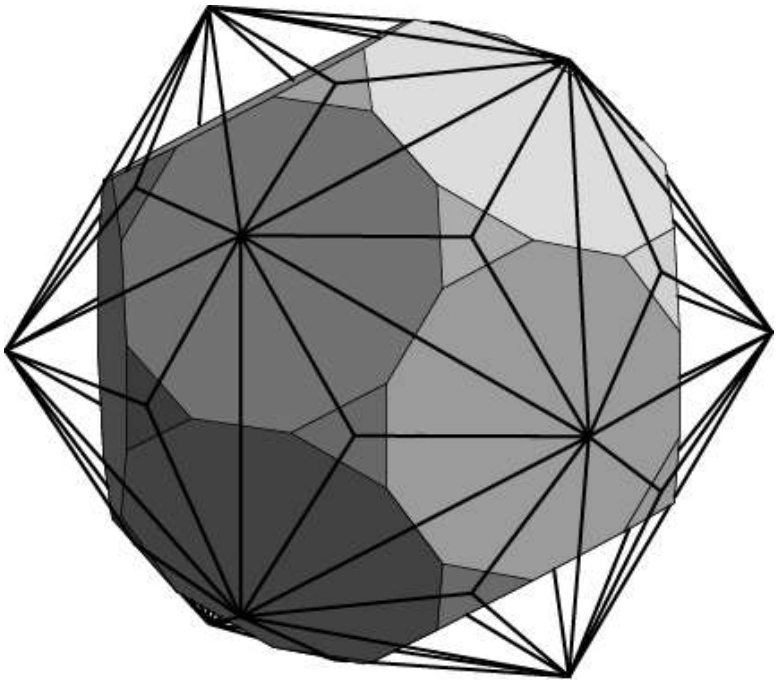
9. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному икосаэдру? Если да, то найдите ее радиус.

6. Многогранник, двойственный усеченному додекаэдру

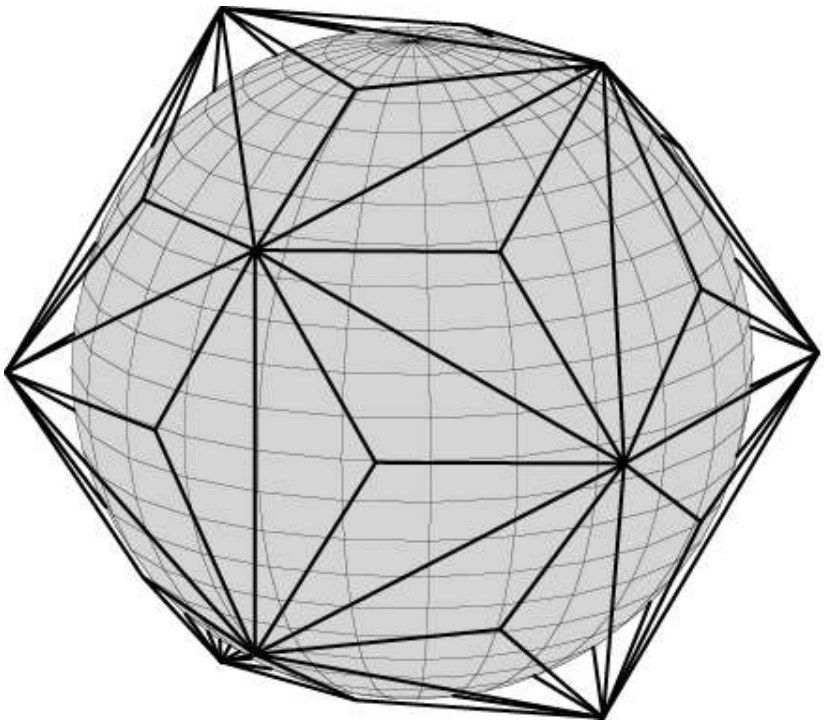
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному додекаэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного додекаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному додекаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному додекаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному додекаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному додекаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному додекаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному додекаэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному додекаэдру?

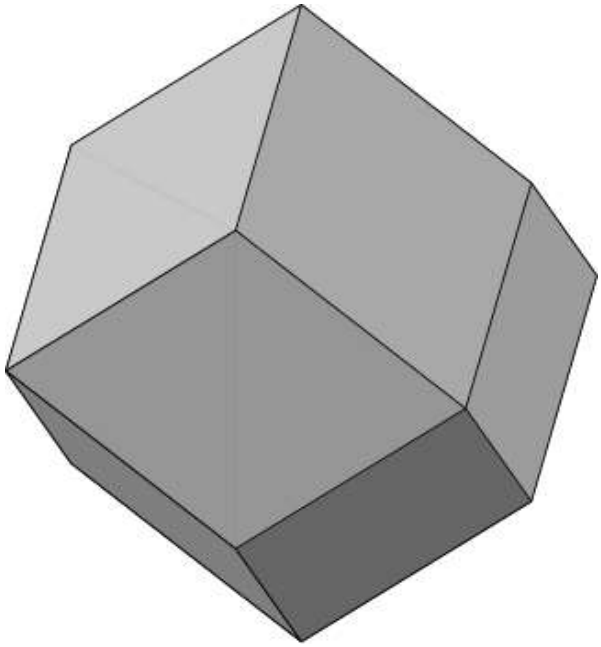
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному додекаэдру? Если да, то найдите ее радиус.

8. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному додекаэдру.

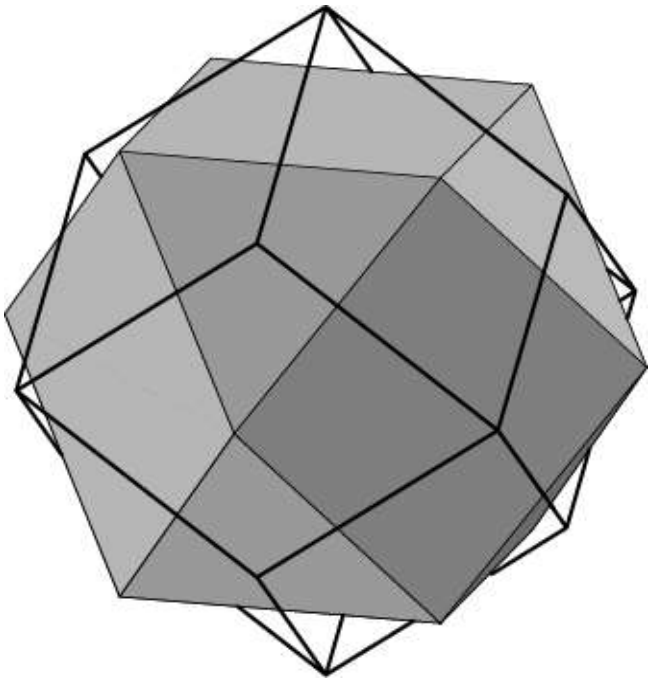
9. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному додекаэдру? Если да, то найдите ее радиус.

7. Многогранник, двойственный кубооктаэдру

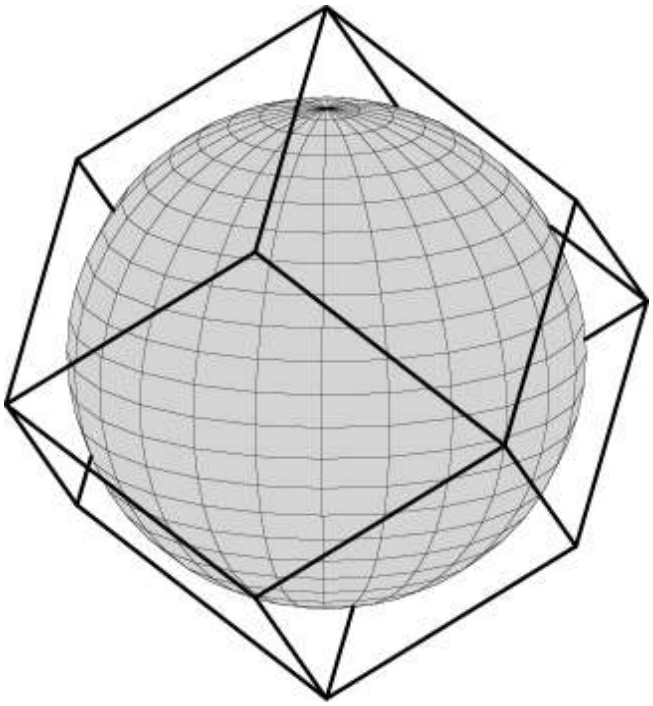
На рисунке изображен многогранник, двойственный кубооктаэдру и называемый ромбододекаэдром. Его поверхность состоит из равных ромбов.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер кубооктаэдра и перпендикулярны им.



В ромбододекаэдр можно вписать сферу. Она касается всех его граней.

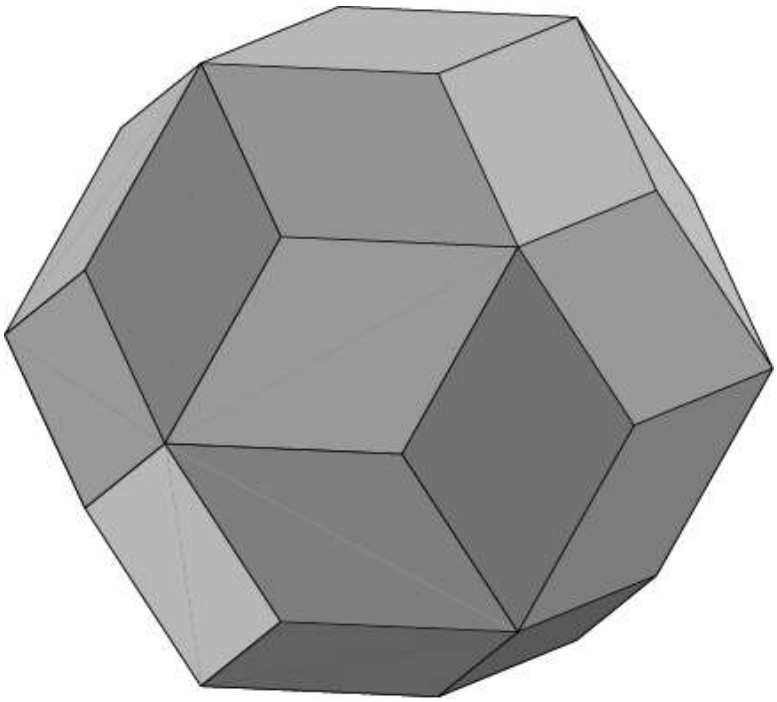


Упражнения

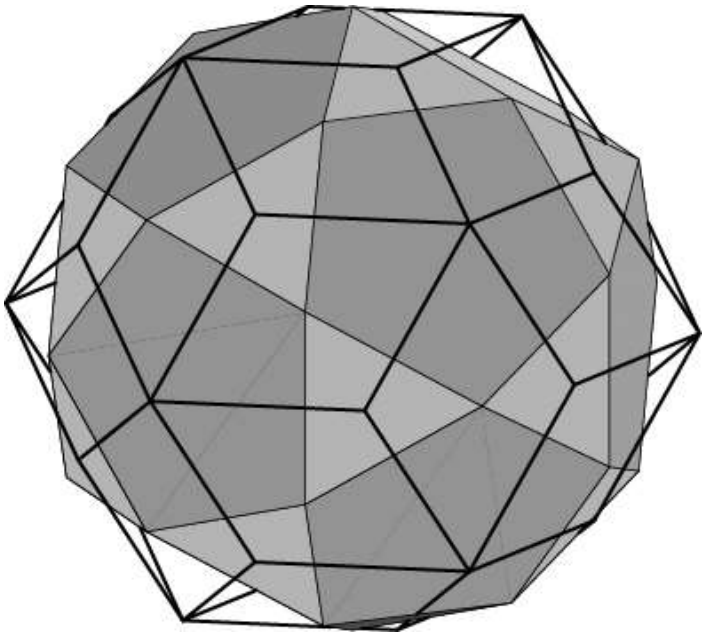
1. Сколько вершин у ромбододекаэдра?
2. Сколько ребер у ромбододекаэдра?
3. Сколько граней имеет ромбододекаэдр?
4. Имеет ли ромбододекаэдр центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет ромбододекаэдр?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет ромбододекаэдр?
7. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски граней ромбододекаэдра?
8. Можно ли описать сферу около ромбододекаэдра? Если да, то найдите ее радиус.
9. Найдите расстояние между противоположными ребрами ромбододекаэдра, двойственного единичному кубооктаэдру.
10. Найдите радиус сферы, полувписанной в ромбододекаэдр, двойственный единичному кубооктаэдру.
11. Через каждое ребро куба перпендикулярно плоскости симметрии, проходящей через это ребро, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?
12. Через каждое ребро октаэдра перпендикулярно плоскости симметрии, проходящей через это ребро, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

8. Многогранник, двойственный икосододекаэдру

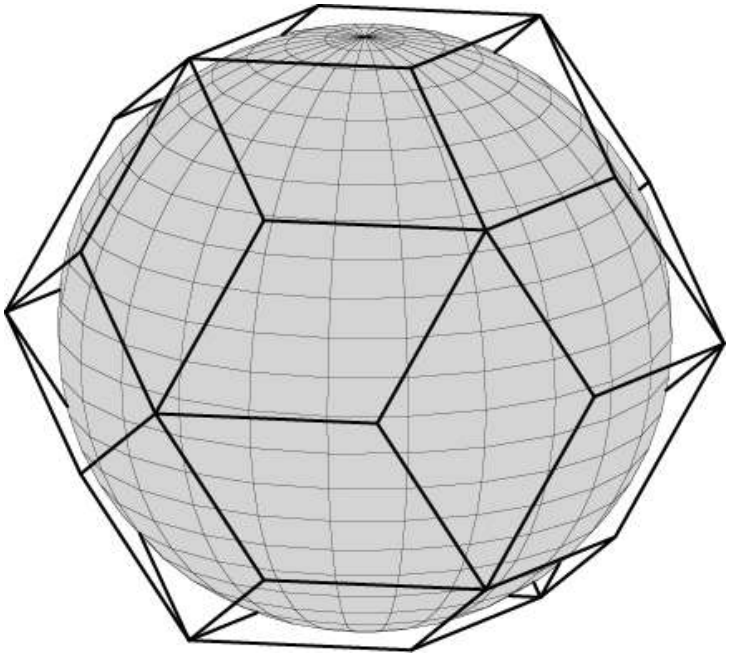
На рисунке изображен многогранник, двойственный икосододекаэдру. Его поверхность состоит из равных ромбов.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер икосододекаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный икосододекаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.

