ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова,
МПГУ (Москва),
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

V.A. Smirnov, I.M. Smirnova,
MSPU (Moscow),
e-mail: v-a-smirnov@mail.ru,
i-m-smirnova@yandex.ru

Ключевые слова: визуализация, расстояние, скрещивающиеся прямые

Key words: visualization, distance, skew straight lines

Аннотация: в работе рассматриваются возможности использования компьютерной программы GeoGebra для визуализации задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Abstract: the paper discusses the possibility of using the GeoGebra computer program to visualize problems for finding the distance between the skew straight lines

Задачи на нахождение расстояний и углов в пространстве занимают важное место в обучении стереометрии и в Едином государственном экзамене по математике. Трудности в их решении во многом обусловлены недостаточной наглядностью плоских изображений пространственных фигур и, как следствие, сложностью проведения необходимых построений. Более того, понимание учащимися изображений пространственных фигур, умение проводить дополнительные построения приходит только после того, как у них появляются представления о самих пространственных фигурах.

Эти представления в прошлом веке формировались с помощью моделей пространственных фигур и так называемых «стереометрических ящиков», содержащих элементы, с помощью которых можно было моделировать основные многогранники, показывать различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве и многое другое.

Сегодня для моделирования пространственных фигур и формирования необходимых пространственных представлений можно использовать различные компьютерные программы. Работа с такими моделями может предшествовать работе с плоскими изображениями пространственных фигур.

Здесь мы рассмотрим возможности использования компьютерной программы GeoGebra для визуализации задач на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми. В этой программе можно моделировать различные пространственные фигуры, проводить дополнительные построения [1, 2]. Рисунки 3–11 в этой статье являются фотографиями (скриншотами) этих фигур. Аналогичные способы визуализации могут быть использованы для обучения учащихся решению и других задач на нахождение расстояний и углов в пространстве.

Напомним, что расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется длина общего перпендикуляра к этим прямым, то есть длина отрезка, соединяющего точки на данных прямых и перпендикулярного этим прямым (рис. 1).

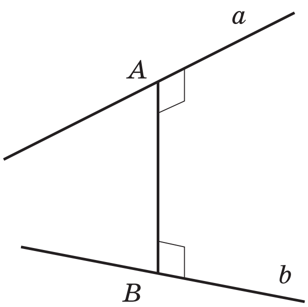


Рис. 1

Для доказательства существования общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым a и b (рис. 2) выберем на прямой b какую-нибудь точку B' и проведём через неё прямую a', параллельную прямой a. На прямой a выберем какую-нибудь точку A' и опустим из неё перпендикуляр $A'C$ на плоскость β, которая задаётся пересекающимися прямыми a' и b. Через точку C проведём прямую c, параллельную прямой a', и обозначим буквой B точку пересечения её с прямой b.

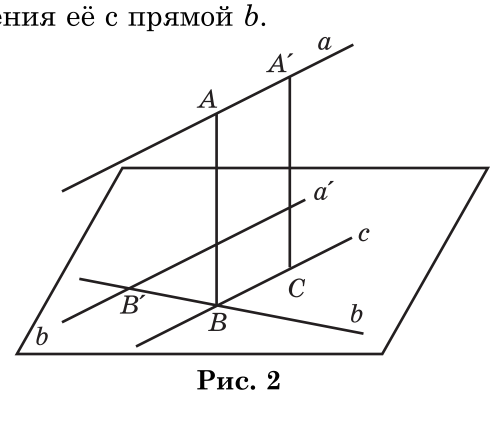


Рис. 2

Наконец, через точку B проведём прямую, параллельную прямой $A'C$, и обозначим буквой A точку пересечения её с прямой a. Отрезок AB будет искомым общим перпендикуляром к прямым a и b.

Действительно, прямая AB параллельна прямой $A'C$, которая перпендикулярна плоскости β, следовательно, она перпендикулярна прямой b, лежащей в этой плоскости. Прямая $A'C$ перпендикулярна также прямой c, лежащей в плоскости β и параллельной прямой a. Следовательно, прямая $A'C$ также перпендикулярна прямой a.

Заметим, что длина общего перпендикуляра AB равна расстоянию от прямой a до плоскости β, и для его нахождения можно использовать перпендикуляр $A'C$, опущенный на плоскость β из любой точки A' прямой a. На практике осуществить подобное построение общего перпендикуляра к данным скрещивающимся прямым удаётся сделать не всегда, что существенно затрудняет решение задач.

