ЗАДАЧИ НА РАСПОЗНАВАНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

В.А. Смирнов,
Московский педагогический государственный университет; e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
И.М. Смирнова,
Московский педагогический государственный университет; e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov,
Moscow State Pedagogical University;
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru
I.M. Smirnova,
Moscow State Pedagogical University;
e-mail: i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: куб, тетраэдр, пирамида, сечение.

Keywords: cube, tetrahedron, pyramid, section.

Аннотация: в статье рассматриваются задачи на распознавание многоугольников, которые могут быть сечениями куба, тетраэдра и четырёхугольной пирамиды плоскостью.

Abstract: the article deals with the problems of recognition of polygons, which can be sections of a cube, a tetrahedron and a quadrangular pyramid by a plane.

Как правило, при преподавании темы «Сечения многогранников» рассматривается вопрос о построении сечений [1, 2]. Построению сечений посвящены пособия [3, 4].

В то же время большое значение для развития пространственных представлений учащихся имеют задачи на распознавание вида многоугольников, которые могут быть сечениями многогранника плоскостью; выяснение возможности или невозможности того или иного вида сечения.

Здесь мы рассмотрим задачи на распознавание вида многоугольников, которые могут получаться в сечениях куба, тетраэдра и четырёхугольной пирамиды плоскостью. Задачи со звёздочкой (*) имеют повышенный уровень сложности.

Сечения куба

Задача 1. Может ли сечением куба быть: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?

Ответ. Да. Соответствующие сечения показаны на рисунках 1*а*, *б*, *в*. В случае: а) $A'B_1 = B'B_1 = C'B_1$; б) $A'B_1 = C'B_1 \neq B'B_1$; в) $A'B_1 \neq B'B_1$, $B'B_1 \neq C'B_1$, $A'B_1 \neq C'B_1$.

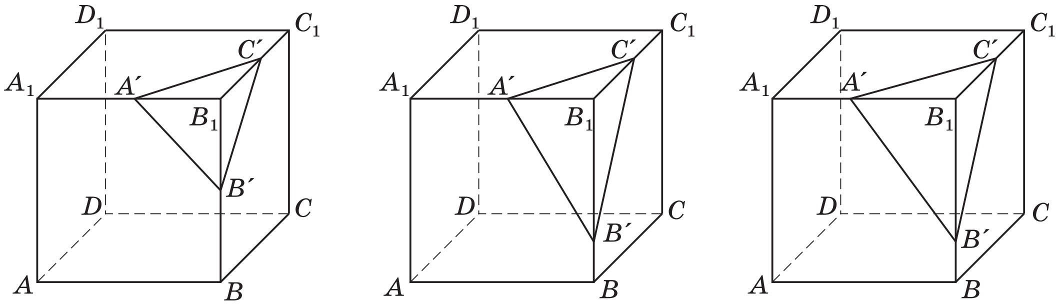
Задача 2*. Может ли сечением куба быть: а) прямоугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник?

Решение. Докажем, что в сечении куба плоскостью не может получиться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – единичный куб. Плоскость пересекает рёбра B_1A_1, B_1B, B_1C_1 соответственно в точках A', B', C', (рис. 1*в*).