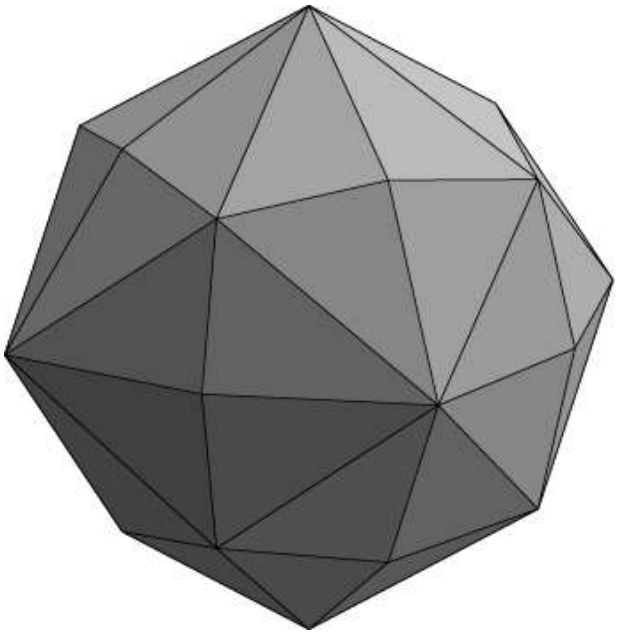


Упражнения

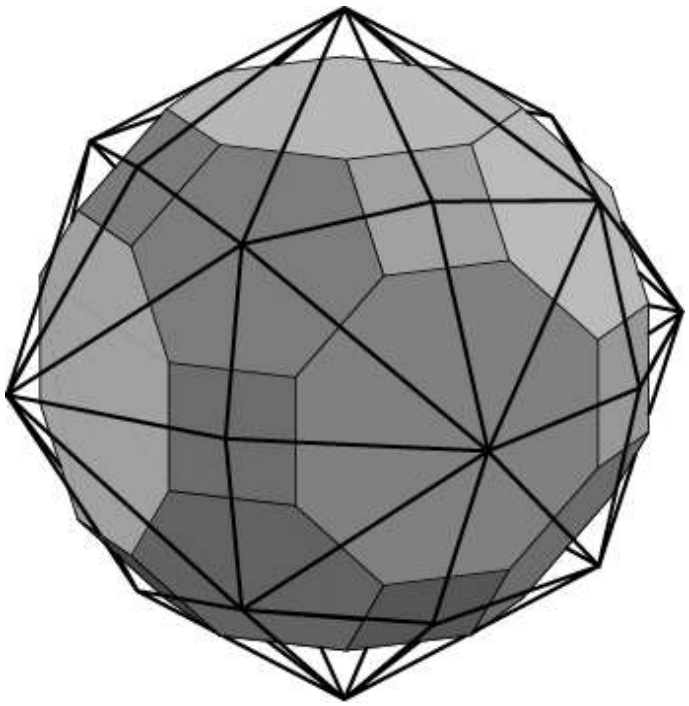
1. Сколько вершин у многогранника, двойственного икосододекаэдру?
2. Сколько ребер у многогранника, двойственного икосододекаэдру?
3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный икосододекаэдру?
4. Имеет ли многогранник, двойственный икосододекаэдру, центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный икосододекаэдру?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный икосододекаэдру?
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного икосододекаэдру? Если да, то найдите ее радиус.
8. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному икосододекаэдру.
9. Найдите радиус сферы, полувписанной в многогранник, двойственный единичному икосододекаэдру.
10. Через каждое ребро икосаэдра перпендикулярно плоскости симметрии, проходящей через это ребро, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?
11. Через каждое ребро додекаэдра перпендикулярно плоскости симметрии, проходящей через это ребро, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

9. Многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру

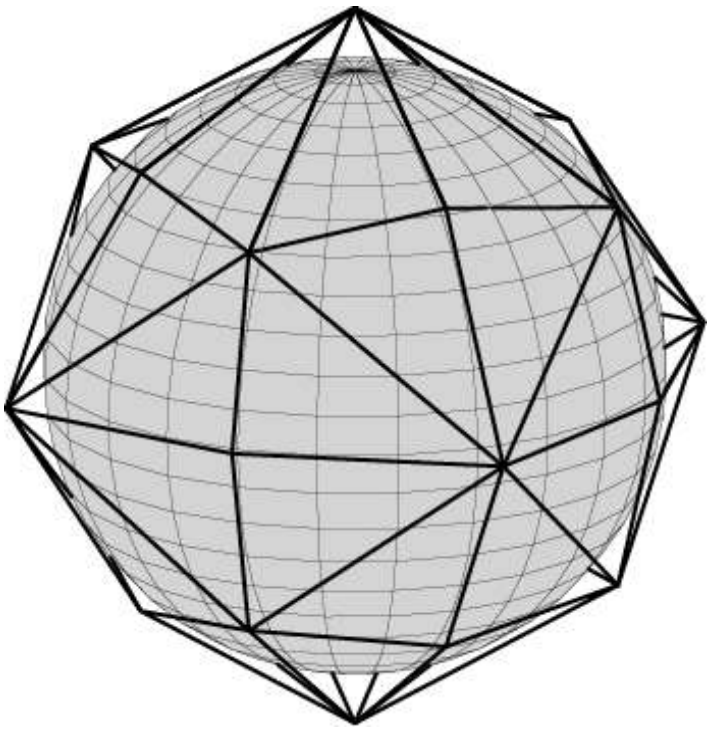
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного кубооктаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному кубооктаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному кубооктаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру?

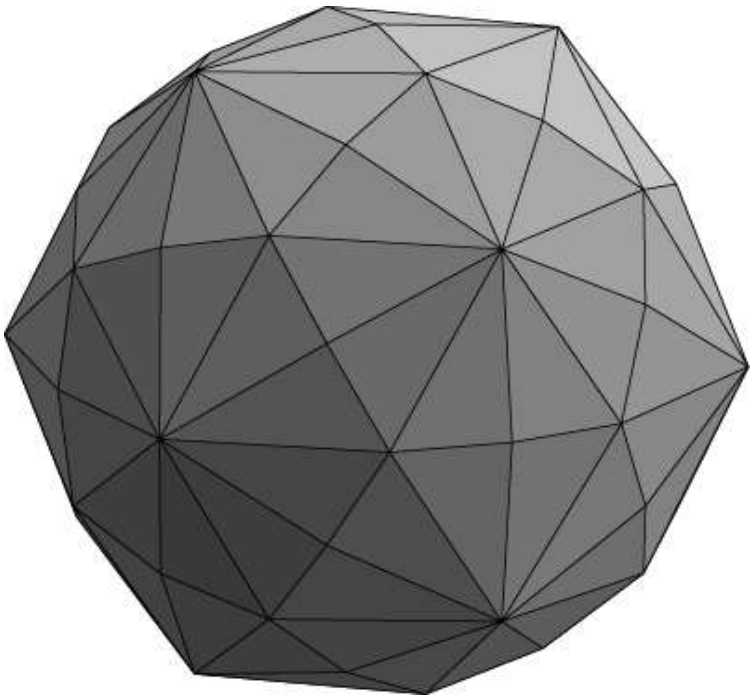
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному кубооктаэдру?

8. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному усеченному кубооктаэдру.

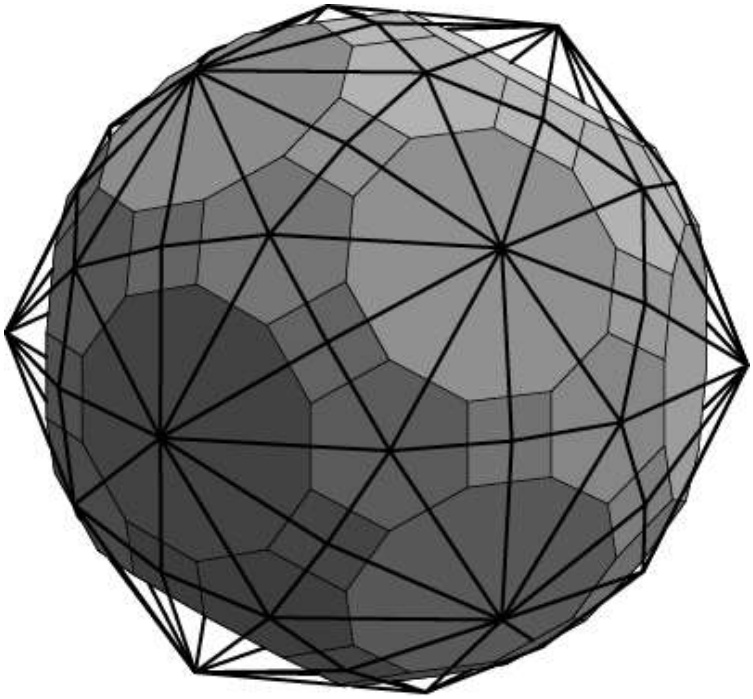
9. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному усеченному кубооктаэдру? Если да, то найдите ее радиус.

10. Многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру

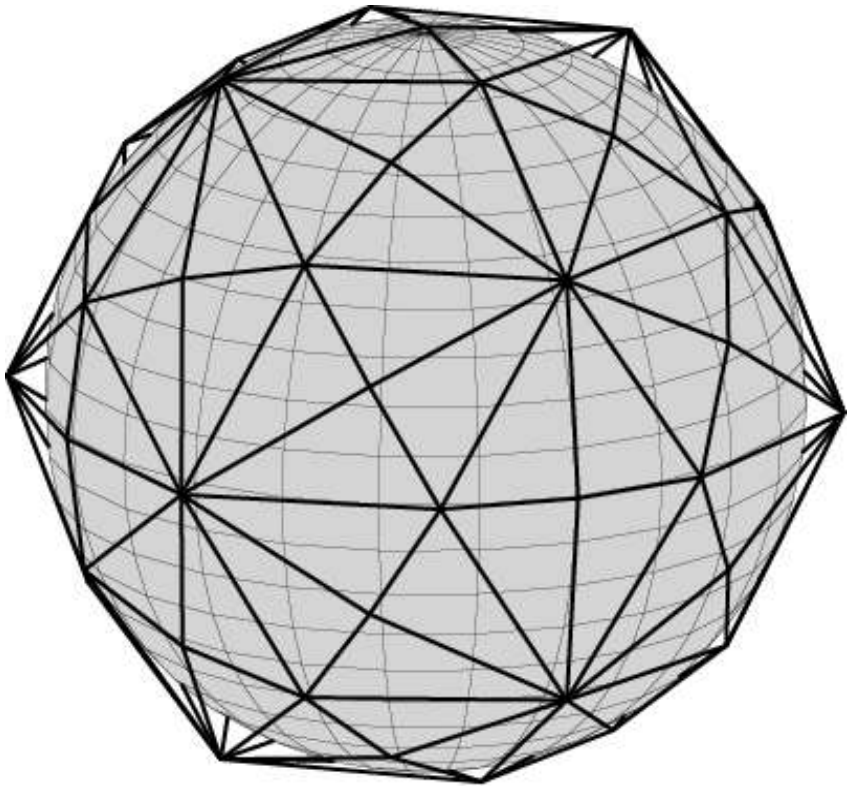
На рисунке изображен многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру. Его поверхность состоит из равных треугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер усеченного икосододекаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного усеченному икосододекаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного усеченному икосододекаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру?

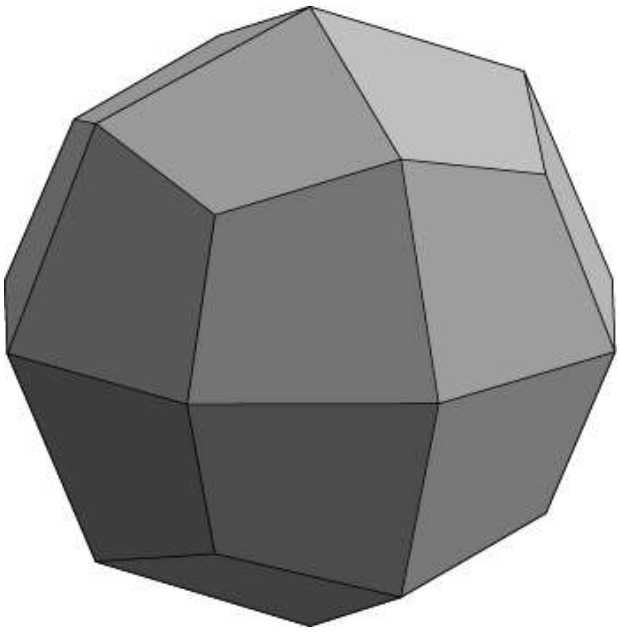
6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру?

7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного усеченному икосододекаэдру?

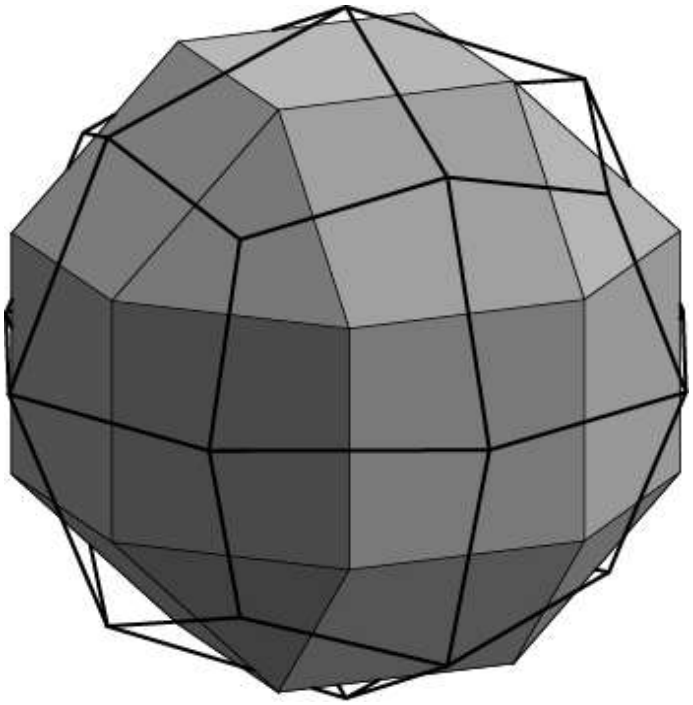
8. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру?

11. Многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру

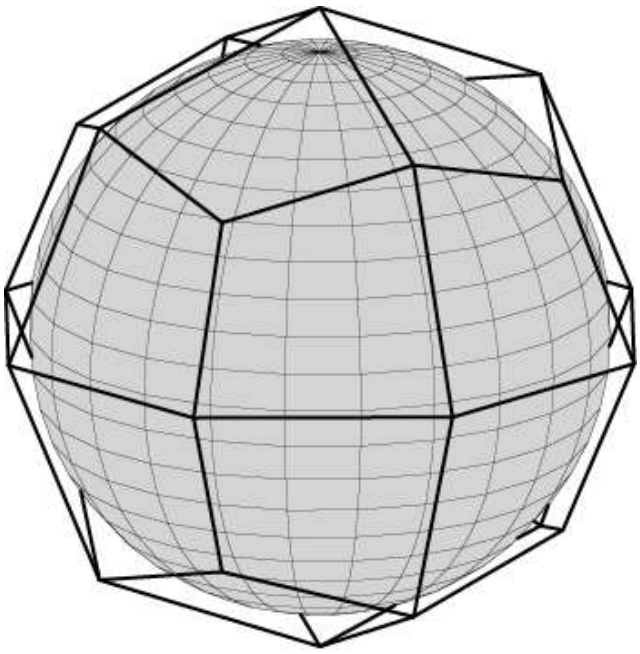
На рисунке изображен многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру. Его поверхность состоит из равных четырехугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер ромбокубооктаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.