Проиллюстрировать такое построение можно в компьютерной программе GeoGebra. Проведём какие-нибудь две скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 3), взяв точки $A(0; -3; 0)$, $B(0; 0; 4)$, $C(4; 0; 0)$, $D(0; 0; 2)$.

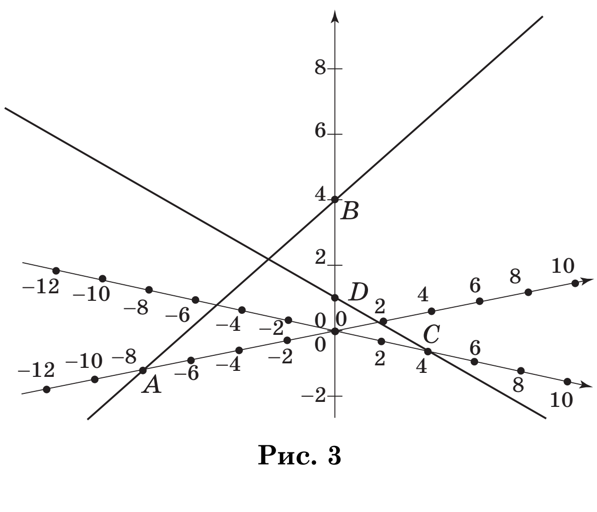


Рис. 3

Через точку D проведём прямую, параллельную прямой AB. Через неё и прямую CD проведём плоскость. На прямой AB выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на эту плоскость. Будем перемещать точку E по прямой AB до тех пор, пока точка F не займёт положение на прямой CD. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AB и CD (рис. 4).

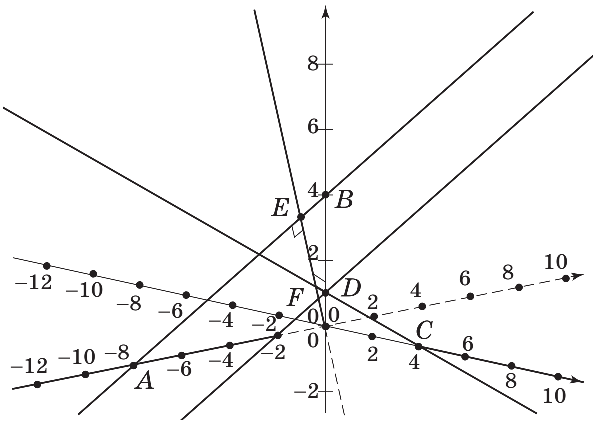


Рис. 4

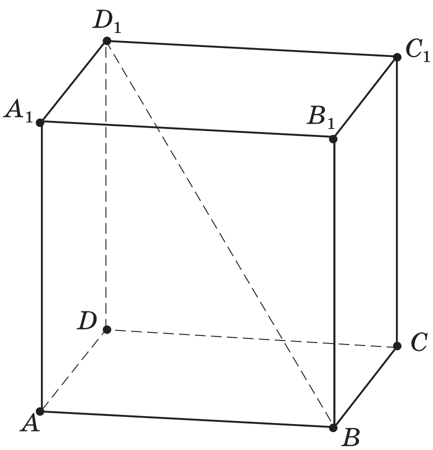
Полученное изображение можно поворачивать и смотреть на построенные прямые и общий перпендикуляр с разных сторон, менять цвет и толщину линий, размеры букв и др.

Задача 1. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AA_1 и BD_1. Найдите его длину (рис. 5*а*).

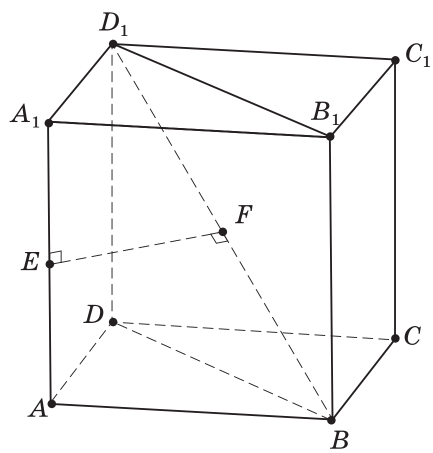
Р е ш е н и е. Через точки B, D, D_1 проведём плоскость. Она будет параллельна прямой AA_1 (рис. 5*б*). На ребре AA_1 выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на плоскость BDD_1. Будем перемещать точку E до тех пор, пока точка F не займёт положение на прямой BD_1. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BD_1. Он равен расстоянию от точки A до прямой BD. Значит, длина перпендикуляра EF равна $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. Для единичного куба $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB_1 и BD_1. Найдите его длину (рис. 6*а*).

