О ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

В. А. Смирнов, И. М. Смирнова
Московский педагогический государственный университет (МПГУ)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Ключевые слова: геометрия, обучение, доказательства.
Аннотация: в работе анализируются различные подходы к обучению математических доказательствам в курсе геометрии основной школы, реализованные в школьных учебниках геометрии.

ABOUT PROOFS IN THE SCHOOL COURSE OF GEOMETRY

V. A. Smirnov, I. M. Smirnova
Moscow State Pedagogical University (MSPU)
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru
Keywords: geometry, teaching, proofs.
Astract: the paper analyzes various approaches to teaching mathematical proofs in a basic school geometry course, implemented in school geometry textbooks.

Обучение доказательствам, умениям решать задачи на доказательство является одной из основных целей обучения геометрии.

Методика обучения доказательствам рассматривается в книгах по методике обучения математике [1, 2] и др.

Академик А. В. Погорелов в одном из первых изданий своего учебника по геометрии для средней школы писал о том, что «главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать; очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами; будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора; однако вряд ли найдётся хотя бы один, которому не придётся рассуждать, анализировать, доказывать».

Если мы хотим научить учащихся проводить доказательства, то доказательства теорем должны удовлетворять определённым требованиям.

1. Они должны опираться на аксиомы, определения и ранее доказанные теоремы.

2. Они должны быть полными. В них не должны использоваться недоказанные утверждения.

3. Они должны быть доступны для учащихся, и их можно было бы спросить с учащихся.

4. Если доказательство выходит за рамки школьного курса математики, то об этом нужно открыто говорить учащимся.

5. Приводимые доказательства теорем должны быть удобными для их применения к решению задач.

Учащиеся должны понимать, что такое доказательство, уметь: проводить доказательства свойств и теорем, содержащихся в учебнике геометрии; решать задачи на доказательства; распознавать верные и неверные утверждения; находить ошибки в доказательствах; приводить примеры и контрпримеры.

Развитие логического мышления не противоречит принципу наглядности обучения.

Академик А. Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии, указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга».

В школьных учебниках геометрии вопрос об уровне строгости доказательств решается по-разному.

В учебниках [3, 4] в качестве доказательств допускаются нестрогие рассуждения, использующие рисунок, перегибания листа бумаги, наложение и т. д.

В учебниках [5, 6, 9] даются строгие математические определения основных понятий, основанных на аксиомах, приводятся строгие математические доказательства.

Например, в учебнике [3] при доказательстве утверждения о том, что две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются, используется перегибание рисунка.

«… рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные прямой PQ (рис. 43, б). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. … »

Это утверждение затем используется при доказательстве признака параллельности двух прямых, утверждающего, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Таким образом, важный признак параллельности двух прямых остаётся без строгого математического доказательства. Поскольку остальные признаки параллельности двух прямых сводятся к данному признаку, то и эти признаки остаются без строгих математических доказательств.

На самом деле, строгое доказательство приведённого утверждения и указанного признака параллельности двух прямых не является сложным. Они непосредственно следуют из теоремы о внешнем угле треугольника, приведённой, например, в учебниках [7, 9].

Теорема. Внешний угол треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и его внешний угол BCD. Докажем, что этот угол больше внутреннего угла B треугольника ABC (рис. 1).

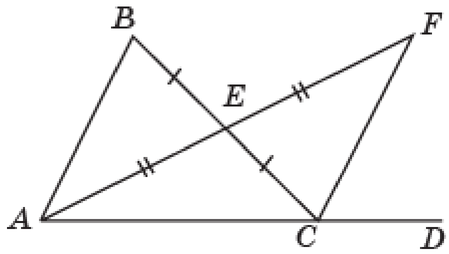

Рис. 1

Через вершину A и середину E стороны BC данного треугольника проведём прямую и отложим на ней отрезок EF, равный AE. Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Угол BCF составляет часть угла BCD. Значит, имеет место неравенство $\angle BCD > \angle ABC$. Аналогично доказывается, что угол BCD больше внутреннего угла A треугольника ABC (сделайте это самостоятельно).

Следствие. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются.

Доказательство. Предположим противное. Пусть прямые a и b, перпендикулярные прямой c пересекаются в точке C. Обозначим A и B точки пересечения прямой c соответственно с прямыми a и b (рис. 2).