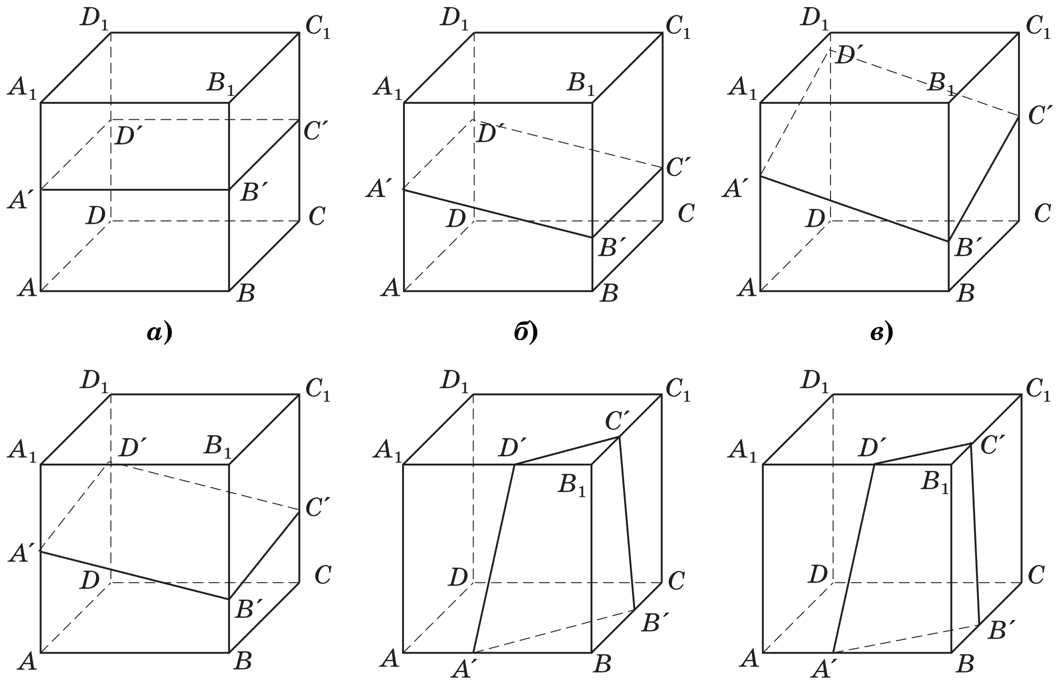
Обозначим $B_1A' = a$, $B_1B' = b$, $B_1C' = c$. По теореме Пифагора находим

$$A'B'^2 = a^2 + b^2,\ A'C'^2 = a^2 + c^2,$$
$$B'C'^2 = b^2 + c^2.$$



а) *б*) *в*)

Рис. 1



г) *д*) *е*)

Рис. 2

Таким образом, квадрат каждой стороны треугольника $A'B'C'$ меньше суммы квадратов двух других сторон. Из теоремы косинусов отсюда следует, что треугольник $A'B'C'$ – остроугольный.

Значит, прямоугольный или тупоугольный треугольники не могут быть сечениями куба.

Задача 3. Может ли сечением куба быть: а) квадрат; б) прямоугольник; в) ромб; г) параллелограмм; д) равнобедренная трапеция; е) неравнобедренная трапеция?

О т в е т. Да. Соответствующие сечения показаны на рисунках 2*а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*. В случае: а) плоскость сечения параллельна грани $ABCD$ (рис. 2*а*); б) плоскость сечения параллельна ребру AD (рис. 2*б*); в) $AA' = CC' \neq BB'$ (рис. 2*в*); г) $AA' \neq BB'$, $BB' \neq CC'$, $AA' \neq CC'$ (рис. 2*г*); д) $A'B = BB' \neq B_1C'$ (рис. 2*д*); е) $A'B \neq B'B$, $B'B \neq B_1C'$ (рис. 2*е*).

Задача 4*. Может ли сечением куба быть прямоугольная трапеция?

Р е ш е н и е. Докажем, что в сечении куба плоскостью не может получиться прямоугольная трапеция.

Действительно, пусть $A'B'C'D'$ – четырёхугольник, являющийся сечением куба плоскостью.

Если прямая $A'D'$ параллельна прямой BB_1, то $A'B'C'D'$ – прямоугольник (рис. 3*а*).

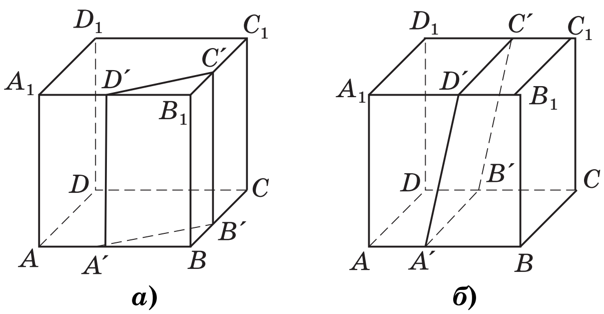


Рис. 3

Если прямая $A'D'$ не параллельна прямой BB_1 и угол $B'A'D'$ – прямой, то прямая $A'B'$ будет перпендикулярна прямой $A'D'$(рис. 3*б*). С другой стороны, прямая $A'B'$ лежит в плоскости, перпендикулярной прямой BB_1, следовательно, перпендикулярна этой прямой. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая $A'B'$ будет перпендикулярна плоскости ABB_1. Значит, она будет параллельна прямой BC, также перпендикулярной этой плоскости. Следовательно, сечением будет прямоугольник, а не трапеция.