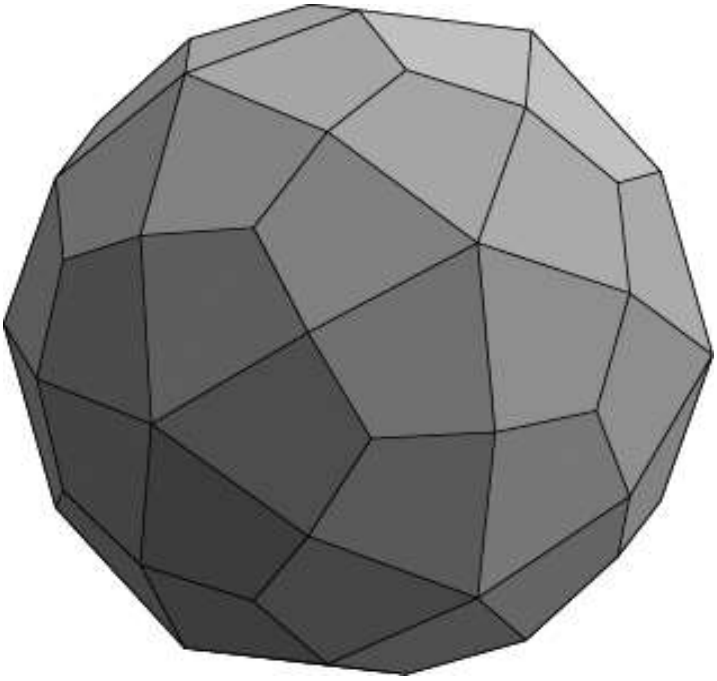


Упражнения

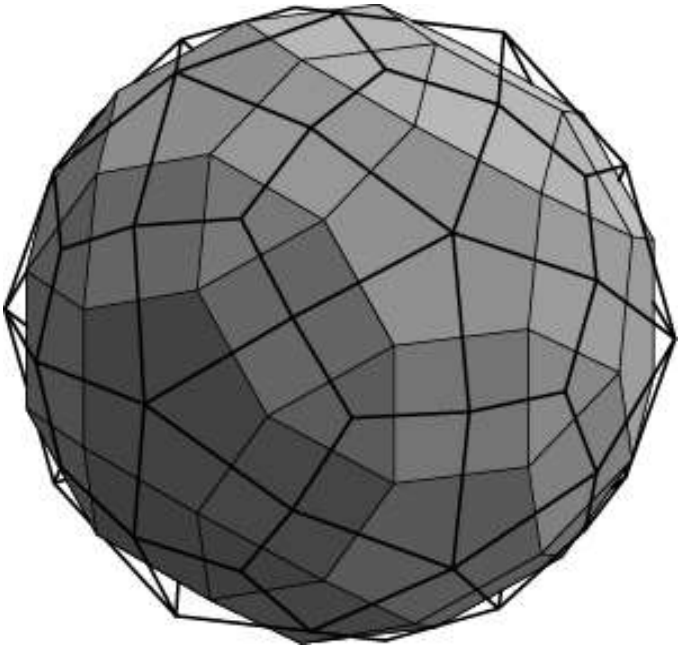
1. Сколько вершин у многогранника, двойственного ромбокубооктаэдру?
2. Сколько ребер у многогранника, двойственного ромбокубооктаэдру?
3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру?
4. Имеет ли многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру, центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру?
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного ромбокубооктаэдру?
8. Найдите расстояние между противоположными ребрами многогранника, двойственного единичному ромбокубооктаэдру.
9. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный единичному ромбокубооктаэдру? Если да, то найдите ее радиус.
10. Через каждое ребро кубооктаэдра перпендикулярно плоскости, проходящей через это ребро и центр симметрии, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

12. Многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру

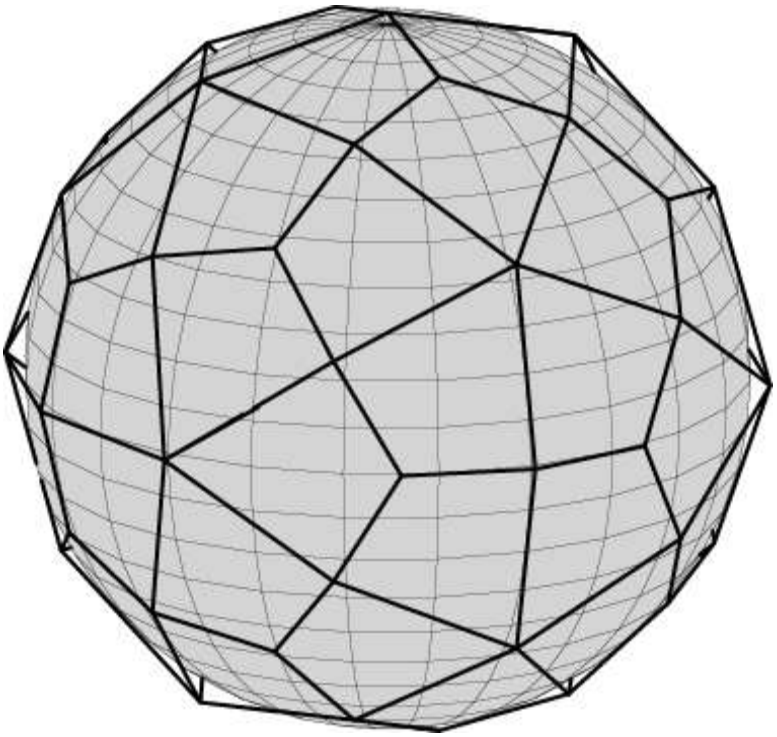
На рисунке изображен многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру. Его поверхность состоит из равных четырехугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер ромбоикосододекаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.

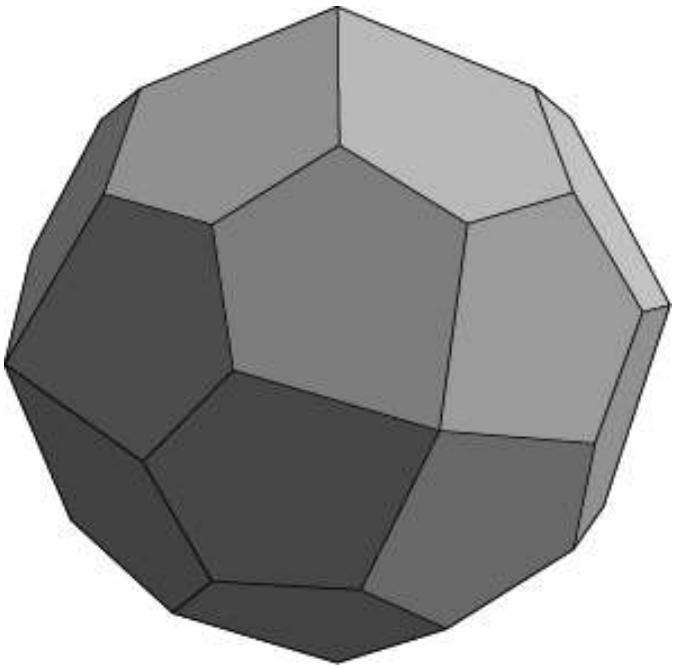


Упражнения

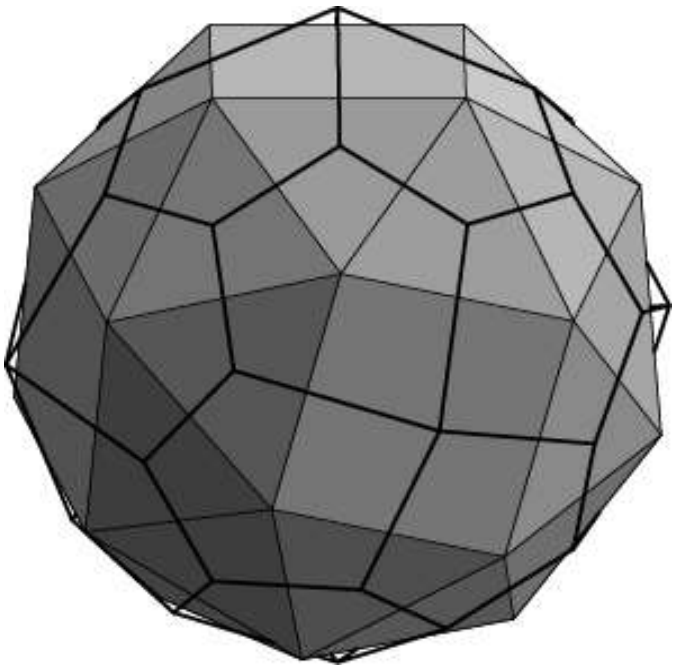
1. Сколько вершин у многогранника, двойственного ромбоикосододекаэдру?
2. Сколько ребер у многогранника, двойственного ромбоикосододекаэдру?
3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру?
4. Имеет ли многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру, центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру?
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного ромбоикосододекаэдру?
8. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру.
9. Через каждое ребро икосододекаэдра перпендикулярно плоскости, проходящей через это ребро и центр симметрии, проведена плоскость. Какой многогранник ограничен этими плоскостями?

13. Многогранник, двойственный курносому кубу

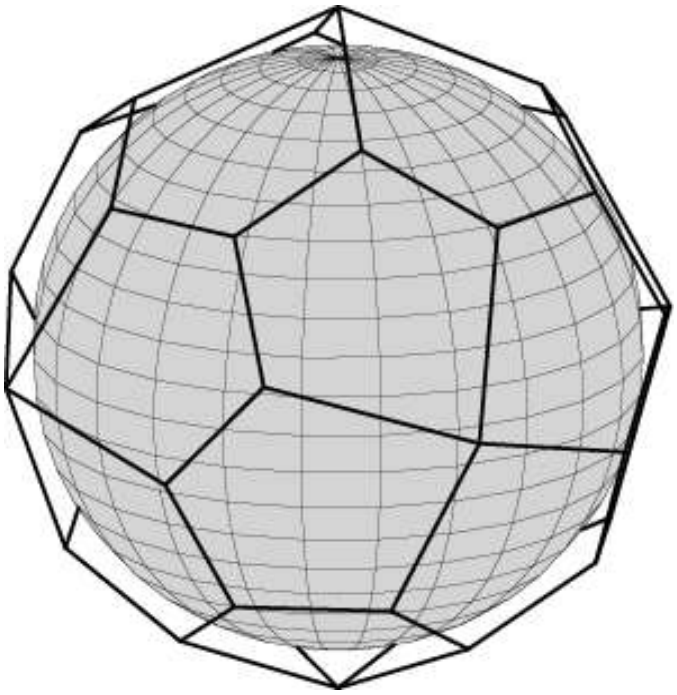
На рисунке изображен многогранник, двойственный курносому кубу. Его поверхность состоит из равных пятиугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер курносого куба и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный курносому кубу, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.

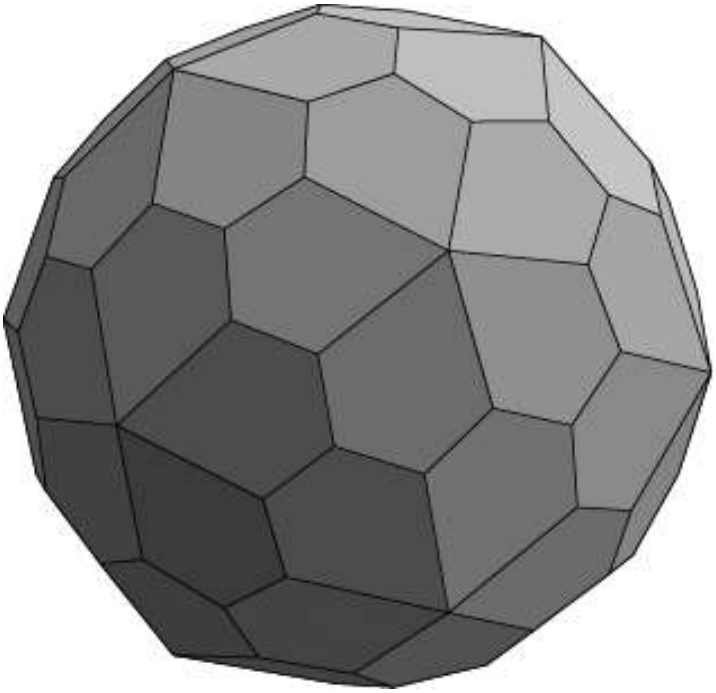


Упражнения

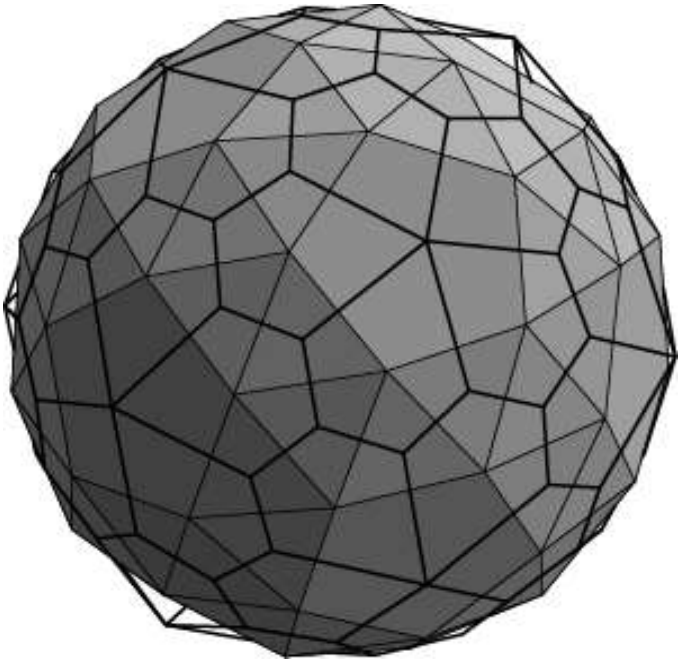
1. Сколько вершин у многогранника, двойственного курносому кубу?
2. Сколько ребер у многогранника, двойственного курносому кубу?
3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный курносому кубу?
4. Имеет ли многогранник, двойственный курносому кубу, центр симметрии?
5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный курносому кубу?
6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный курносому кубу?
7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного курносому кубу?
8. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный курносому кубу?

