В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА И ПРИЗМЫ

Математика в школе 2018 № 3

Параллелепипед, призма, пирамида являются основными многогранниками, которые изучаются в курсе геометрии 10-11 классов.

Помимо важности самих этих многогранников, они играют большую роль в иллюстрации взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве; в задачах на проведение дополнительных построений, нахождение расстояний и углов в пространстве, нахождение объёмов тел и площадей их поверхностей и др.

Достижение целей обучения геометрии во многом зависит от того, насколько хорошо у обучающихся будут сформированы пространственные представления об этих понятиях. А это, в свою очередь, в немалой степени, зависит от определений данных многогранников.

Среди требований, предъявляемым к таким определениям, выделим следующие.

1. *Научность,* означающая корректность определения с точки зрения математики. Определение должно содержать существенные признаки, необходимые и достаточные для того, чтобы отличить определяемое понятие от всех других понятий; быть минимальным, т. е. не содержать излишних требований; быть согласованным с другими определениями.

2. Доступность, предполагающая возможность освоения этого определения учащимися. Они должны научиться: формулировать данное определение; использовать различные обозначения; проверять, подходит объект под рассматриваемое понятие или нет; распознавать объект на изображениях и моделях; приводить примеры и контрпримеры; устанавливать связи данного понятия с другими понятиями; применять определение для решения задач и доказательства теорем.

3. *Методическая целесообразность*, означающая соответствие определения целям обучения и достижению его результатов.

Рассмотрим с точки зрения этих требований определения призмы и параллелепипеда, которые даются в действующих учебниках геометрии 10-11 классов.

В учебнике геометрии [1] по поводу определения призмы говорится следующее.

Рассмотрим два равных многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях α и β так, что отрезки A_1B_1, A_2B_2, …, A_nB_n, соединяющие соответствующие вершины многоугольников, параллельны. Каждый из n четырёхугольников

$$A_1A_2B_2B_1,\ A_2A_3B_3B_2,\ \ldots,\ A_nA_1B_1B_n, \qquad (1)$$

является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны по условию, а стороны A_1B_1 и A_2B_2 – по свойству параллельных плоскостей, пересечённых третьей плоскостью.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов (1), называется **призмой.**

Призму с основаниями $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ обозначают $A_1A_2\ldots A_n B_1B_2\ldots B_n$.

Если боковые рёбра перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой.**

Приведённое определение призмы не вполне соответствует перечисленным выше требованиям.

Многогранник здесь понимается как поверхность, а многоугольник – как фигура, составленная из отрезков (сторон многоугольника). Таким образом, призма будет не многогранником, так как будет состоять только из отрезков (рёбер).

Использование обозначений в определении призмы нежелательно и вызывает много вопросов. В частности, неясно, можно ли использовать другие буквы в определении призмы, например, обозначить треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ или нужно обязательно писать $A_1A_2A_3B_1B_1B_3$.

Кроме сказанного, такое определение призмы не согласуется с понятиями объёма и площади поверхности, так как эти понятия применимы к пространственным телам, а призма таковым в данном случае не является.

Приведённое определение призмы весьма затруднительно для воспроизведения учащимися. По нашим опросам школьники и даже учителя, работающие по учебнику [1], не могут сформулировать определение призмы.

В текст, относящийся к определению призмы, включено обоснование (доказательство) того, что четырёхугольники (1) являются параллелограммами. Конечно, такое включение загромождает определение, что затрудняет его понимание.

Определение призмы использует понятие параллельности плоскостей. Следовательно, оно может быть дано только после изучения этого понятия.

Определение прямой призмы использует понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, оно может быть дано только после изучения этого понятия.

В результате определение призмы в этом учебнике появляется только в главе III, после того, как уже рассмотрено взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния в пространстве. Конечно, отсутствие понятия призмы существенно затрудняет изучение данных тем, снижает его эффективность, не способствует достижению результатов обучения.

Рассмотрим теперь учебник [2], где даются следующие определения призмы и параллелепипеда.

Призмой называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

Если основание призмы есть параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны, называется *кубом*.

Данное определение призмы соответствует требованиям 1 и 2.

В нём, в отличие от учебника [1], призма является телом, следовательно, можно говорить об её объёме и площади поверхности.

Помимо этого, определение призмы не содержит обозначений, является более коротким и удобным для запоминания.

Ещё одним достоинством этого определения является его конструктивность.

Однако, с точки зрения требования методической целесообразности, много вопросов вызывает расположение определения призмы в начале 11-го класса.

Учебный материал 10-го класса (взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, параллельность и перпендикулярность, углы и расстояния в пространстве) рассматривается без привлечения призм. Конечно, это существенно затрудняет изучение этих тем, снижает их наглядность, что, в конечном счёте, не способствует достижению результатов обучения.

Параллелепипед определяется как частный случай призмы. Это не согласуется с определением параллелограмма – плоского аналога параллелепипеда. У параллелограмма оснований и боковых сторон нет, а в предложенном определении у параллелепипеда имеются основания и боковые рёбра.

