Вариации на тему задачи Штейнера о построении кратчайших сетей[1]

Задачи на построение кратчайших сетей дорог, электрических цепей, трубопроводов и т. д. имеют большое прикладное значение.

На языке графов задачу Штейнера о нахождении кратчайших сетей можно сформулировать следующим образом.

Пусть на плоскости задан набор точек. Задача состоит в нахождении связного графа, среди вершин которого имеются все данные точки, а сумма длин его рёбер наименьшая [1, 2, 3].

Среди графов с наименьшей суммой длин рёбер выберем графы с наименьшим числом вершин. Такие графы будем называть минимальными для данного набора точек.

Рассмотрим некоторые свойства минимальных графов.

Свойство 1. Минимальный граф не содержит циклов.

Действительно, если в графе имеется цикл, то одно из рёбер этого цикла можно удалить. Останется связный граф с меньшей суммой длин его рёбер. Следовательно, данный граф не является минимальным.

Свойство 2. В минимальном графе углы, образованные двумя рёбрами с общей вершиной, не могут быть меньше 120°.

Действительно, пусть рёбра AB и AC графа образуют угол BAC, меньший 120° (рис. 24.1). Обозначим D точку, из которой рёбра AB и AC видны под углом 120°. Повернём рёбра AB, AC и точку D вокруг вершины A на угол 60°. Соответствующие рёбра и точку обозначим AB', AC', D'. Заметим, что треугольник ADD' равносторонний. Следовательно, точки B, D, D', C' принадлежат одной прямой. Сумма длин отрезков AD, BD, CD равна длине отрезка BC'. Она меньше суммы длин отрезков AB и $AC' = AC$. Значит, граф, в котором добавлена вершина D и вместо рёбер AB и AC взяты рёбра DA, DB, DC, имеет меньшую сумму длин рёбер. Следовательно, исходный граф не является минимальным.

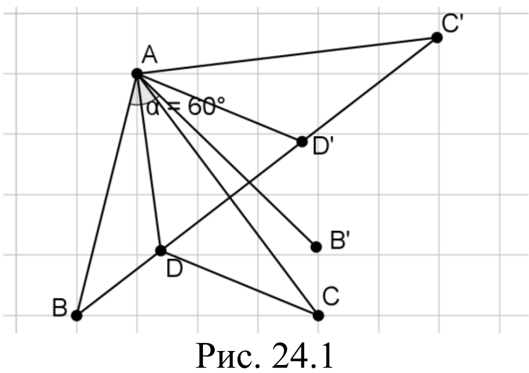


Рис. 24.1

Следствие 1. В вершинах минимального графа не может сходиться более трёх рёбер.

---
[1] VIII Международная научная конференция «Математика, образование, культура». – Тольятти, 2017.

Действительно, в случае, если в вершине графа сходится более трёх рёбер, то один из углов, образованных этими рёбрами, меньше 120°. Следовательно, данный граф не является минимальным.

Следствие 2. В вершинах минимального графа, добавленных к исходным точкам, может сходиться только три ребра, образующих между собою углы 120°.

Действительно, если в добавленной вершине A сходится два ребра AB и AC, то данную вершину можно убрать, а рёбра AB и AC заменить на ребро BC. Полученный граф будет иметь меньшее число добавленных вершин и сумму длин рёбер, не большую, чем исходный граф.

Если в добавленной вершине A сходится одно ребро AB, то его можно просто убрать. Полученный граф будет иметь меньшее число добавленных вершин и сумму длин рёбер, меньшую, чем исходный граф.

Следствие 3. Минимальный граф является простым.

Действительно, если два ребра графа имеют общую внутреннюю точку, то её можно добавить к вершинам графа, не изменив при этом сумму длин его рёбер. Тогда в этой вершине будет сходиться четыре ребра. Следовательно, данный граф не является минимальным.

Таким образом, минимальный граф для данного набора точек является деревом – простым связным графом без циклов. Причём, в каждой добавленной вершине сходится три ребра, образующих между собой углы 120°, а в каждой данной точке сходится не более трёх рёбер.

Свойство 4. Если число данных точек минимального графа равно n, то число m добавленных вершин не превосходит $n – 2$.