Задача 5. Может ли сечением куба быть: а) пятиугольник; б) правильный пятиугольник?

Р е ш е н и е. В сечении куба плоскостью может получиться пятиугольник. На рисунке 4 приведён пример такого пятиугольника $A'B'C'D'E'$. Так как плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то у этого пятиугольника будут две пары параллельных сторон $A'E'$ и $C'D'$, $B'C'$ и $E'D'$. Значит, сечением куба плоскостью не может быть правильный пятиугольник.

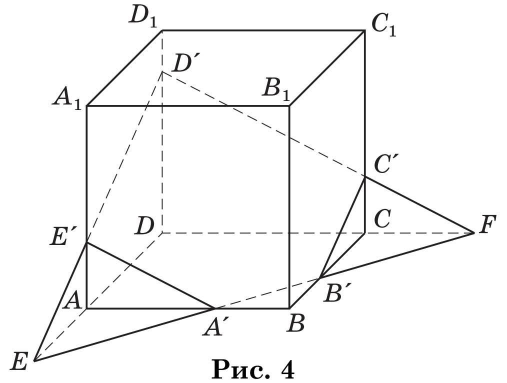


Рис. 4

Задача 6. Может ли сечением куба быть: а) шестиугольник; б) правильный шестиугольник?

Р е ш е н и е. В сечении куба плоскостью может получиться шестиугольник. На рисунке 5 приведён пример такого шестиугольника $A'B'C'D'E'F'$. Так как плоскость пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым, то у этого шестиугольника будут три пары параллельных сторон $A'B'$ и $E'D'$, $B'C'$ и $E'F'$, $A'F'$ и $C'D'$.

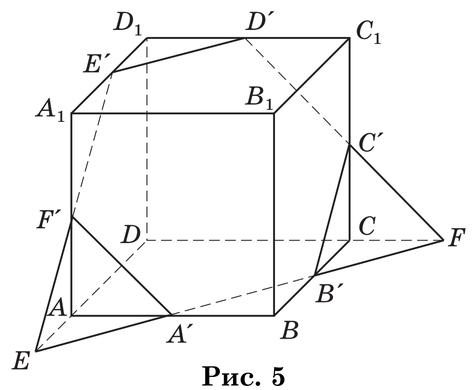
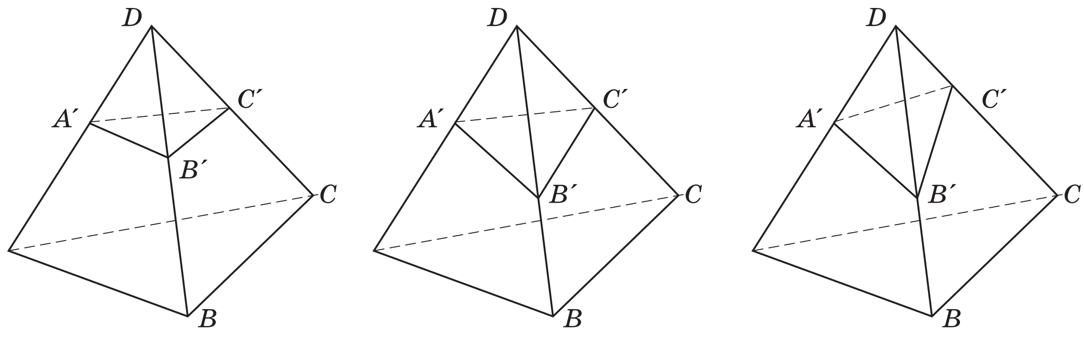


Рис. 5

Если точки A', B', C' являются серединами соответствующих рёбер, то сечением куба будет правильный шестиугольник.



а) *б*) *в*)

Рис. 6

Задача 7. Может ли сечением куба быть многоугольник с числом сторон, большим шести?

Решение. Так как у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Сечения правильного тетраэдра

Задача 8. Может ли сечением правильного тетраэдра быть: а) правильный треугольник; б) равнобедренный треугольник; в) разносторонний треугольник?

Ответ. Да. Соответствующие сечения показаны на рисунках 6*а*, *б*, *в*.