Аналогично, куб определяется как частный случай параллелепипеда. Это не согласуется с определением квадрата – плоского аналога куба. У квадрата оснований и боковых сторон нет, а у куба есть основания и боковые рёбра.

Обратимся к учебникам прошлых поколений и в качестве примера возьмём классический учебник А.П. Киселёва [3]. В нём даются следующие определения призмы и параллелепипеда.

Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.

Призма называется **прямой** или **наклонной**, смотря по тому, будут ли её боковые рёбра перпендикулярны или наклонны к основаниям.

Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется **кубом.**

Недостаток такого определения призмы хорошо известен. Под это определение, например, подходит многогранник, составленный из двух призм (рис. 1), а также ромбододекаэдр (рис. 2) – многогранник, гранями которого являются двенадцать ромбов. Форму этого многогранника имеет кристалл граната. Подробно этот интересный многогранник представлен в статье [4].

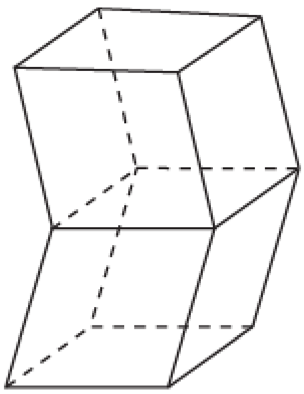

Рис. 1

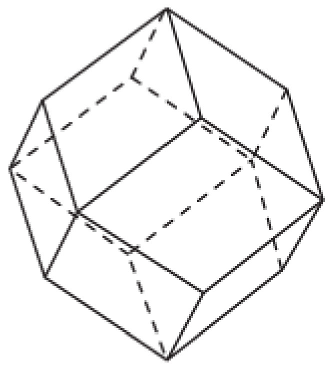

Рис. 2

В отличие от учебников [1] и [2], здесь в определении призмы не используется параллельность плоскостей и параллельного переноса, что позволяет рассматривать понятие призмы сразу после изучения параллельности прямых в пространстве.

Определение прямой призмы использует понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, оно может быть дано только после рассмотрения этого понятия.

Отметим, что определение параллелепипеда и куба имеют те же недостатки, что и в учебнике [2].

Теперь представим определения куба, параллелепипеда, призмы и пирамиды, используемые в учебнике [5], и отвечающие, на наш взгляд, требованиям научности, доступности и методической целесообразности.

Предлагаемые определения не используют понятия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Начнём с определения куба.

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов (рис. 3).

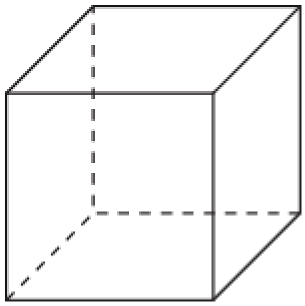
Рис. 3

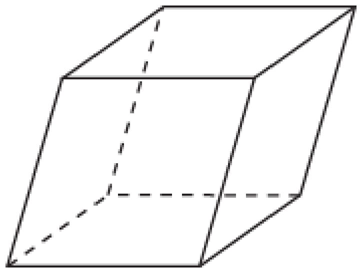
Рис. 4

Параллелепипед – многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов (рис. 4).

Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 5).

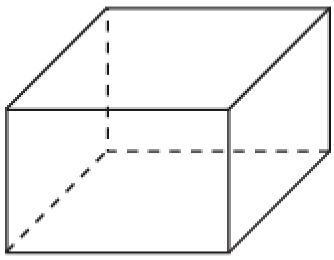
Рис. 5

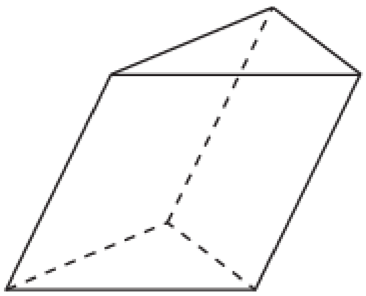
Рис. 6

Призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых **основаниями** призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых **боковыми гранями** призмы. Стороны боковых граней, не лежащие в основаниях, называются **боковыми рёбрами** призмы (рис. 6).

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники (рис. 7), называется **прямой**. В противном случае призма называется **наклонной** (рис. 6).

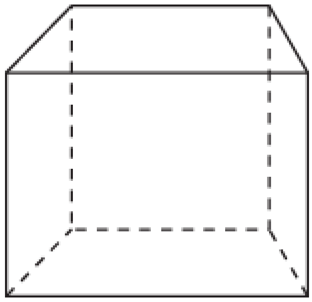

Рис. 7

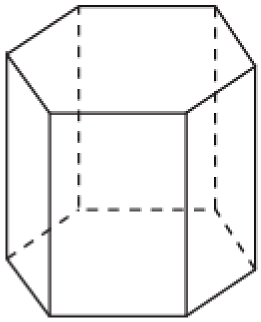

Рис. 8

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 8).