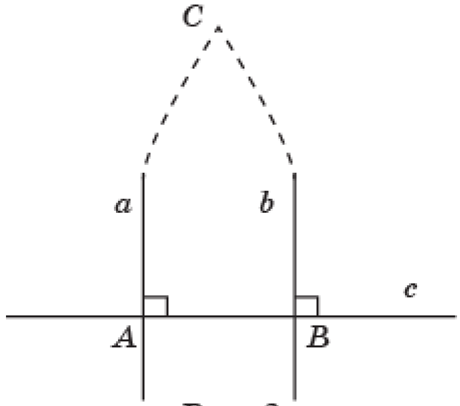

Рис. 2

Тогда внешний угол при вершине B равен внутреннему углу A треугольника ABC, что противоречит доказанной теореме. Следовательно, прямые a и b не пересекаются.

Аналогичным образом, доказывается, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (рис. 3).

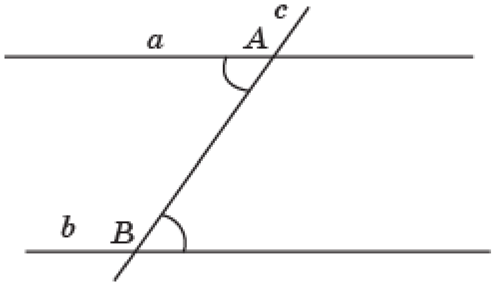

Рис. 3

Доказательство теоремы о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны в учебниках [3, 4], использует существование биссектрисы угла, а существование биссектрисы доказывается с использованием теоремы об углах при основании равнобедренного треугольника. Здесь имеется порочный круг. Об этом нами писалось в статье [8].

При выводе формулы о сумме углов выпуклого n-угольника в учебнике [3] выпуклость n-угольника не используется и не упоминается. Без этого доказательство искомой формулы становится неполным. Более того, в этом учебнике многоугольник называется выпуклым, «если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины». С таким определением очень трудно доказать, что диагонали n-угольника ($n > 3$), проведённые из одной вершины, разбивает его на треугольники.

То же самое относится к доказательству указанной формулы в учебнике [4]. В этом учебнике многоугольник называется выпуклым, «если все его углы меньше развёрнутого». С таким определением также очень трудно доказать, что диагональ n-угольника ($n > 3$), проведённые из одной вершины, разбивает его на треугольники.

Гораздо более удобным является следующее определение выпуклости [9], которое может быть распространено на произвольные плоские и пространственные фигуры.

Многоугольник называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

Из этого определения непосредственно вытекает, что диагонали многоугольника, проведённые из одной вершины, целиком в нём содержатся, следовательно, разбивают его на треугольники

В учебнике [4] при доказательстве теоремы о том, что около любого треугольника можно описать окружность, не доказывается, что серединные перпендикуляры, проведённые к двум сторонам треугольника, пересекаются. Таким образом, это доказательство не является полным.

В этом же учебнике приводится следующая теорема.

Теорема. Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Однако в её доказательстве не используется и не упоминается выпуклость четырёхугольника, а без этого условия данное утверждение неверно. Пример такого четырёхугольника приведён на рисунке 4.

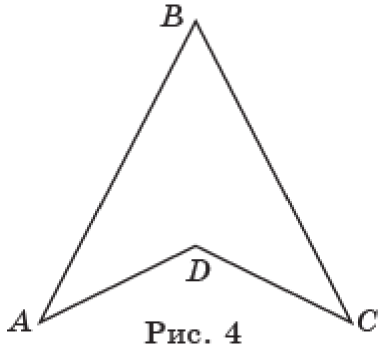

Рис. 4

Доказательство теоремы о средней линии треугольника в учебнике [3] использует признак подобия треугольников. Доказательство подобия треугольников использует свойства площади, а всё, что связано с площадью либо не доказывается, либо доказательства выходят за рамки школьного курса математики. Таким образом, теорема о средней линии треугольника остаётся без строгого математического доказательства.

Приведём доказательство этой теоремы, не использующее подобия, данное в учебниках [7, 9].

Рассмотрим треугольник *ABC* и его среднюю линию *DE*, соединяющую середины стороны *AC* и *BC* (рис. 5).