а) В этом случае $A'D = B'D = C'D$;

б) $A'D = C'D \neq B'D$;

в) $A'D \neq B'D$, $B'D \neq C'D$, $A'D \neq C'D$.

Задача 9*. Может ли сечением правильного тетраэдра быть: а) прямоугольный треугольник; б) тупоугольный треугольник?

Решение. Докажем, что в сечении правильного тетраэдра могут получиться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Пусть рёбра тетраэдра $ABCD$ равны 1. Обозначим B' точку на ребре BD, для которой $B'D = \frac{1}{4}$. Пусть C' – точка на ребре CD. Обозначим $C'D = x$ (рис. 7). Нашей задачей является нахождение такого x, для которого треугольник $AB'C'$ – прямоугольный.

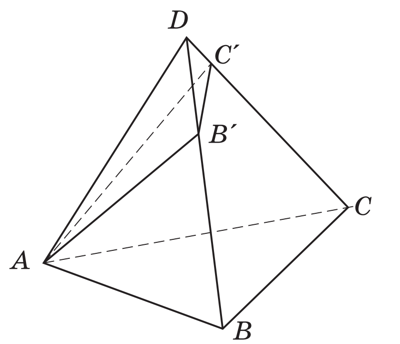


Рис. 7

Воспользуемся теоремой косинусов, применённой к треугольникам $AB'D$, $B'C'D$, $AC'D$. Получим

$$AB'^2 = 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{13}{16},$$

$$B'C'^2 = \frac{1}{16} + x^2 - \frac{1}{4}x,$$

$$AC'^2 = 1 + x^2 - x.$$

Переходя в равенстве $AB'^2 + B'C'^2 = AC'^2$ к уравнению относительно x, и решая это уравнение, получим $x = \frac{1}{6}$. По теореме, обратной к теореме Пифагора, отсюда следует, что треугольник $AB'C'$ – прямоугольный.

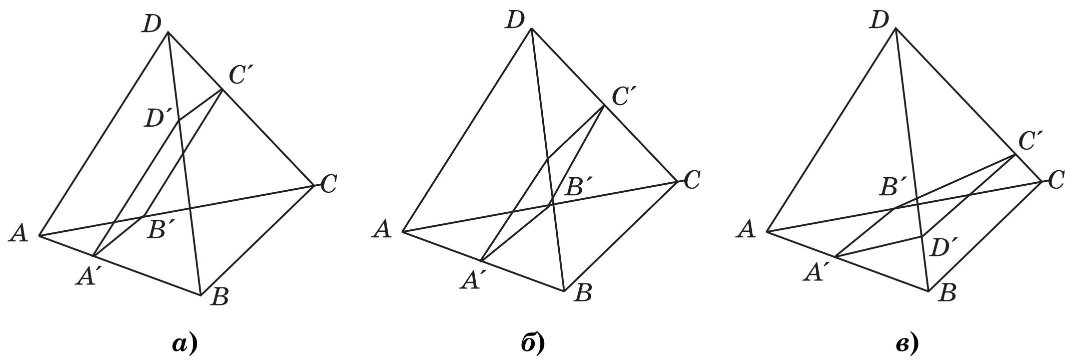


Рис. 8

Если для точки C' выполняется неравенство $x < \dfrac{1}{6}$, то угол $AB'C'$ будет тупым. Соответствующий треугольник $AB'C'$ будет тупоугольным.

Задача 10. Может ли сечением правильного тетраэдра быть: а) прямоугольник; б) квадрат; в) равнобедренная трапеция; г) неравнобедренная трапеция?

Р е ш е н и е. Заметим, что противолежащие рёбра правильного тетраэдра перпендикулярны. Если плоскость сечения параллельна двум противолежащим рёбрам, то в сечении получается прямоугольник (рис. 8*а*). Если при этом плоскость проходит через середины пересекающих её рёбер, то в сечении получается квадрат (рис. 8*б*). Если плоскость сечения параллельна только одному ребру и пересекает грани, содержащие это ребро, то в сечении получается равнобедренная трапеция (рис. 8*в*). Неравнобедренная трапеция получиться в сечении не может.

Задача 11. Может ли сечением тетраэдра быть многоугольник с числом сторон, большим четырёх?