14. Многогранник, двойственный курносому додекаэдру

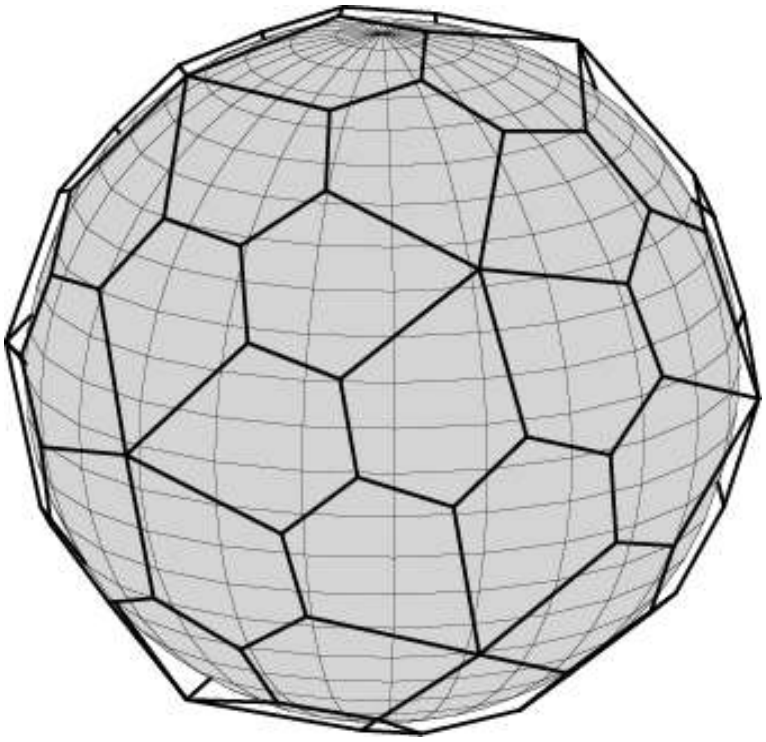
На рисунке изображен многогранник, двойственный курносому додекаэдру. Его поверхность состоит из равных пятиугольников.



Ребра этого многогранника проходят через середины ребер курносого додекаэдра и перпендикулярны им.



В многогранник, двойственный курносому додекаэдру, можно вписать сферу. Она касается всех его граней.



Упражнения

1. Сколько вершин у многогранника, двойственного курносому додекаэдру?

2. Сколько ребер у многогранника, двойственного курносому додекаэдру?

3. Сколько граней имеет многогранник, двойственный курносому додекаэдру?

4. Имеет ли многогранник, двойственный курносому додекаэдру, центр симметрии?

5. Сколько осей симметрии имеет многогранник, двойственный курносому додекаэдру?

6. Сколько плоскостей симметрии имеет многогранник, двойственный курносому додекаэдру?

7. Можно ли описать сферу около многогранника, двойственного курносому додекаэдру?

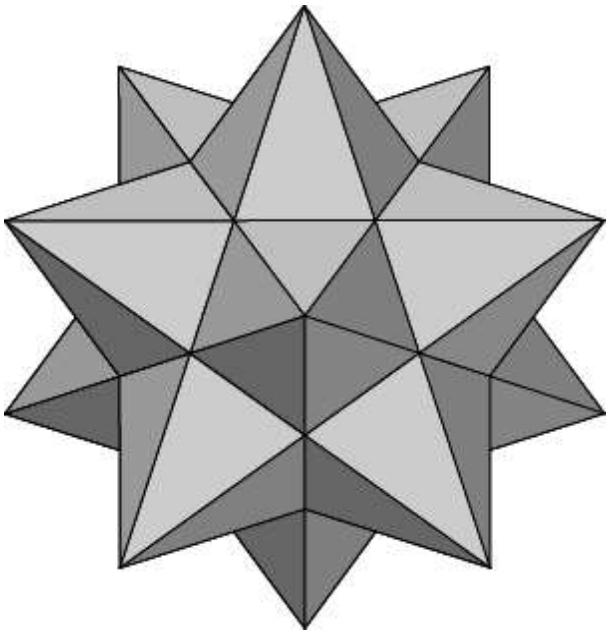
8. Существует ли сфера, полувписанная в многогранник, двойственный курносому додекаэдру?

IV. ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ

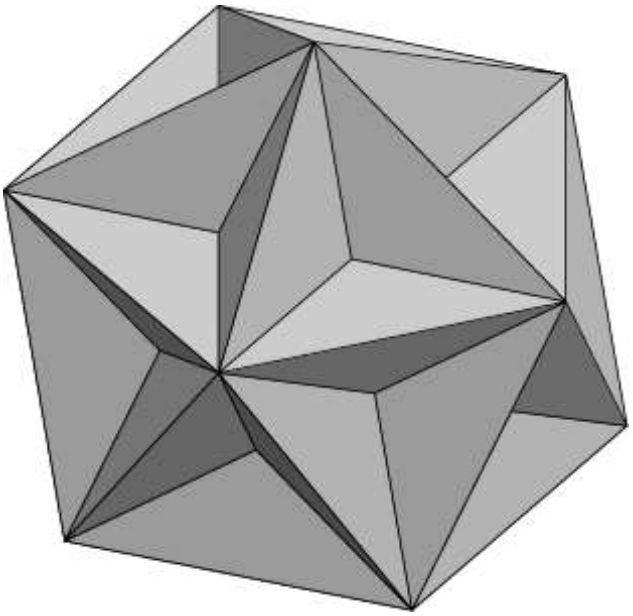
1. Правильные звездчатые многогранники

Имеется четыре правильных звездчатых многогранника – тела Кеплера-Пуансо. Их гранями могут быть не только правильные многоугольники, но и правильные звездчатые многоугольники. Перечислим эти многогранники и укажем способы построения.

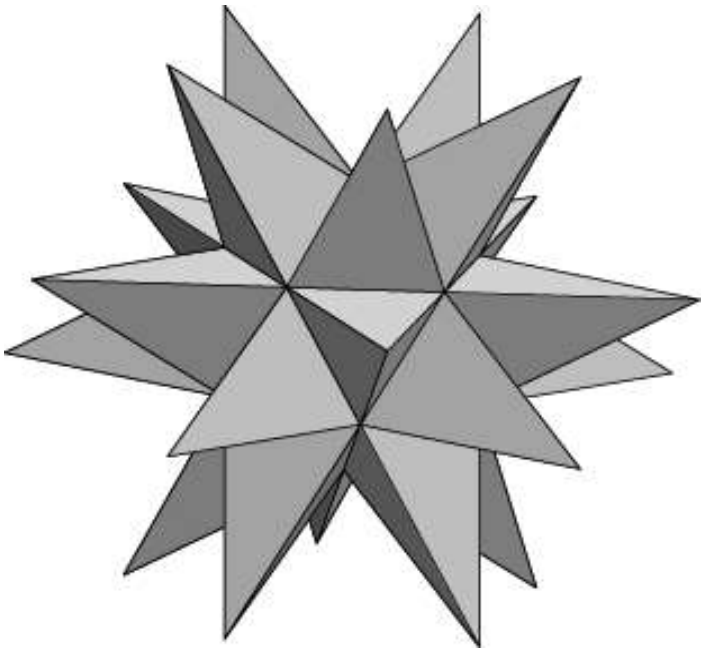
Малый звездчатый додекаэдр получается продолжением ребер додекаэдра. Его гранями являются правильные звездчатые пятиугольники.



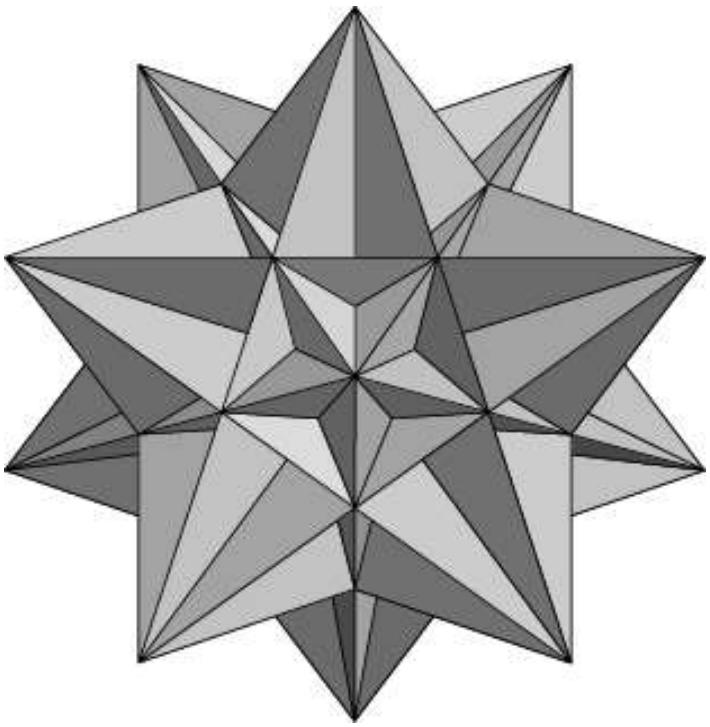
При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Если в качестве граней рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый большой додекаэдр.



Если же в качестве граней рассматривать правильные звездчатые пятиугольники, то получается большой звездчатый додекаэдр.



Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней икосаэдра получается большой икосаэдр. Его гранями являются правильные треугольники.



Упражнения

1. Сколько треугольных граней имеет малый звездчатый додекаэдр?

2. Сколько треугольных граней имеет большой додекаэдр?

3. Сколько треугольных граней имеет большой звездчатый додекаэдр?

4. Найдите ребро малого звездчатого додекаэдра, полученного из единичного додекаэдра.

5. Большой додекаэдр может быть получен вырезанием из икосаэдра правильных треугольных пирамид, основаниями которых являются грани икосаэдра. Найдите боковое ребро этих пирамид, если ребро икосаэдра равно 1.

6. Большой звездчатый додекаэдр может быть получен достраиванием на икосаэдре правильных треугольных пирамид, основаниями которых являются грани икосаэдра. Найдите боковое ребро этих пирамид, если ребро икосаэдра равно 1.

7. Имеет ли малый звездчатый додекаэдр центр симметрии?

8. Имеет ли большой додекаэдр центр симметрии?

9. Имеет ли большой звездчатый додекаэдр центр симметрии?

10. Имеет ли большой икосаэдр центр симметрии?

11. Сколько осей симметрии имеет малый звездчатый додекаэдр?

12. Сколько осей симметрии имеет большой додекаэдр?

13. Сколько осей симметрии имеет большой звездчатый додекаэдр?

14. Сколько осей симметрии имеет большой икосаэдр?

15. Сколько плоскостей симметрии имеет малый звездчатый додекаэдр?

16. Сколько плоскостей симметрии имеет большой додекаэдр?

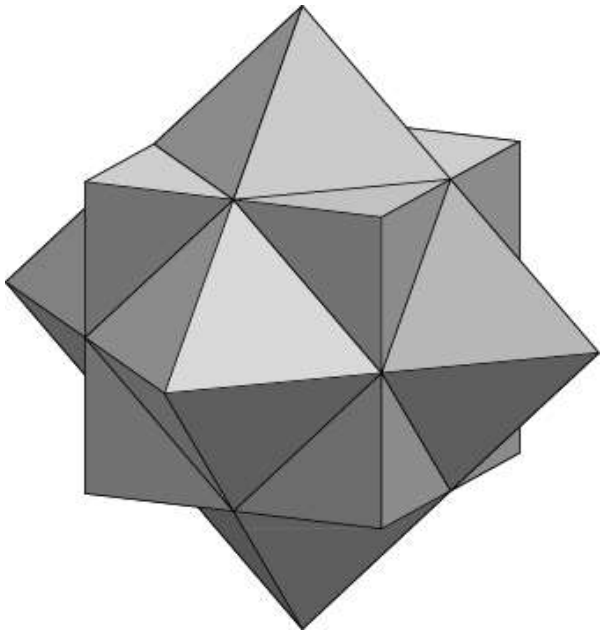
17. Сколько плоскостей симметрии имеет большой звездчатый додекаэдр?

18. Сколько плоскостей симметрии имеет большой икосаэдр?

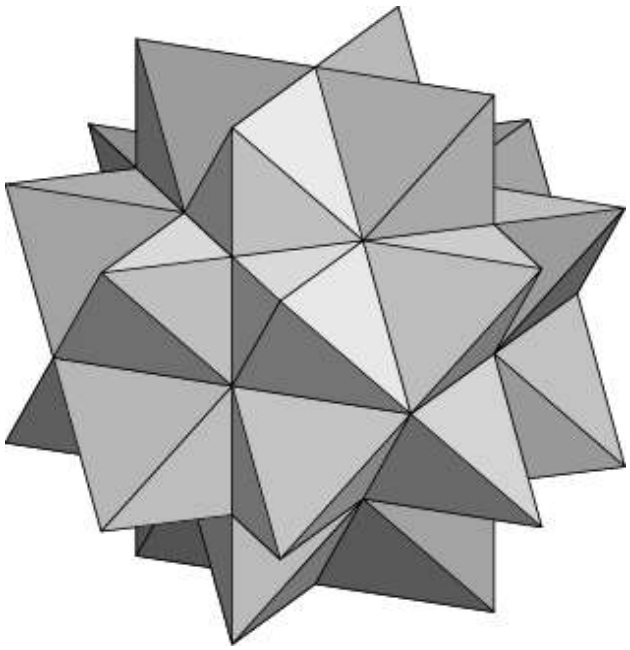
2. Звездчатые формы кубооктаэдра, икосаэдра и икосододекаэдра

Кроме правильных звездчатых многогранников, существуют и другие звездчатые формы, получающиеся продолжением граней правильных и полуправильных многогранников.

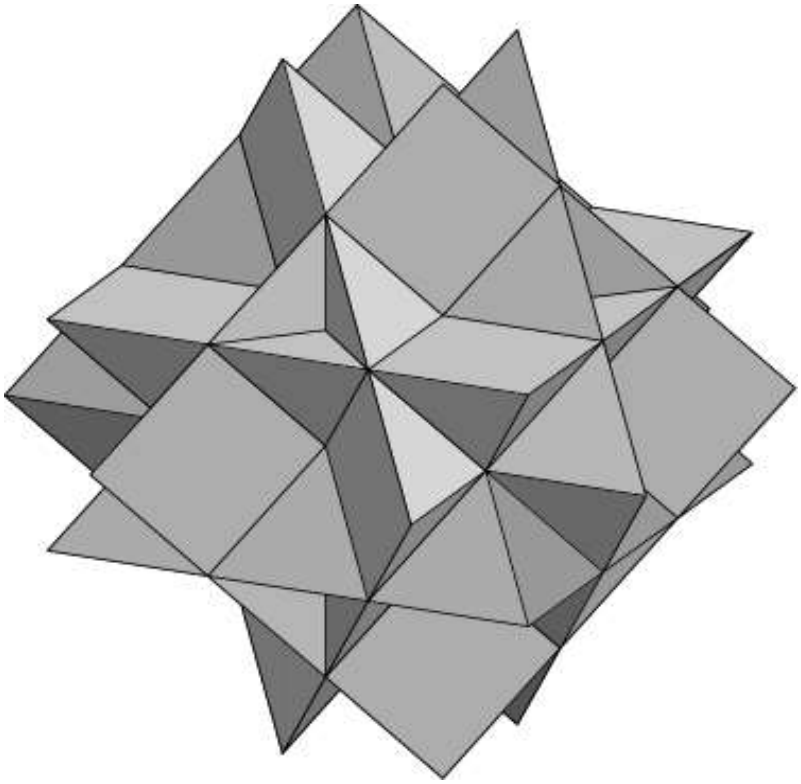
Так продолжение граней кубооктаэдра приводит к четырем звездчатым многогранникам. Первый из них получается достраиванием на гранях кубооктаэдра треугольных пирамид и представляет собой соединение куба и октаэдра.