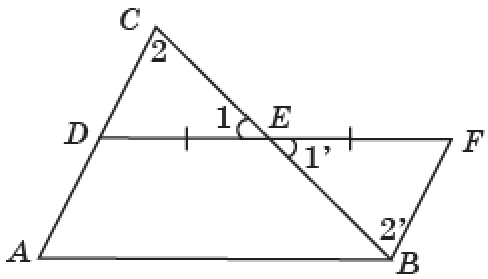

Рис. 5

Докажем, что отрезок *DE* параллелен стороне *AB* и равен её половине. Отложим на прямой *DE* отрезок *EF* = *DE* и соединим отрезком точки *B* и *F*. Треугольники *ECD* и *EBF* равны по первому признаку равенства треугольников (*CE* = *BE* по условию, *DE* = *FE* по построению, $\angle 1 = \angle 1'$, как вертикальные). Следовательно, *BF* = *CD*, значит, *BF* = *AD*. Так как угол 2 равен углу 2', то прямые *AC* и *BF* параллельны. Таким образом, стороны *AD* и *BF* четырёхугольника *ABFD* равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм (по первому признаку параллелограмма). Значит, сторона *AB* параллельна и равна стороне *DF*. Средняя линия *DE* равна половине стороны *DF* и, следовательно, равна половине стороны *AB*.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника и параллельна другой его стороне, то она проходит через середину третьей стороны этого треугольника.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину D стороны AC и параллельна стороне AB треугольника ABC. Так как средняя линия DE также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина E стороны BC принадлежит этой прямой.

Отметим, что взаимосвязанные между собой теоремы и аналогичные доказательства предпочтительнее располагать рядом в одном модуле. Так, например, в одном модуле с теоремой о средней линии треугольника следует расположить теорему о средней линии трапеции. Тем более, что доказательство теоремы о средней линии трапеции использует теорему о средней линии треугольника.

Конечно, теорему о средней линии трапеции можно доказывать векторным методом, как это сделано в учебнике [3]. Но тогда теряется связь между теоремами о средней линии треугольника и средней линией трапеции. Кроме того, возникает естественный вопрос: можно ли доказать теорему о средней линии трапеции без использования векторов? Это делалось Евклидом, и это делается в учебниках [7, 9].

Приведём формулировку и доказательство теоремы о средней линии трапеции данные в этих учебниках.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и её среднюю линию EF. Проведём прямую DF. Обозначим G её точку пересечения с прямой AB (рис. 6).

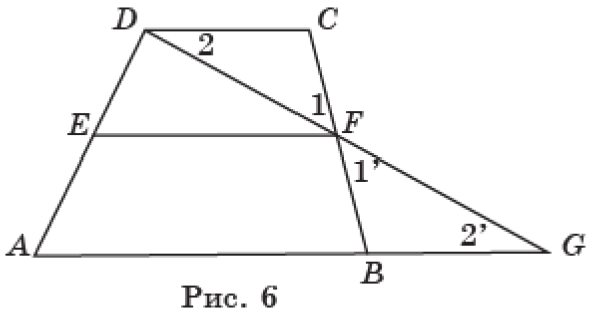

Рис. 6

Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = BF$ по условию, $\angle 1 = \angle 1'$, как вертикальные, $\angle 2 = \angle 2'$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, CD и секущей DG). Из равенства этих треугольников следует, что равны отрезки DF и GF. Значит, EF - средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника получаем, что отрезок EF параллелен AB и равен половине отрезка AG. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок EF будет параллелен обоим основаниям трапеции. Так как отрезок AG равен сумме оснований трапеции, то отрезок EF будет равен полусумме оснований трапеции.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной боковой стороны и параллельна основанию трапеции, то она проходит через середину второй боковой стороны этой трапеции.

Доказательство. Пусть прямая проходит через середину E стороны AD и параллельна стороне AB трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Так как средняя линия EF также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина F стороны BC принадлежит этой прямой.

Доказательство теоремы Фалеса в учебнике [3] помещено в задачи. Её решение занимает почти страницу и содержит ссылку на предыдущую задачу, решение которой занимает ещё половину страницы.

Конечно, такое расположение и такое доказательство теоремы Фалеса выходит за рамки доступности учащихся.

На самом деле, доказательство теоремы Фалеса непосредственно следует из теорем о средних линиях треугольника и трапеции.

Приведём формулировку и доказательство теоремы Фалеса из учебника [9].

Теорема (Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство. Рассмотрим угол со сторонами a, b. Пусть три параллельные прямые пересекают стороны этого угла соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 (рис. 7).