Действительно, так как минимальный граф является деревом, то для числа его вершин В и числа рёбер Р имеет место равенство В – Р = 1, где В = $n + m$. Так как в каждой данной точке графа сходится не менее одного ребра, а в каждой добавленной вершине сходится три ребра, то имеет место неравенство $2\text{Р} \geq n + 3m$. Из этих равенства и неравенства следует искомое неравенство $m \leq n – 2$.

Решение задачи Штейнера опирается на перечисленные выше свойства. Напомним его для случая трёх точек A, B, C.

Если данные точки A, B, C являются вершинами треугольника, углы которого меньше 120°, то искомая сеть получается добавлением одной новой точки – точки Торричелли D – точкой, из которой стороны треугольника видны под углом 120°. Она состоит из трёх отрезков, соединяющих вершины треугольника ABC с его точкой Торричелли D (рис. 24.2).

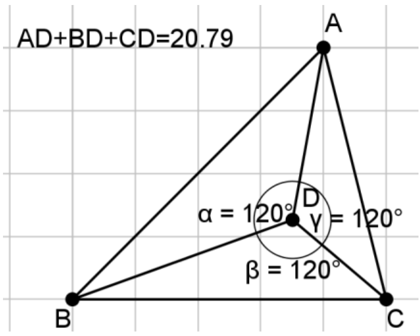


Рис. 24.2

В случае, если один из углов, образованный точками A, B, C, например угол BAC, больше или равен 120º, искомая сеть состоит из двух отрезков AB и AC.

Рисунки 24.1 и 24.2 получены с помощью программы GeoGebra [4], в которой можно, перемещая точки, наглядно убедиться в том, что найденная точка D даёт наименьшую сумму расстояний от точек A, B и C до точки D. Численные значения приведены при условии, что стороны квадратных клеток равны 2.

Пример решение задачи Штейнера для случая четырёх точек A, B, C, D представлен на рисунке 24.3.

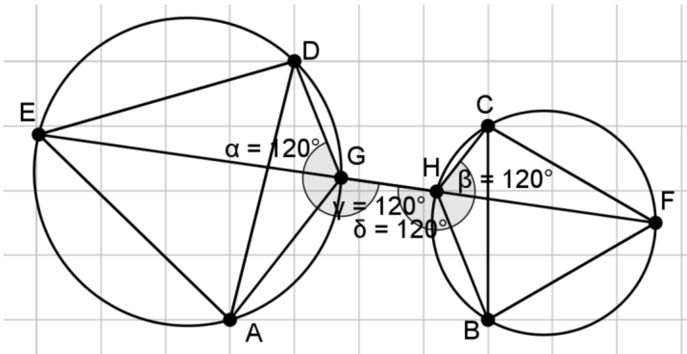


Рис. 24.3

Искомая сеть получается добавлением двух новых точек G и H, которые являются точками пересечения отрезка EF с окружностями, описанными около равносторонних треугольников ADE и BCF. Эта сеть состоит из отрезков AG, DG, BH, CH, GH.

Рассмотрим теперь вариацию задачи Штейнера, которая получается, если к данной системе точек добавляется прямая.

А именно, пусть на плоскости задана прямая и набор точек, расположенных от неё по одну сторону. Задача, которую мы будем рассматривать, состоит в нахождении связного графа, среди вершин которого имеются точка на данной прямой и все данные точки, а сумма длин его рёбер наименьшая.

Среди таких графов с наименьшей суммой длин рёбер выберем графы с наименьшим числом вершин. Такие графы будем называть минимальными для данной прямой и данного набора точек.

В случае, если дана прямая и две точки, задача построения минимального графа близка к задаче Герона, которая состоит в том, чтобы для двух данных точек A и B, расположенных от данной прямой c по одну сторону, найти такую точку C прямой c, для которой сумма расстояний $AC + CB$ наименьшая (рис. 24.4).