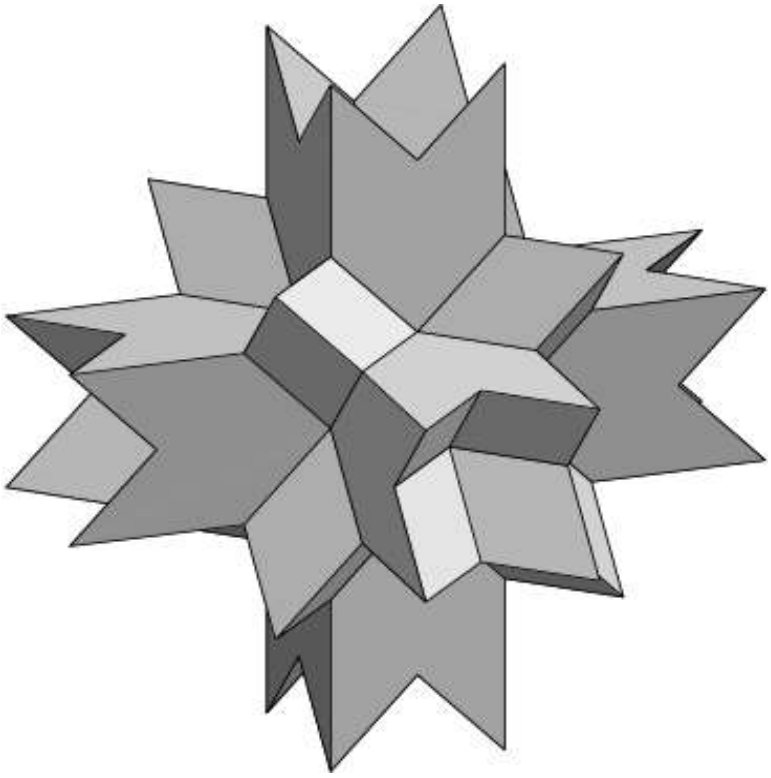
Следующая звездчатая форма кубооктаэдра образована из соединения куба и октаэдра добавлением 24 бипирамид.



Третья звездчатая форма кубооктаэдра представляет собой соединение шести четырехугольных пирамид, основаниями которых служат квадраты.

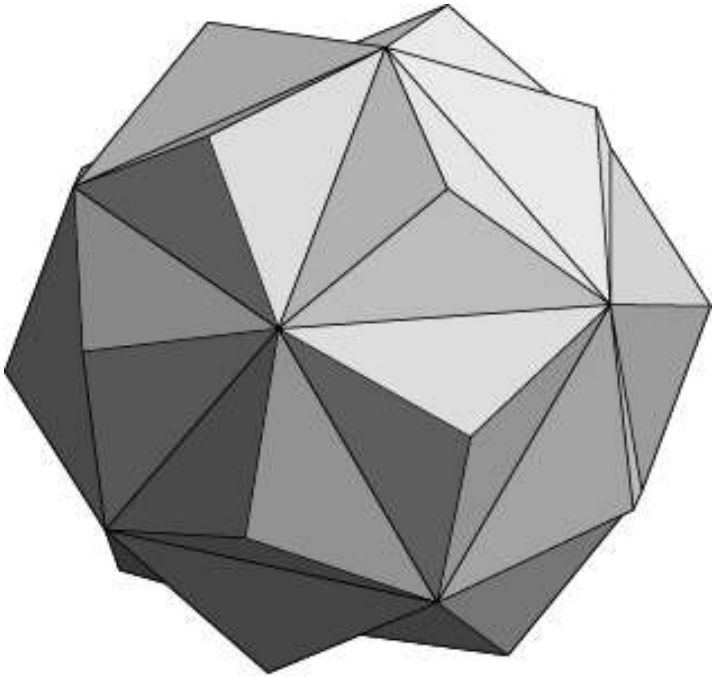


Последняя звездчатая форма кубооктаэдра является соединением двух тетраэдров и трех правильных четырехугольных призм, общей частью которых служит куб.

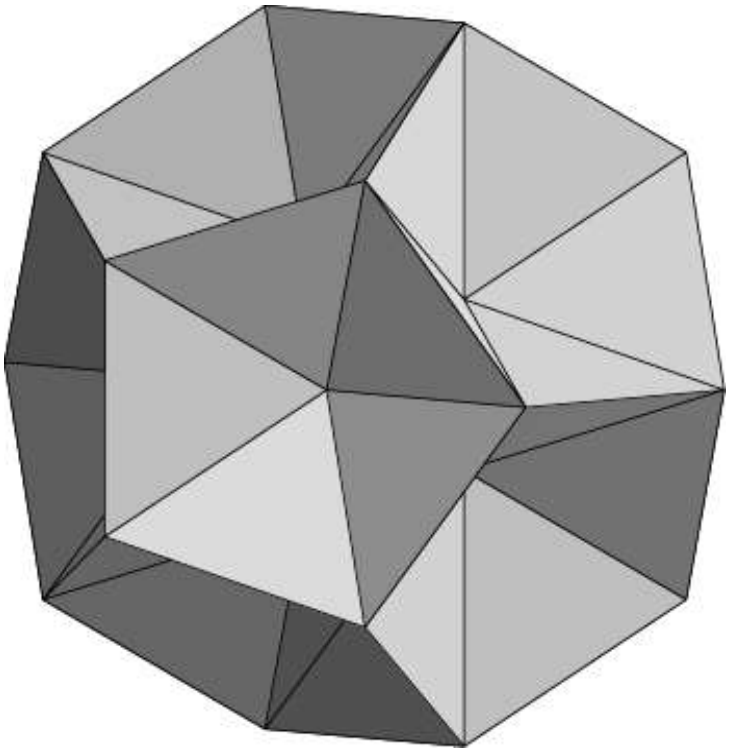


Икосаэдр имеет 59 звездчатых форм. Мы представим только некоторые из них.

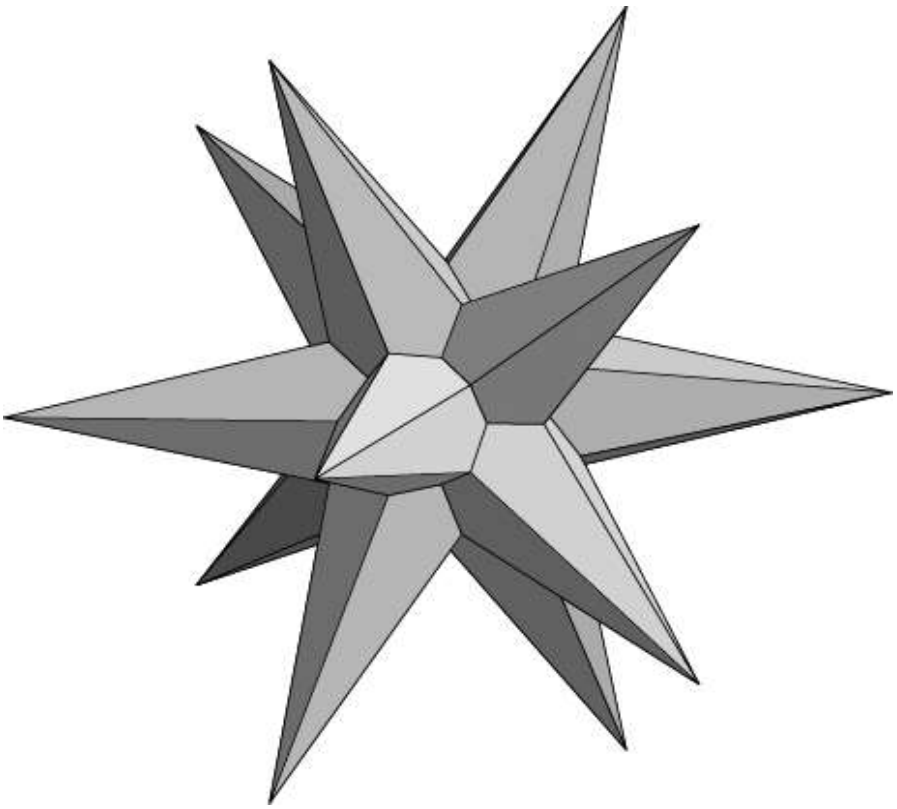
Первая звездчатая форма икосаэдра получается достраиванием на гранях икосаэдра правильных треугольных пирамид.

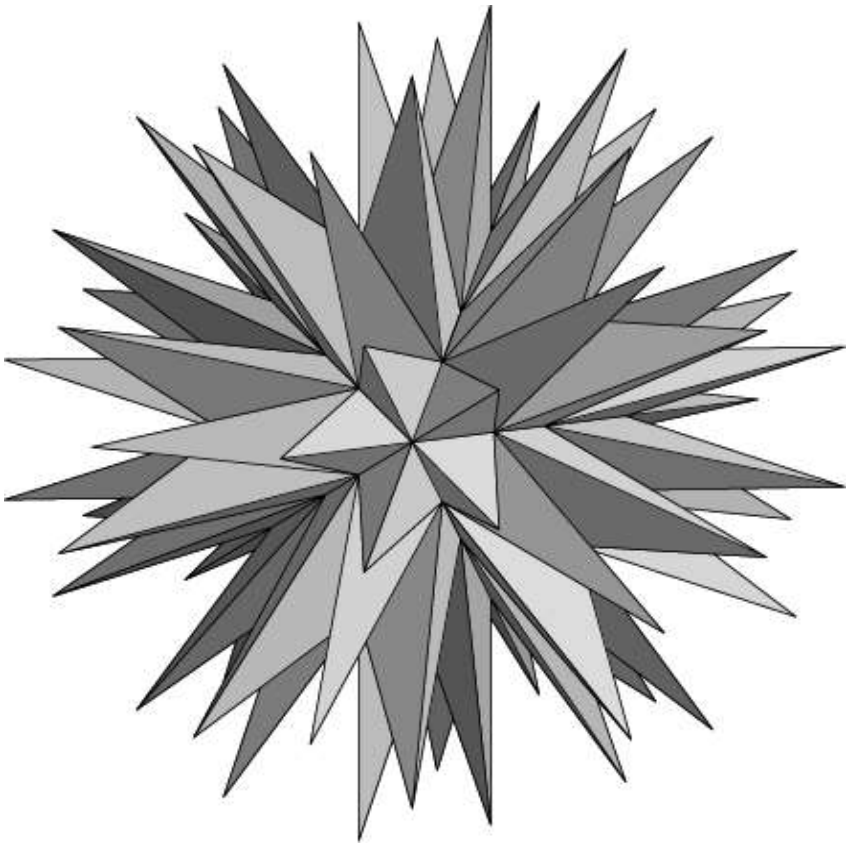


Следующая звездчатая форма получается вырезанием из граней додекаэдра правильных пирамид, боковые грани которых – правильные треугольники.



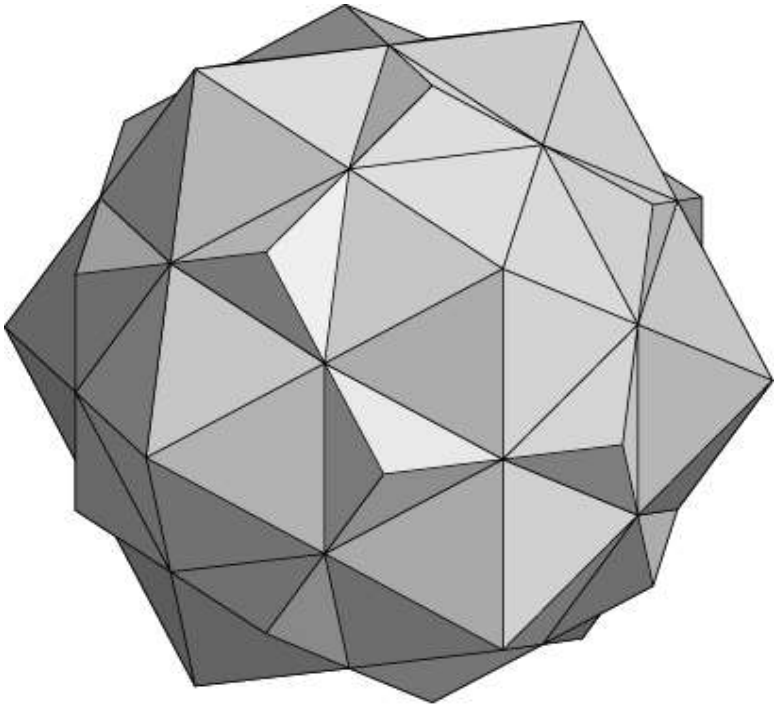
На следующих рисунках приведены еще две звездчатые формы икосаэдра.



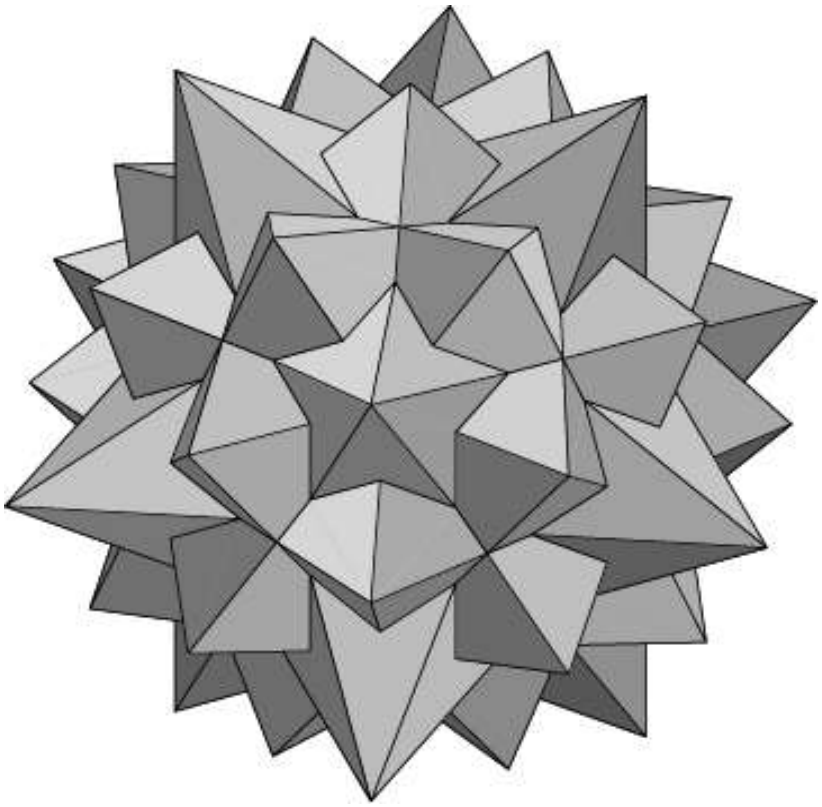


Икосододекаэдр имеет 19 звездчатых форм.