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого **основанием** пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых **боковыми гранями** пирамиды. Общая вершина боковых граней называется **вершиной** пирамиды. Рёбра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются **боковыми рёбрами** (рис. 9).

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые рёбра которой равны, называется **правильной** (рис. 10).

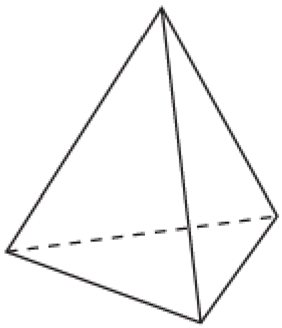

Рис. 9

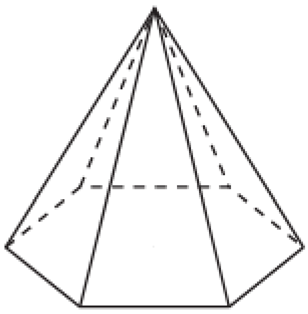

Рис. 10

Отметим, что данные определения параллелепипеда, призмы и пирамиды не являются конструктивными и требуют доказательств существования этих многогранников. Это можно сделать позднее.

Например, в учебнике [5] существование призм вытекает из конструктивного определения обобщённого цилиндра, которое даётся в 11-м классе. А именно, рассмотрим две параллельные плоскости α, π и прямую l, их пересекающую (рис. 11).

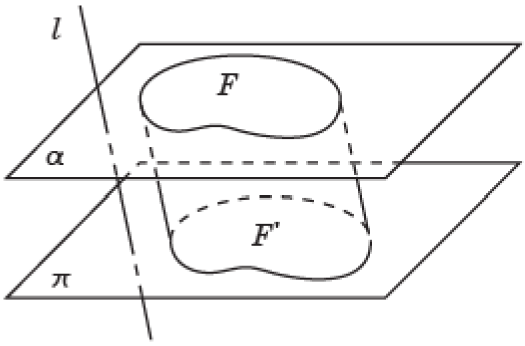

Рис. 11

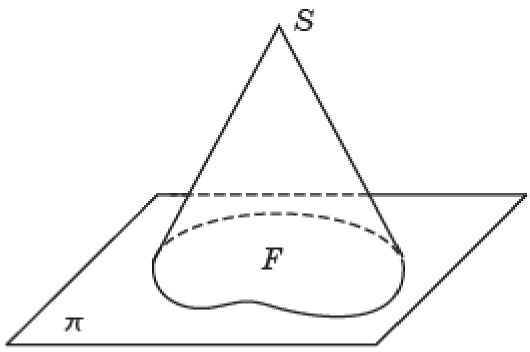

Рис. 12

Пусть *F* – фигура, лежащая в плоскости α, *F’* – её параллельная проекция на плоскость π в направлении прямой *l*.

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точки фигуры *F* с их параллельными проекциями, называется **обобщённым цилиндром**. Фигуры *F* и *F’* называются **основаниями** обобщённого цилиндра.

В случае, если прямая *l* перпендикулярна плоскости π, соответствующий обобщённый цилиндр называется **прямым**.

Ясно, что если фигура *F* – многоугольник, то обобщённый цилиндр является призмой, если *F* – круг, то прямой обобщённый цилиндр является обычным цилиндром.

Аналогичным образом определяется понятие обобщённого конуса. Пусть *F* – фигура, лежащая в плоскости π, *S* – точка, не принадлежащая этой плоскости (рис. 12).

Фигура, образованная отрезками, соединяющими точку *S* с точками фигуры *F*, называется **обобщённым конусом**. Точка *S* называется вершиной, а фигура *F* **основанием** обобщённого конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины *S* на плоскость основания, называется высотой обобщённого конуса.

Ясно, что если фигура *F* – многоугольник, то обобщённый конус является пирамидой, если *F* – круг, а основание высоты совпадает с центром круга, то обобщённый конус является обычным конусом.

Понятия обобщённого цилиндра и обобщённого конуса используется в учебнике [5] для вывода формул объёмов пространственных фигур.

Предложенный подход к определениям параллелепипеда, призмы и пирамиды через описание их граней позволяет ввести эти понятия в самом начале изучения стереометрии, использовать их для иллюстрации взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, проведения дополнительных построений, доказательства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, решения задач на нахождения расстояний и углов в пространстве.

Кроме этого, данный подход согласуется с определением правильных и полуправильных многогранников, является основой для изготовления моделей различных многогранников из развёрток и геометрического конструктора [5].

Самодельные модели многогранников служат средством конкретной наглядности – первой стадии, которая ведёт к абстрактной наглядности – чертежу. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьников.

Всё это повышает наглядность изучения стереометрии, способствует достижению результатов обучения.

Литература

1. *Атанасян Л.С. и др.* Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Просвещение, 2014.

2. *Погорелов А.В.* Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2014.

3. *Киселёв А.П.* Геометрия / под редакцией Н.А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

4. *Смирнова И.М.* Познакомьтесь: ромбододекаэдр // Математика в школе. – 1996. - № 1. – С. 47-51.

5. *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2015.