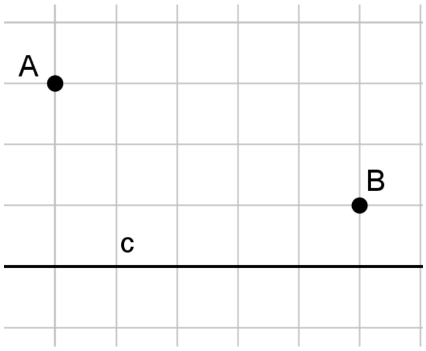


Рис. 24.4

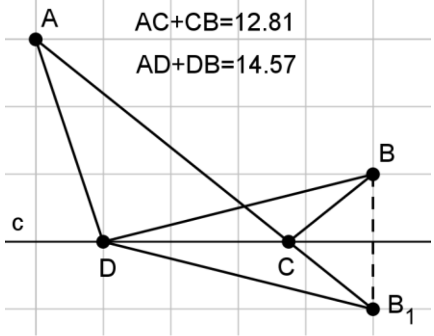


Рис. 24.5

Для нахождения точки C рассматривают точку B_1, симметричную точке B относительно прямой c. Расстояние от любой точки C прямой c до точки B равно расстоянию от неё до точки B_1. Ясно, что искомой точкой C является точка пересечения отрезка AB_1 с прямой c. Для любой другой точки D прямой c сумма $AD + DB$ равна сумме $AD + DB_1$, что, в силу неравенства треугольника, больше $AB_1 = AC + CB$ (рис. 24.5).

Рисунок 24.5 получен с помощью программы GeoGebra, в которой можно, перемещая точки, наглядно убедиться в том, что найденная точка C даёт наименьшую сумму расстояний до точек A и B. Численное значение приведено при условии, что стороны квадратных клеток равны 2.

Рассмотрим теперь задачу нахождения минимального графа для данных прямой и двух точек.

Задача 1. На плоскости даны прямая c и две точки A и B, расположенные от неё по одну сторону. На прямой c требуется найти точку D и соединить её сетью отрезков с точками A и B, сумма длин которых наименьшая.

Эту задачу можно интерпретировать следующим образом.

Два населённых пункта A и B расположены по одну сторону от прямолинейной дороги c. На этой дороге требуется построить автобусную остановку и проложить от неё дорогу до данных населённых пунктов так, чтобы их суммарная длина была наименьшей.

Можно предположить, что искомая сеть устанавливается аналогично тому, как это было сделано в задаче Герона. Однако это не так. Имеется другая сеть отрезков, суммарная длина которых меньше, чем указанная в решении задачи Герона.

Покажем это. Как и при решении задачи Штейнера для трёх точек, искомая сеть будет получаться добавлением не более одной новой точки. Причём, углы, образованные отрезками, сходящимися в точке сети, должны быть равны 120°.

Рассмотрим новую точку C плоскости, расположенную по ту же сторону от прямой c, что и точки A, B. Опустим из неё перпендикуляр CD на прямую c и соединим её отрезками с точками A и B (рис. 24.6).

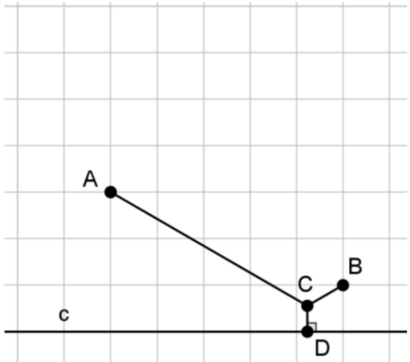


Рис. 24.6

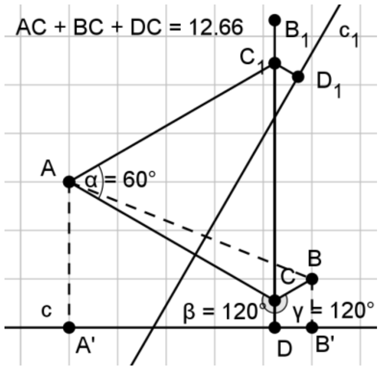


Рис. 24.7

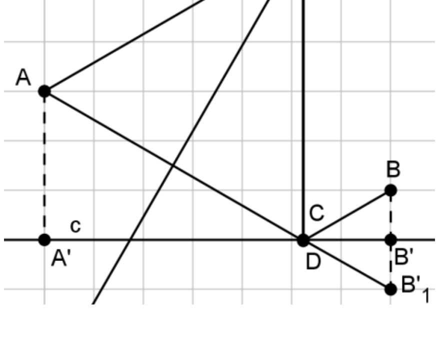
Выясним, при каком расположении точки C сумма длин отрезков AC, BC, DC является наименьшей. Для этого повернём прямую c, точки B, C, D и отрезки AC, BC, DC вокруг точки A на угол 60°. Соответствующие прямую и точки обозначим c_1, B_1, C_1, D_1. Заметим, что треугольник ACC_1 равносторонний. Следовательно, сумма $AC + BC + DC$ равна сумме $DC + CC_1 + C_1B_1$. Последняя сумма является наименьшей в случае, если точки D, C, C_1, B_1 принадлежат одной прямой. Это будет в случае, если углы ACD и BCD равны 120° (рис. 24.7).