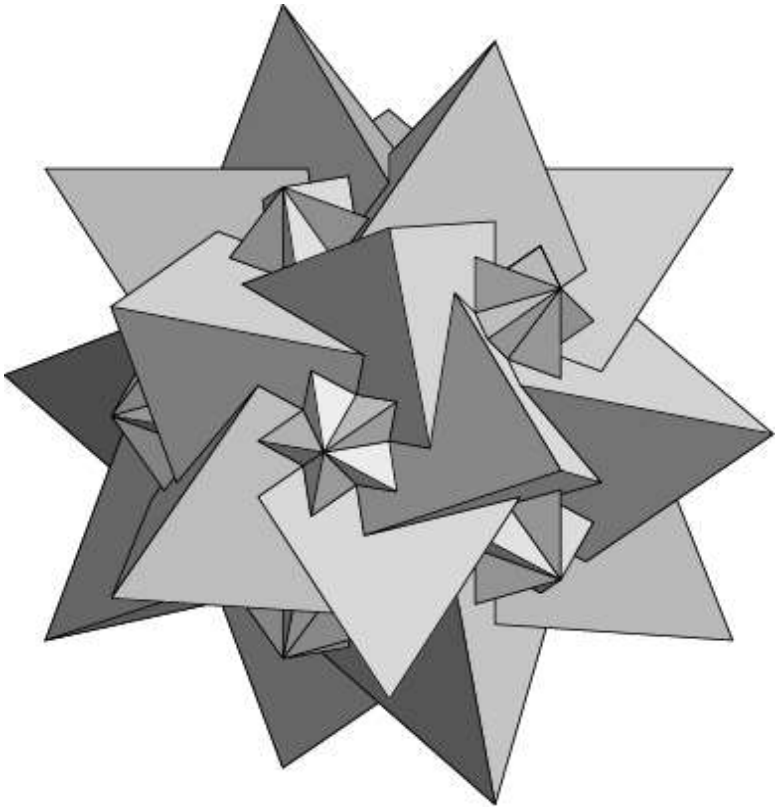
Первая звездчатая форма икосододекаэдра является объединением икосаэдра и двойственного ему додекаэдра.



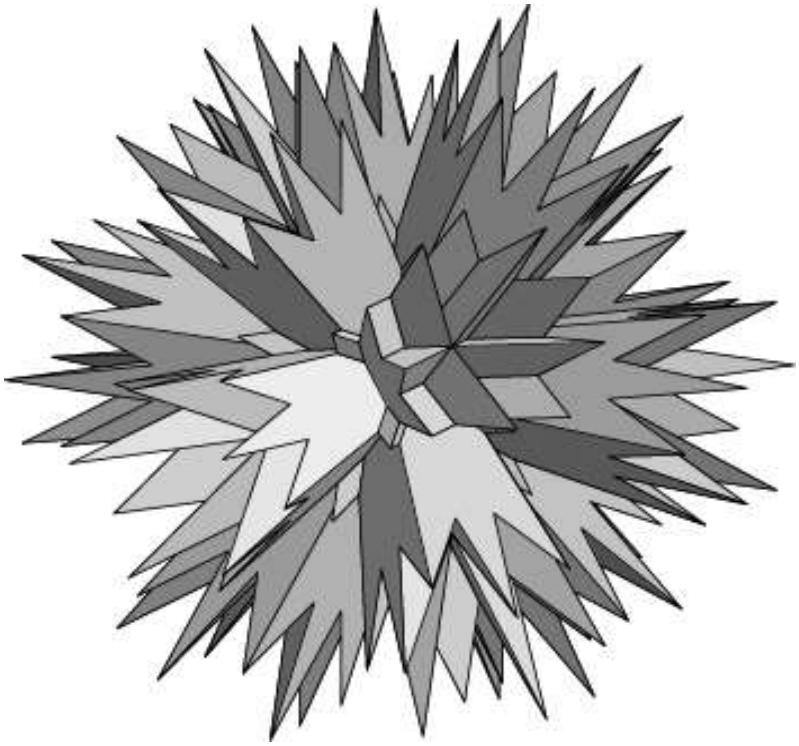
Пятая звездчатая форма икосододекаэдра является объединением малого звездчатого додекаэдра и октаэдров.



Восьмая звездчатая форма икосододекаэдра является объединением большого додекаэдра и тетраэдров.

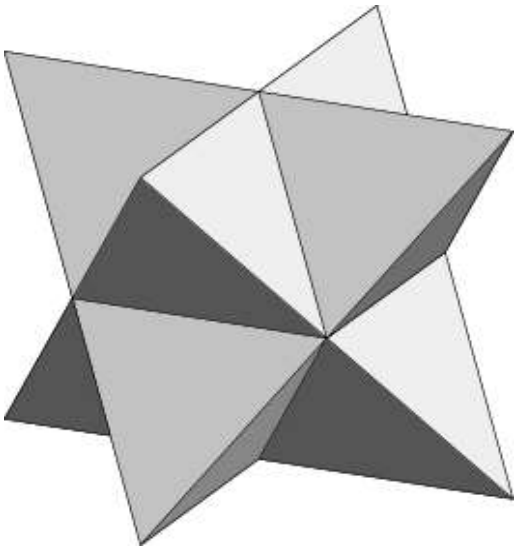


На следующем рисунке представлена завершающая, девятнадцатая, форма икосододекаэдра.



Упражнения

1. На рисунке изображен многогранник, называемый звездчатым октаэдром. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И. Кеплером и назван им "*Stella octangula*" - звезда восьмиугольная. Он является объединением двух тетраэдров. Какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров?

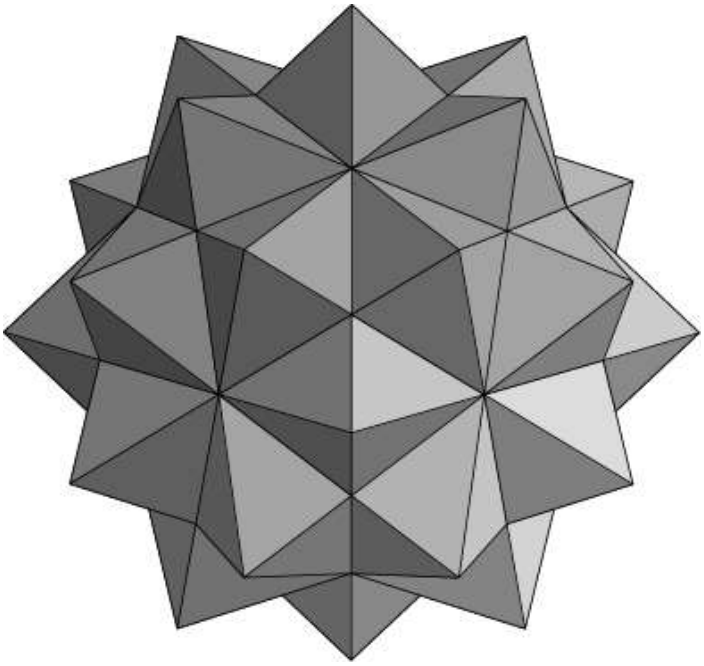


2. Имеет ли звездчатый октаэдр центр симметрии?

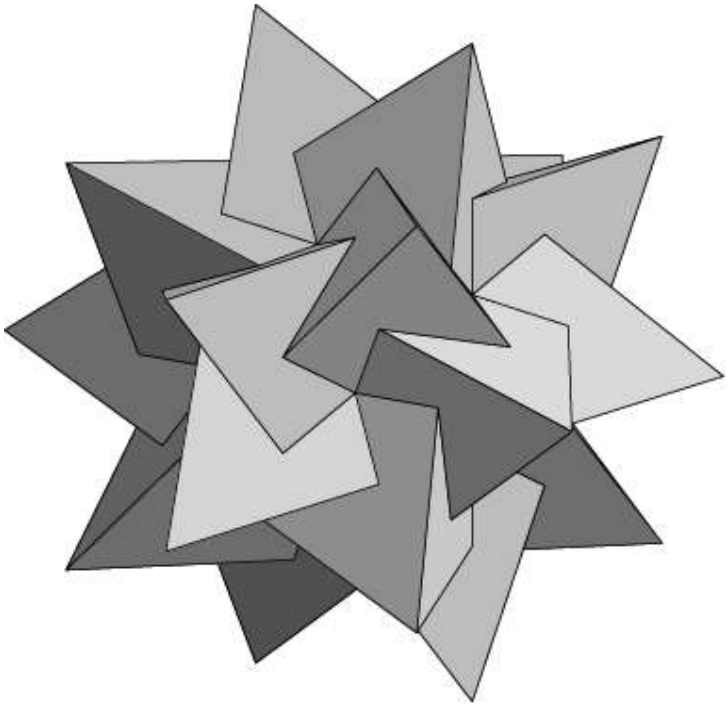
3. Сколько осей симметрии имеет звездчатый октаэдр?

4. Сколько плоскостей симметрии имеет звездчатый октаэдр?

5. Сколько октаэдров образует звездчатую форму икосаэдра, изображенную на рисунке?



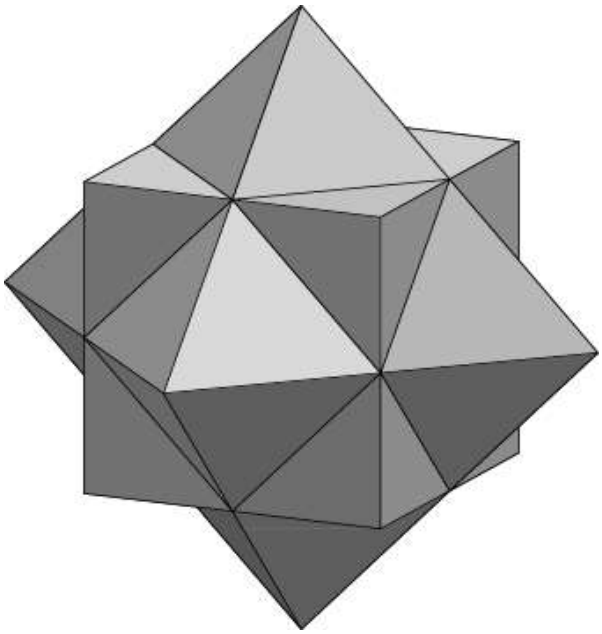
6. Сколько тетраэдров образует звездчатую форму икосаэдра, изображенную на рисунке?



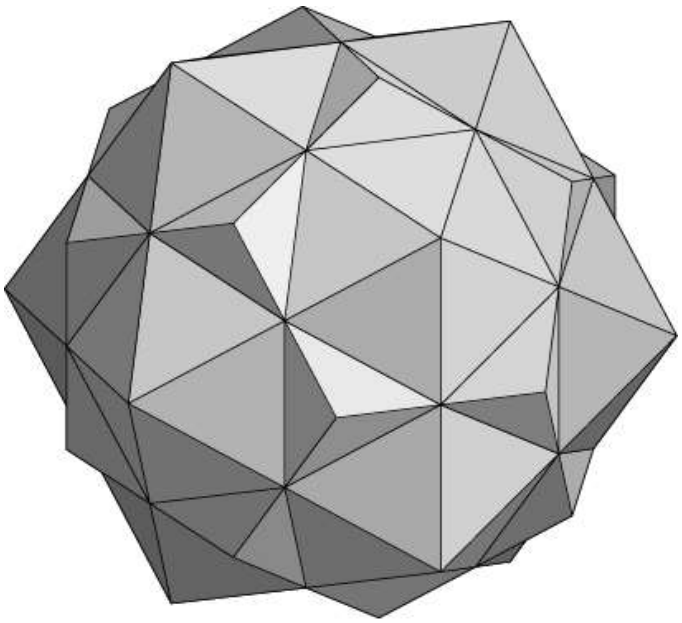
7. Сколько октаэдров входит в пятую звездчатую форму икосододекаэдра?

8. Сколько тетраэдров входит в восьмую звездчатую форму икосододекаэдра?

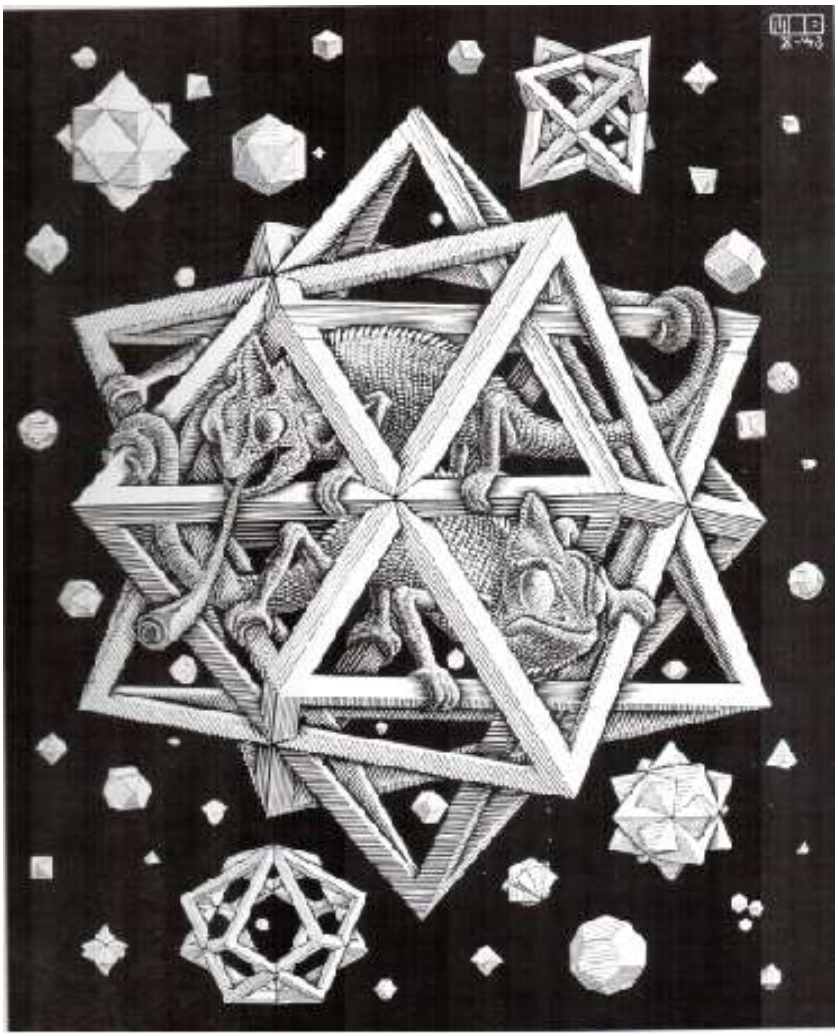
9. Какой многогранник является пересечением куба и двойственного ему октаэдра?



10. Какой многогранник является пересечением икосаэдра и двойственного ему додекаэдра?



В заключение приведем несколько рисунков М. Эшера с изображением звездчатых многогранников.