Р е ш е н и е. Так как у тетраэдра имеется только четыре грани, то в сечении тетраэдра не может получиться многоугольник с числом сторон, большим четырёх.

Сечения правильной четырёхугольной пирамиды

Задача 12. Какие треугольники могут быть сечениями правильной четырёхугольной пирамиды?

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида. Если плоскость сечения параллельна плоскости SAC, то сечением является равнобедренный прямоугольный треугольник $A'B'C'$ (рис. 9). Если плоскость сечения перпендикулярна ребру SB и пересекает рёбра AB и BC, то сечением является тупоугольный равнобедренный треугольник $A'B'C''$ (рис. 9). Сечениями также могут быть равносторонний и разносторонний треугольники.

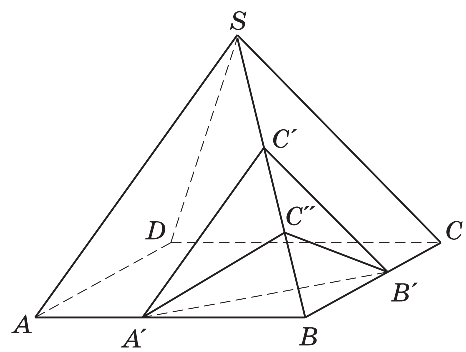


Рис. 9

Задача 13. Какие четырёхугольники могут быть сечениями правильной четырёхугольной пирамиды?

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ – правильная четырёхугольная пирамида. Если плоскость пересекает боковую поверхность пирамиды и параллельна плоскости ABC, то сечением является квадрат $A'B'C'D'$ (рис. 10). Если плоскость пересекает боковую поверхность пирамиды, параллельна ребру AB, не параллельна ребру BC и пересекает гран SCB, то сечением является равнобедренная трапеция $A'B'C''D''$ (рис. 10). Если плоскость пересекает боковую поверхность пирамиды и не параллельна сторонам основания пирамиды, то сечением является четырёхугольник, у которого нет параллельных сторон. Таким образом, сечением правильной четырёхугольной пирамиды не может быть параллелограмм, отличный от квадрата.

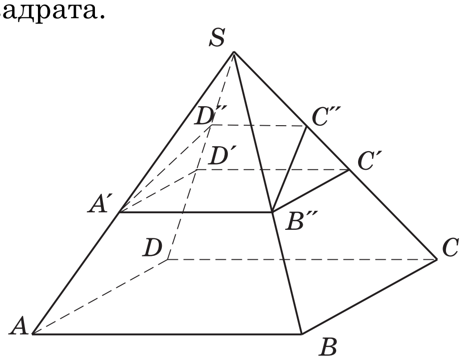


Рис. 10

Задача 14. Может ли сечением правильной четырёхугольной пирамиды быть: а) пятиугольник; б)* правильный пятиугольник?

Р е ш е н и е. Если плоскость сечения проходит через точки E, F, G, принадлежащие соответственно рёбрам AB, BC, SD правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, то сечением является пятиугольник $EFLGK$ (рис. 11).

Докажем, что для правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 1, существует сечение, являющееся правильным пятиугольником.

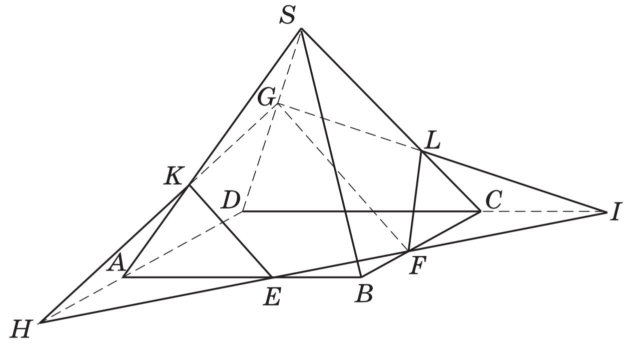


Рис. 11

Для этого нам понадобится золотое отношение [5]. Напомним, что золотым отношением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Переводя это определение на язык уравнений и принимая целое за единицу, а бо́льшую часть за φ, получаем уравнение

$$\frac{1-\varphi}{\varphi}=\frac{\varphi}{1}.$$

Оно равносильно квадратному уравнению $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$.