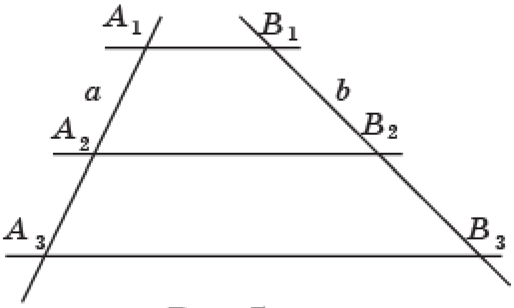

Рис. 7

Если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то A_2B_2 – средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$. Следовательно, равны и отрезки B_1B_2 и B_2B_3.

Доказательство формулы площади квадрата в учебнике [3] занимает около двух страниц и содержит следующий текст, понять который учащимся невозможно.

«Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a + \frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a_n^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.»

Этот текст может сформировать неверные представления о математических доказательствах и отпугнуть учащихся от геометрии. Тем более, что формулу площади прямоугольника учащиеся знают чуть ли не с первого класса.

Предпочтительнее, на наш взгляд, принять формулу площади прямоугольника в качестве одного из свойств площади. Это соответствует историческому пути развития геометрии. Во времена Евклида не было действительных чисел. Операции сложения, вычитания, умножения и деления производились над самими отрезками. В частности, произведением двух отрезков, по определению, считалась площадь прямоугольника, двумя соседними сторонами которого являлись отрезки, равные данным. Это также соответствует современным подходам к определениям площади (меры Жордана) и меры Лебега, которые обычно используются в ВУЗах.

Вывод уравнения прямой в учебниках [3, 4] использует свойства серединного перпендикуляра, и приводится до введения понятий угла между векторами и скалярного произведения векторов.

Такой метод установления уравнения прямой имеет существенные недостатки.

1. Не раскрывается геометрический смысл коэффициентов a, b в уравнении прямой. Эти коэффициенты являются координатами вектора нормали к прямой, но об этом не говорится, так как к этому времени отсутствует понятие угла между векторами.

2. Не приводится уравнение прямой, проходящей через две точки с заданными координатами. Каждый раз для нахождения уравнения прямой приходится решать систему из двух линейных уравнений.

3. Не устанавливается взаимное расположение двух прямых по их уравнениям.

4. Не приводится формула нахождения угла между двумя пересекающимися прямыми. В стереометрии нужен будет аналог этой формулы для нахождения угла между пересекающимися плоскостями.

5. Не приводится формула нахождения расстояния от точки до прямой. В стереометрии нужен будет аналог этой формулы для нахождения расстояния от точки до плоскости.

Большое значение для понимания доказательств является структура учебника геометрии. Геометрия подразделяется на абсолютную геометрию, не использующую аксиому параллельных, и относительную геометрию, использующую аксиому параллельных.

Структура учебника геометрии, в которой разделяется абсолютная и относительная геометрии, позволяет сформировать правильные представления о том, какие свойства и теоремы геометрии зависят от аксиомы параллельных, а какие не зависят.

На основе этих представлений могут изучаться и другие геометрии, например, геометрия Лобачевского, сферическая геометрия и др.

Так, например, в учебниках [7, 9] сначала излагается абсолютная геометрия, формулируются и доказываются свойства и теоремы, не зависящие от аксиомы параллельных. Только затем вводится аксиома параллельных и рассматриваются соответствующие свойства и теоремы.

К сожалению, учебники геометрии [3, 4] этой структуре не придерживаются.

В частности, теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника; о неравенстве треугольника; о признаках равенства прямоугольных треугольников и др. рассматриваются после введения аксиомы параллельных. Приводимые доказательства этих свойств и теорем использует аксиому параллельных. На самом деле, доказательства этих теорем от аксиомы параллельных не зависят. Тем самым формируются искажённые представления о том, что зависит от аксиомы параллельных, а что не зависит.

Литература

1. Далингер В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений: кн. Для учителя – М.: Просвещение, 2006.
2. Саранцев Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе. – М.: Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2006.
3. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2013.
4. Мерзляк А. Г. и др. Геометрия. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. – М.: Вентана-Граф, 2015.
5. Александров А.Д. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2003.
6. Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Просвещение, 2022.
7. Киселев А. П. Геометрия / под ред. Н. А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
8. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Об одном свойстве равнобедренного треугольника //Математика в школе, 2019. - № 5. - С. 75-78.
9. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 7-9 классы: учебн. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2019.