Литература

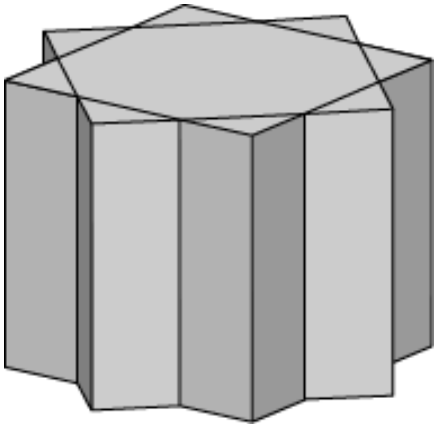
1. Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995.
2. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Нестандартные и исследовательские задачи по геометрии. – М.: Мнемозина, 2004.
3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2006.
4. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Многогранники. Элективный курс. Учебное пособие для 10-11 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2007.

ОТВЕТЫ

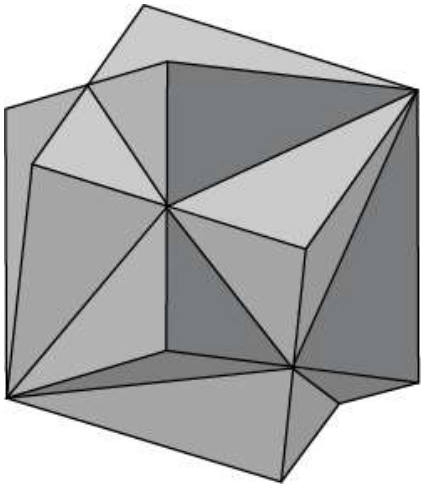
I. Правильные многогранники

1. Куб

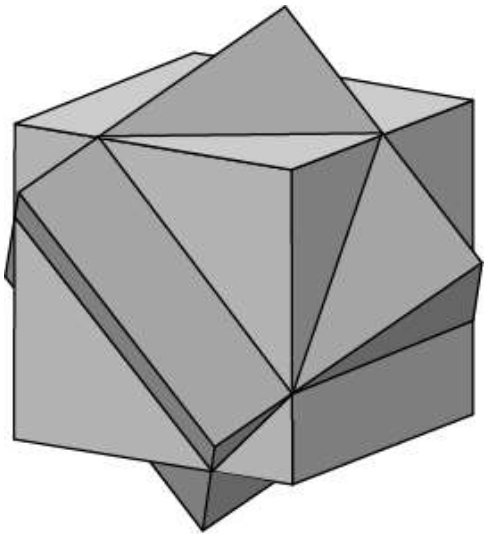
1. 8. **2.** 12. **3.** У каждого ребра куба имеется три ребра, ему параллельных. Поэтому число пар параллельных рёбер куба равно $\frac{12 \cdot 3}{2} = 18$. **4.** У каждого ребра куба имеется восемь ребер, ему перпендикулярных. Поэтому число пар перпендикулярных рёбер куба равно $\frac{12 \cdot 8}{2} = 48$. **5.** У каждого ребра куба имеется четыре скрещивающихся с ним ребра. Поэтому число пар скрещивающихся рёбер куба равно $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$. **6.** 3. **7.** $\sqrt{2}$. **8.** $\sqrt{3}$. **9.** Да. **10.** 9. **11.** 9. **12.** 3. **13.** в), д), ж). **14.** 0,5. **15.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **16.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **17.** Правильная восьмиугольная призма.



18. Многогранник, составленный из двух равных правильных шестиугольных пирамид с общим основанием.

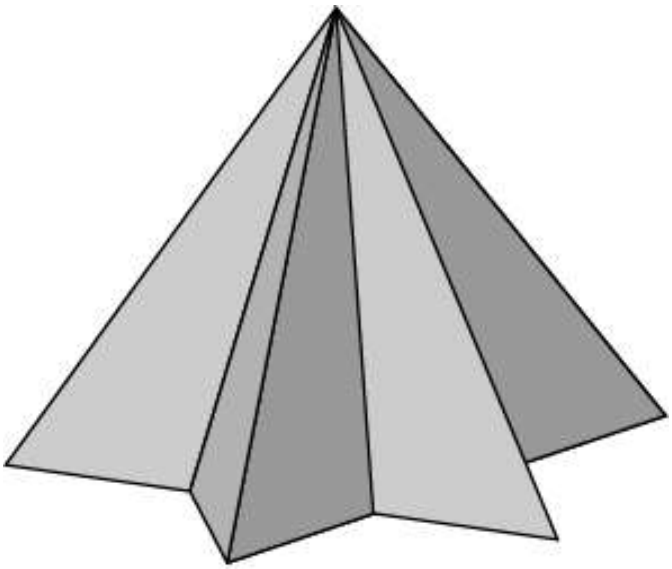


19. Многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы и двух правильных четырехугольных пирамид, поставленных на основания этой призмы.



2. Тетраэдр

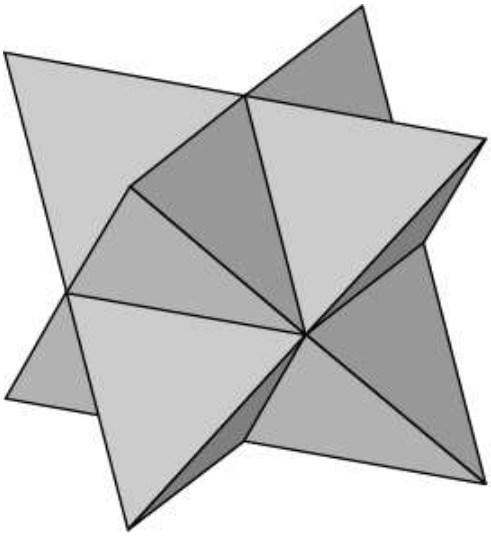
1. 4. **2.** 6. **3.** Нет. **4.** Да, 3. **5.** 3. **6.** Расстояние между противоположными ребрами тетраэдра равно длине отрезка, соединяющего середины этих ребер. Оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **7.** Нет. **8.** Да, 3. **9.** Да, 6. **10.** 4. **11.** а). **12.** $\sqrt{2}$. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **15.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **16.** Радиус полувписанной сферы равен половине расстояния между противоположными ребрами тетраэдра. Он равен $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **17.** Правильная шестиугольная пирамида.



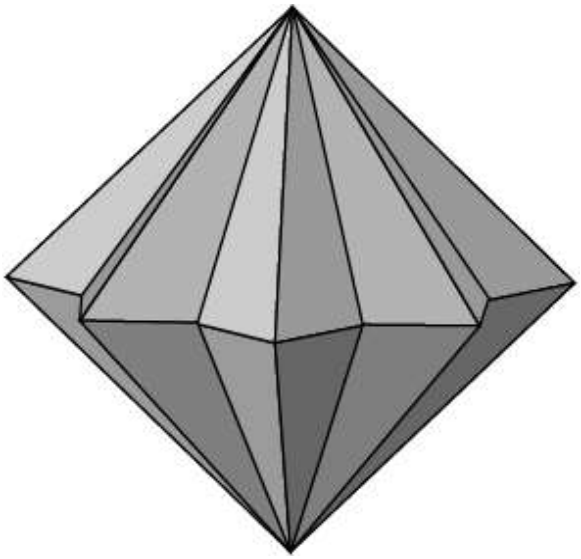
18. Куб. **19.** Тетраэдр.

3. Октаэдр

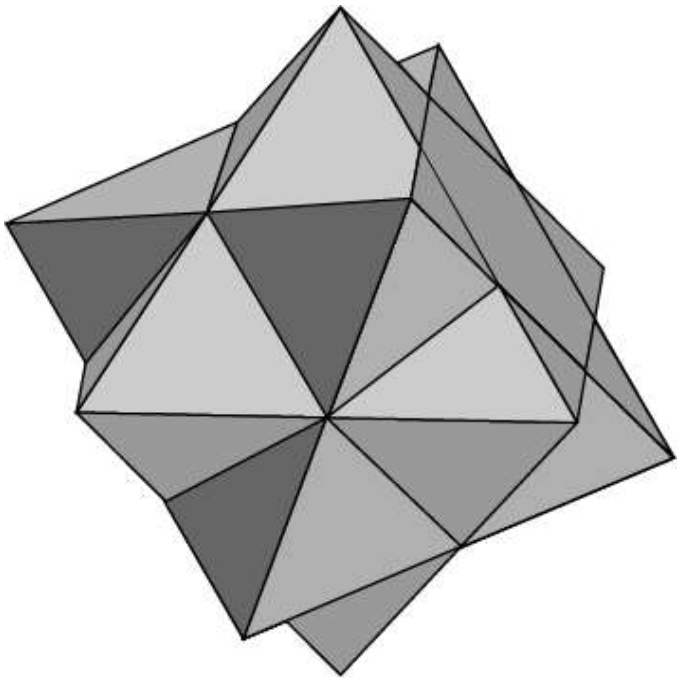
1. 6. **2.** 12. **3.** У каждого ребра октаэдра имеется одно ребро, ему параллельное. Поэтому число пар параллельных рёбер октаэдра равно 6. **4.** У каждого ребра октаэдра имеется четыре скрещивающихся с ним ребра. Поэтому число пар скрещивающихся рёбер октаэдра равно $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$. **5.** 4. **6.** $\sqrt{2}$. **7.** 1. **8.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9.** Да. **10.** 9. **11.** 9. **12.** 2. **13.** в). **14.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **16.** 0,5. **17.** Октаэдр. **18.** Радиус r вписанной сферы равен половине расстояния между противоположными гранями октаэдра, $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **20.** 0,5. **21.** Октаэдр.



22. Многогранник, составленный из двух равных правильных восьмиугольных пирамид с общим основанием.



23. Многогранник, составленный из двух правильных усеченных шестиугольных пирамид с общим основанием.



24. Куб. **25.** Октаэдр.

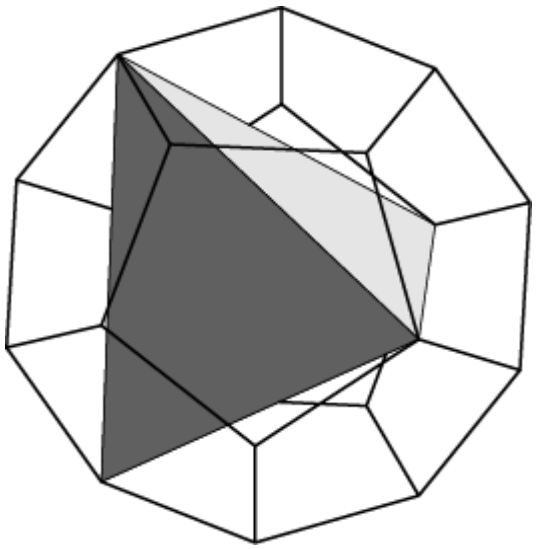
4. Икосаэдр

1. 12. **2.** 30. **3.** У каждого ребра икосаэдра имеется одно ребро, ему параллельное. Поэтому число пар параллельных ребер икосаэдра равно 15. **4.** У каждого ребра икосаэдра имеется двадцать скрещивающихся с ним ребер. Поэтому число пар скрещивающихся рёбер икосаэдра равно $\frac{30\cdot 20}{2}=300$. **5.** У каждой грани икосаэдра имеется одна грань, ей параллельная. Поэтому число пар параллельных граней равно 10. **6.** Да. **7.** 15. **8.** 15. **9.** Расстояние между противоположными ребрами икосаэдра равно диагонали правильного пятиугольника со стороной 1. Оно равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **10.** $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$. **11.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **12.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **13.** $\sqrt{7-3\sqrt{5}}$. **14.** Если ребро икосаэдра равно $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, то ребро октаэдра равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому, если ребро икосаэдра равно 1, то ребро октаэдра равно $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$. **15.** Радиус R полувписанной сферы равен половине расстояния между противоположными ребрами икосаэдра, т.е. R = $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **16.** Радиус R

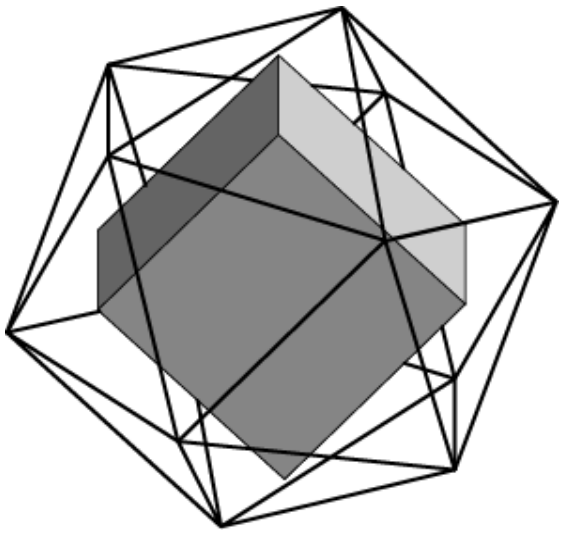
описанной сферы равен половине расстояния между противоположными вершинами икосаэдра, т.е. $R = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **17.** 3.

5. Додекаэдр

1. 20. **2.** 30. **3.** У каждого ребра додекаэдра имеется одно ребро, ему параллельное. Поэтому число пар параллельных рёбер икосаэдра равно 15. **4.** У каждого ребра додекаэдра имеется двадцать скрещивающихся с ним рёбер. Поэтому число пар скрещивающихся ребер додекаэдра равно $\frac{30 \cdot 20}{2} = 300$. **5.** У каждой грани додекаэдра имеется одна грань, ей параллельная. Поэтому число пар параллельных граней равно 6. **6.** Расстояние d между противоположными ребрами единичного додекаэдра равно диагонали правильного пятиугольника со стороной $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поэтому $d = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **7.** Расстояние d между противоположными вершинами равно диагонали прямоугольника со сторонами 1 и $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, т.е. $d = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{2}$. **8.** Да. **9.** 15. **10.** 15. **11.** Если ребро додекаэдра, вписанного в куб, равно 1, то ребро куба равно $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Поэтому, если ребро куба равно 1, то ребро додекаэдра, вписанного в куб, равно $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. **12.** Ребро куба равно диагонали правильного пятиугольника со стороной 1, т.е. оно равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **13.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$. **14.** Ребро додекаэдра равно $\frac{2}{3}$ отрезка, соединяющего середины ребер икосаэдра. Учитывая, что диагональ правильного пятиугольника со стороной 1 равна $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, получаем, что искомое ребро додекаэдра равно $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$. **15.** Да. Рассмотрим куб, вписанный в единичный додекаэдр. Его ребро равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Впишем в куб тетраэдр. Он будет вписан в додекаэдр и его ребро будет равно $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$.



16. Да. Рассмотрим додекаэдр, вписанный в единичный икосаэдр. Его ребро равно $\frac{1+\sqrt{5}}{6}$. Впишем в додекаэдр куб. Он будет вписан в икосаэдр и его ребро будет равно $\frac{3+\sqrt{5}}{6}$.