Решая это уравнение, находим

$$\varphi=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $SABCD$, все рёбра которой равны 1. Обозначим E, F, G точки соответственно на рёбрах AB, BC, SD, для которых $AE = CF = DG = \varphi$ (рис. 11).

Построим сечение этой пирамиды, проходящее через данные точки. Для этого проведём прямую EF и обозначим H, I точки её пересечения с прямыми соответственно DA, DC.

Проведём прямые HG, IG и обозначим K, L их точки пересечения соответственно с рёбрами SA, SC.

Пятиугольник $EFLGK$ будет искомым сечением. Докажем, что он является правильным.

Из зеркальной симметричности этого пятиугольника относительно плоскости SBD следует равенство сторон EK и FL, KG и LG, а также равенство углов E и F, K и L. Вычислим сторону EF. Треугольник BEF является прямоугольным равнобедренным. Следовательно,

$$BE = BF = 1 - \varphi,\ \ EF = \sqrt{2(1-\varphi)}.$$

Докажем равенство сторон EK и KG.

Треугольник AEH является прямоугольным с острыми углами, равными 45°. Следовательно, $AP = AE = \varphi$, $EH = \sqrt{2}\varphi$.

Через точку G проведём прямую, параллельную прямой SA, и обозначим M её точку пересечения с ребром AD (рис. 12).

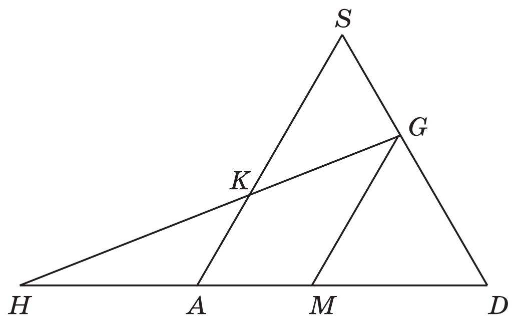


Рис. 12

Треугольник DGM – равносторонний, следовательно, $GM = \varphi$.

Треугольник HKA подобен треугольнику HGM, коэффициент подобия равен отношению $HA : HM = \varphi$. Следовательно, $AK = MG \cdot \varphi = \varphi^2 = 1 - \varphi$. Значит, $SK = \varphi$.

Треугольники AEK и SKG равны по двум сторонам и углу между ними ($AK = SG = 1 - \varphi$, $AE = SK = \varphi$, $\angle A = \angle S = \varphi$). Следовательно, $EK = KG$.

Используя теорему косинусов, для треугольников AEK и SKG, находим

$$EK = KG = \sqrt{2(1-\varphi)}.$$

Учитывая, что $EK = FL$, $KG = LG$ и $EF = \sqrt{2(1-\varphi)}$, получаем, что в пятиугольнике $EFLGK$ равны все стороны.

Докажем, что в этом пятиугольнике равны все углы.

Используя теорему косинусов, для треугольника AHK, находим $HK = \sqrt{2\varphi}$.

Треугольник HEK – равнобедренный ($HE = HK = \sqrt{2\varphi}$). Следовательно, $\angle HEK = \angle HKE$. Значит, равны углы E и K пятиугольника $EFLGK$.

Треугольник HBG – равнобедренный ($HB = HG = \sqrt{2}$). Следовательно, $\angle HBG = \angle HGB$. Учитывая, что треугольник FLG также равнобедренный, получаем равенство углов F и G пятиугольника $EFLGK$.

Так как углы L и K пятиугольника $EFLGK$ равны, то окончательно получаем равенство всех его углов. Таким образом, пятиугольник $EFLGK$ является правильным.

Задача 15. Может ли сечением правильной четырёхугольной пирамиды быть многоугольник с числом сторон, большим пяти?

Р е ш е н и е. Так как у четырёхугольной пирамиды имеется только пять граней, то в сечении этой пирамиды не может получиться многоугольник с числом сторон, большим пяти.

Литература

1. *Атанасян Л.С. и др.* Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

2. *Погорелов А.В.* Геометрия. 10–11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2014.

3. *Абылкасымова А.Е. и др.* Построение сечений. – Алматы: Атамура, 2009.

4. *Смирнова И.М.*, *Смирнов В.А.* Сечения многогранников. – М.: Экзамен, 2011.

5. *Шевелев И.Ш. и др.* Золотое сечение. – М.: Стройиздат, 1990.