Численное значение этой суммы, указано на рисунке 24.7 (стороны квадратных клеток равны 2).

В случае, если выполняется неравенство $A'B' < \sqrt{3}(AA' + BB')$ и углы ABB', BAA' меньше 120°, то искомую точку C можно построить как точку пересечения прямых, проходящих через точки A, B и образующих углы 60° с перпендикулярами соответственно AA', BB' на прямую c (рис. 24.7).

Если угол ABB' или угол BAA' больше или равен 120°, то искомая точка C совпадает соответственно с точкой B или A.

Если выполняется равенство $A'B' = \sqrt{3}(AA' + BB')$, то точка C будет принадлежать прямой c (рис. 24.8). В этом случае точка C совпадает с точкой, построенной в задаче Герона.



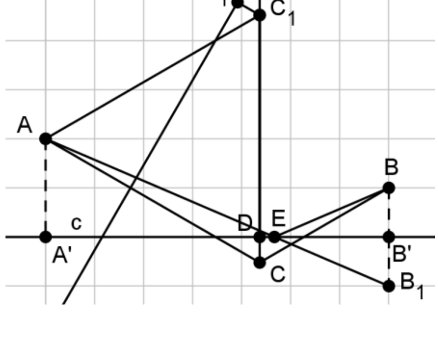


Рис. 24.8 Рис. 24.9

Если выполняется неравенство $A'B' > \sqrt{3}(AA' + BB')$, то точка C будет расположена в другой полуплоскости относительно прямой c (рис. 24.9). В этом случае искомой точкой является точка E, построенная так же, как и в задаче Герона.

В качестве ещё одного примера рассмотрим задачу нахождения минимального графа для данных прямой и трёх точек.

Задача 2. На плоскости даны прямая d и три точки A, B, C, расположенные от неё по одну сторону. На прямой d требуется найти точку D и соединить её сетью отрезков с точками A, B, C, сумма длин которых наименьшая.

Так же, как и при решении задачи Штейнера для четырёх точек, искомый минимальный граф будет получаться добавлением не более двух новых точек.

На рисунке 24.10 показан пример построения такого графа. Сначала строится правильный треугольник BCG и описывается около него окружность. Затем строится точка E как точка пересечения прямых, проходящих через точки A, G и образующих углы 60º с перпендикулярами соответственно AA', GG' на прямую d. Точка F находится как пересечение прямой GE и окружности. Точка D является основанием перпендикуляра, опущенного из точки E на прямую d. Рёбрами искомого графа являются отрезки AE, DE, BF, CF, EF. Численное значение суммы длин этих рёбер указано при условии, что стороны квадратных клеток равны 2.

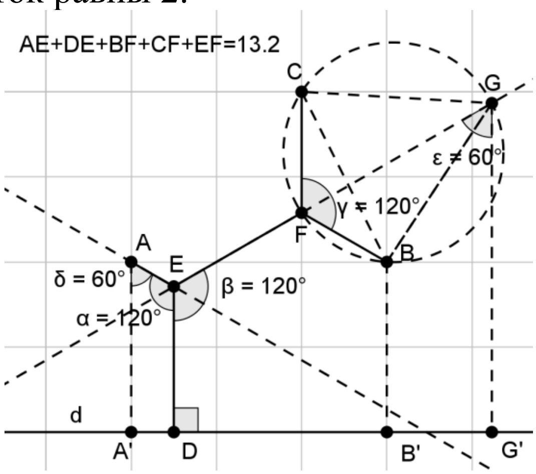


Рис. 24.10

Литература

1. Абакумов Е., Ижболдин О., Курляндчик Л. Нецветаев Н. Кратчайшие сети // Квант. – 1990 - № 3. – С. 17-24.

2. Маршал У. Берн, Рональд Л. Грэм. Поиск кратчайших сетей // В мире науки. – 1989 - № 3. – С. 64-70.

3. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965.

4. http://geogebra.org