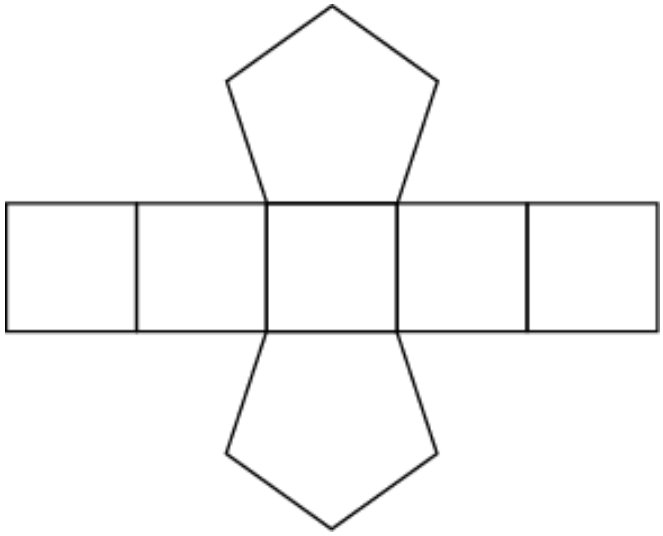


17. Радиус R полувписанной сферы равен половине расстояния между противоположными ребрами единичного додекаэдра, т.е. $R = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$. **18.** Радиус R описанной сферы равен половине расстояния между противоположными вершинами единичного додекаэдра, т.е. $R = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{4}$. **19.** 4. **20.** Икосаэдр. **21.** Додекаэдр.

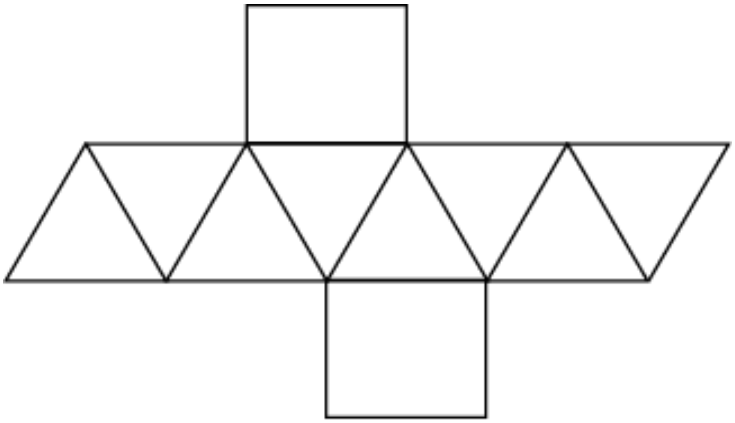
II. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

1. Призмы и антипризмы

1. $2n$. **2.** $3n$. **3.** $n+2$. **4.** $2n$. **5.** $4n$. **6.** $2n+2$. **7.** $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Да, 5. **11.** Да, одну. **12.** Да, 6. **13.** Да, 4. **14.** Одна из возможных разверток пятиугольной призмы показана на рисунке.



15. Одна из возможных разверток четырехугольной антипризмы показана на рисунке.



16. 4. **17.** 3. **18.** Нет. **19.** Нет. **20.** Да. Если радиус окружности, описанной около основания призмы равен r, а высота призмы равна h, то радиус R сферы, описанной около призмы, равен $\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}$. **21.** Да. Если радиус окружности, описанной около основания антипризмы равен r, а высота антипризмы равна h, то радиус R сферы, описанной около антипризмы, равен $\sqrt{r^2+\frac{h^2}{4}}$. **22.** Да. Если радиус сферы, описанной около призмы равен R, а высота призмы равна h, то радиус сферы, полувписанной в

призму, равен $\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}$. **23.** Да. Если радиус сферы, описанной около антипризмы равен R, а высота антипризмы равна h, то радиус сферы, полувписанной в антипризму, равен $\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}$.

2. Усеченный куб

1. 24. **2.** 36. **3.** 14. **4.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **5.** $\sqrt{2}-1$. **6.** Да. **7.** 9. **8.** 9. **9.** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. **10.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **11.** Нет, расстояние от центра усеченного куба до плоскостей треугольных граней отличается от расстояния от центра усеченного куба до плоскостей восьмиугольных граней. **12.** 4.

3. Усеченный тетраэдр

1. 12. **2.** 18. **3.** 8. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** Нет. **7.** 3. **8.** 6. **9.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **10.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **11.** Нет, расстояние от центра усеченного тетраэдра до плоскостей треугольных граней отличается от расстояния от центра усеченного тетраэдра до плоскостей шестиугольных граней. **12.** 4.

4. Усеченный октаэдр

1. 24. 2. 36. 3. 14. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{1}{3}$. 6. 0,75. 7. Да. 8. 9. 9. 9. 10. 1,5. 11. Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. 12. Нет, расстояние от центра усеченного октаэдра до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра усеченного октаэдра до плоскостей шестиугольных граней. 13. 3.

5. Усеченный икосаэдр

1. 60. **2.** 90. **3.** 32. **4.** $\frac{1}{3}$. **5.** $\frac{1}{3}$. **6.** Да. **7.** 15. **8.** 15. **9.** $\frac{3+3\sqrt{5}}{4}$. **10.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **11.** Нет, расстояние от центра усеченного икосаэдра до

плоскостей пятиугольных граней отличается от расстояния от центра усеченного икосааэдра до плоскостей шестиугольных граней. **12.** 4.

6. Усеченный додекаэдр

1. 60. **2.** 90. **3.** 32. **4.** $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$. **5.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **6.** Да. **7.** 15. **8.** 15. **9.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$. **10.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **11.** Нет, расстояние от центра усеченного додекаэдра до плоскостей треугольных граней отличается от расстояния от центра усеченного додекаэдра до плоскостей десятиугольных граней. **12.** 4.

7. Кубооктаэдр

1. 12. **2.** 24. **3.** 14. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** Да. **6.** 9. **7.** 9. **8.** Отсечением от углов октаэдра правильных четырехугольных пирамид, боковые ребра которых равны половине ребра октаэдра. **9.** 2. **10.** $\sqrt{3}$. **11.** 1. **12.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **13.** Нет, расстояние от центра кубооктаэдра до плоскостей треугольных граней отличается от расстояния от центра кубооктаэдра до плоскостей квадратных граней. **14.** 2.

8. Икосододекаэдр

1. 30. **2.** 60. **3.** 32. **4.** $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. **5.** Да. **6.** 15. **7.** 15. **8.** Отсечением от углов икосаэдра правильных пятиугольных пирамид, боковые ребра которых равны половине ребра икосаэдра. **9.** $1+\sqrt{5}$. **10.** $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **11.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **12.** $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$. **13.** Нет, расстояние от центра икосододекаэдра до плоскостей треугольных граней отличается от расстояния от центра икосододекаэдра до плоскостей пятиугольных граней. **14.** 2.

9. Усеченный кубооктаэдр

1. 48. **2.** 72. **3.** 26. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** Да. **6.** 9. **7.** 9. **8.** $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{2}}}{2}$. **9.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **10.** Нет, расстояние от центра усеченного кубооктаэдра до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра усеченного кубооктаэдра до плоскостей шестиугольных граней. **11.** 3.

10. Усеченный икосододекаэдр

1. 120. **2.** 180. **3.** 62. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет, расстояние от центра усеченного икосододкаэдра до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра икосододекаэдра до плоскостей шестиугольных граней. **8.** 3.

11. Ромбокубооктаэдр

1. 24. **2.** 48. **3.** 26. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** Да. **6.** 9. **7.** 9. **8.** $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$. **9.** Если радиус полувписанной сферы равен R, то радиус описанной сферы равен $\sqrt{R^2+\frac{1}{4}}$. **10.** Нет, расстояние от центра ромбокубооктаэдра до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра ромбокубооктаэдра до плоскостей треугольных граней. **11.** 2.

12. Ромбоикосододекаэдр

1. 60. **2.** 120. **3.** 62. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет, расстояние от центра ромбоикосододекаэдра до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра ромбоикосододекаэдра до плоскостей пятиугольных граней. **8.** 2.

13. Курносый куб

1. 24. **2.** 60. **3.** 38. **4.** Да. **5.** 0. **6.** 0. **7.** Нет, расстояние от центра курносого куба до плоскостей квадратных граней отличается от расстояния от центра курносого куба до плоскостей треугольных граней. **8.** 3.

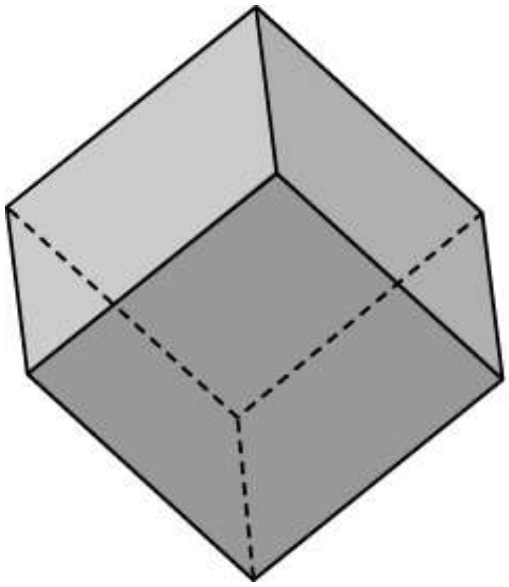
14. Курносый додекаэдр

1. 60. **2.** 150. **3.** 92. **4.** Да. **5.** 0. **6.** 0. **7.** Нет, расстояние от центра курносого додекаэдра до плоскостей пятиугольных граней отличается от расстояния от центра курносого додекаэдра до плоскостей треугольных граней. **8.** 3.

III. МНОГОГРАННИКИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ПОЛУПРАВИЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКАМ

1. Многогранники, двойственные призмам и антипризмам

1. n+2. **2.** 3n. **3.** 2n. **4.** 2n+2. **5.** 4n. **6.** 2n. **7.** Куб.



8. Нет. **9.** Да. **10.** Да, пять. **11.** Нет. **12.** Да, шесть. **13.** Да, пять. **14.** 3. **15.** 3. **16.** Да. **17.** Да. **18.** Нет. **19.** Нет. **20.** Да. **21.** Да.

2. Многогранник, двойственный усеченному кубу

1. 14. **2.** 36. **3.** 24. **4.** Да. **5.** 9. **6.** 9. **7.** 3. **8.** Нет. **9.** $2+\sqrt{2}$. **10.** Да, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

3. Многогранник, двойственный усеченному тетраэдру

1. 8. **2.** 18. **3.** 12. **4.** Нет. **5.** 3. **6.** 6. **7.** 3. **8.** Нет. **9.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **10.** Да, $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

4. Многогранник, двойственный усеченному октаэдру

1. 14. **2.** 36. **3.** 24. **4.** Да. **5.** 9. **6.** 9. **7.** 2. **8.** Нет. **9.** 3. **10.** Да, 1,5.

5. Многогранник, двойственный усеченному икосаэдру

1. 32. **2.** 90. **3.** 60. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет. **8.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$. **9.** Да, $\frac{3+3\sqrt{5}}{4}$.

6. Многогранник, двойственный усеченному додекаэдру

1. 32. **2.** 90. **3.** 60. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет. **8.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$. **9.** Да, $\frac{5+3\sqrt{5}}{4}$.

7. Многогранник, двойственный кубооктаэдру

1. 14. **2.** 24. **3.** 12. **4.** Да. **5.** 9. **6.** 9. **7.** 3. **8.** Нет. **9.** $\sqrt{3}$. **10.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **11.** Ромбододекаэдр. **12.** Ромбододекаэдр.

8. Многогранник, двойственный икосододекаэдру

1. 32. **2.** 60. **3.** 30. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет. **8.** $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$. **9.** $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$. **10.** Многогранник, двойственный икосододекаэдру. **11.** Многогранник, двойственный икосододекаэдру.

9. Многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру

1. 26. **2.** 72. **3.** 48. **4.** Да. **5.** 9. **6.** 9. **7.** Нет. **8.** $\sqrt{12+6\sqrt{2}}$. **9.** Да, $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{2}}}{2}$.

10. Многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру

1. 62. **2.** 180. **3.** 120. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет. **8.** Да.

11. Многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру

1. 26. **2.** 48. **3.** 24. **4.** Да. **5.** 9. **6.** 9. **7.** Нет. **8.** $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **9.** Да, $\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$. **10.** Многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру.

12. Многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру

1. 62. **2.** 120. **3.** 60. **4.** Да. **5.** 15. **6.** 15. **7.** Нет. **8.** Да. **9.** Многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру.

13. Многогранник, двойственный курносому кубу

1. 38. **2.** 60. **3.** 24. **4.** Да. **5.** 0. **6.** 0. **7.** Нет. **8.** Да.

14. Многогранник, двойственный курносому додекаэдру

1. 92. **2.** 150. **3.** 60. **4.** Да. **5.** 0. **6.** 0. **7.** Нет. **8.** Да.

IV. ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ

1. Правильные звездчатые многогранники

1. 60. **2.** 60. **3.** 60. **4.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **6.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **7.** Нет. **8.** Нет. **9.** Нет. **10.** Нет. **11.** 15. **12.** 15. **13.** 15. **14.** 15. **15.** 15. **16.** 15. **17.** 15. **18.** 15.

2. Звездчатые формы кубооктаэдра, икосаэдра и икосододекаэдра

1. Октаэдр. **2.** Да. **3.** 9. **4.** 9. **5.** 5. **6.** 5. **7.** 5. **8.** 5. **9.** Кубооктаэдр. **10.** Икосододекаэдр.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
I. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ
1. Куб
2. Тетраэдр
3. Октаэдр
4. Икосаэдр
5. Додекаэдр
II. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ
1. Призмы и антипризмы
2. Усеченный куб
3. Усеченный тетраэдр
4. Усеченный октаэдр
5. Усеченный икосаэдр
6. Усеченный додекаэдр
7. Кубооктаэдр
8. Икосододекаэдр
9. Усеченный кубооктаэдр
10. Усеченный икосододекаэдр
11. Ромбокубооктаэдр
12. Ромбоикосододекаэдр
13. Курносый куб
14. Курносый додекаэдр
III. МНОГОГРАННИКИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ПОЛУПРАВИЛЬНЫМ МНОГОГРАННИКАМ
1. Многогранники, двойственные призмам и антипризмам
2. Многогранник, двойственный усеченному кубу
3. Многогранник, двойственный усеченному тетраэдру
4. Многогранник, двойственный усеченному октаэдру
5. Многогранник, двойственный усеченному икосаэдру
6. Многогранник, двойственный усеченному додекаэдру
7. Многогранник, двойственный кубооктаэдру
8. Многогранник, двойственный икосододекаэдру
9. Многогранник, двойственный усеченному кубооктаэдру
10. Многогранник, двойственный усеченному икосододекаэдру
11. Многогранник, двойственный ромбокубооктаэдру
12. Многогранник, двойственный ромбоикосододекаэдру
13. Многогранник, двойственный курносому кубу
14. Многогранник, двойственный курносому додекаэдру
IV. ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ
1. Правильные звездчатые многогранники
2. Звездчатые формы кубооктаэдра, икосаэдра и икосододекаэдра