Р е ш е н и е. Обозначим буквами G и H середины рёбер B_1C_1 и AD соответственно. Через точки B, G, H проведём плоскость. Она будет параллельна прямой AB_1 и содержать прямую BD_1 (рис. 6*б*). На прямой AB_1 выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на

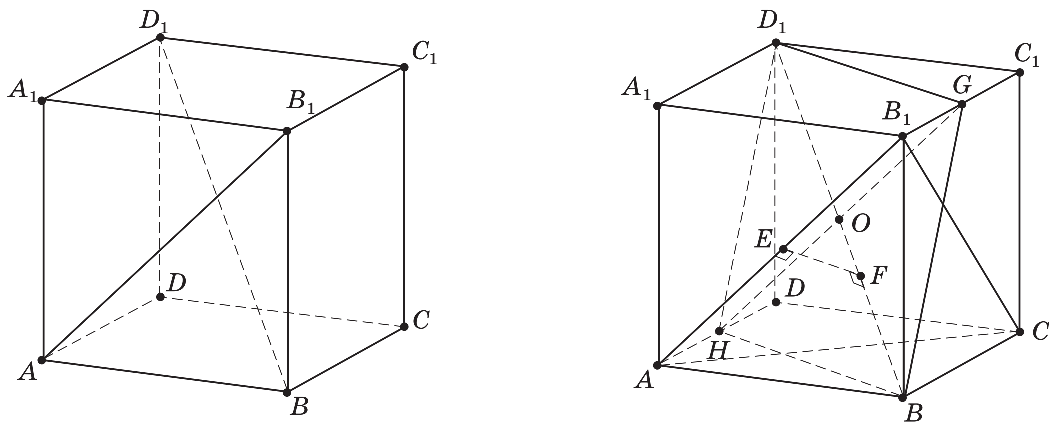


***а*)**



***б*)**

Рис. 5



а) *б*)

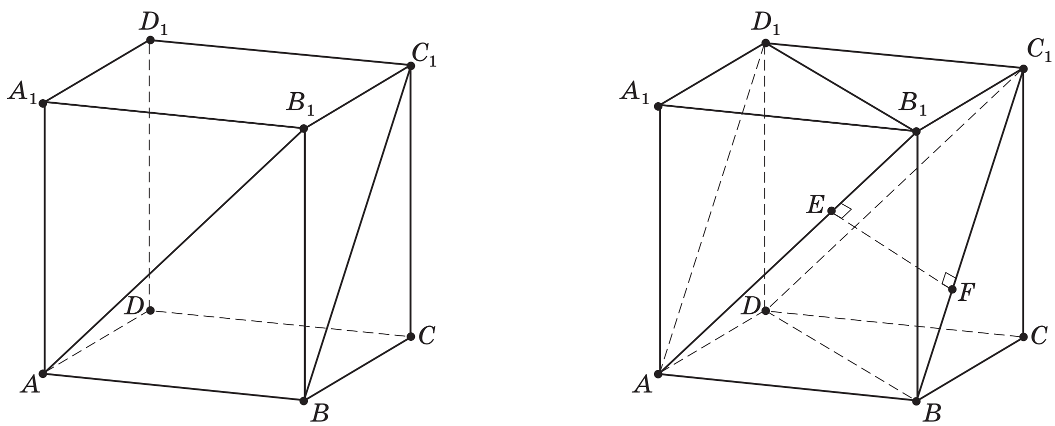
Рис. 6

плоскость BGH. Будем перемещать точку E до тех пор, пока точка F не займёт положение на прямой BD_1. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AB_1 и BD_1. Он равен радиусу окружности, вписанной в равносторонний треугольник ACB_1. Длина этого перпендикуляра равна $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Задача 3. Для единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB_1 и BC_1. Найдите его длину (рис. 7*а*).

Р е ш е н и е. Через точки B, D и C_1 проведём плоскость. Она будет параллельна прямой AB_1 (рис. 7*б*). На прямой AB_1 выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на плоскость BDC_1. Будем перемещать точку E до тех пор, пока точка F не займёт положение на прямой BC_1. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AB_1 и BC_1. Он равен расстоянию между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1. Это расстояние равно трети диагонали куба, то есть равно $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Задача 4. Для правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающим-



а) *б*)

Рис. 7

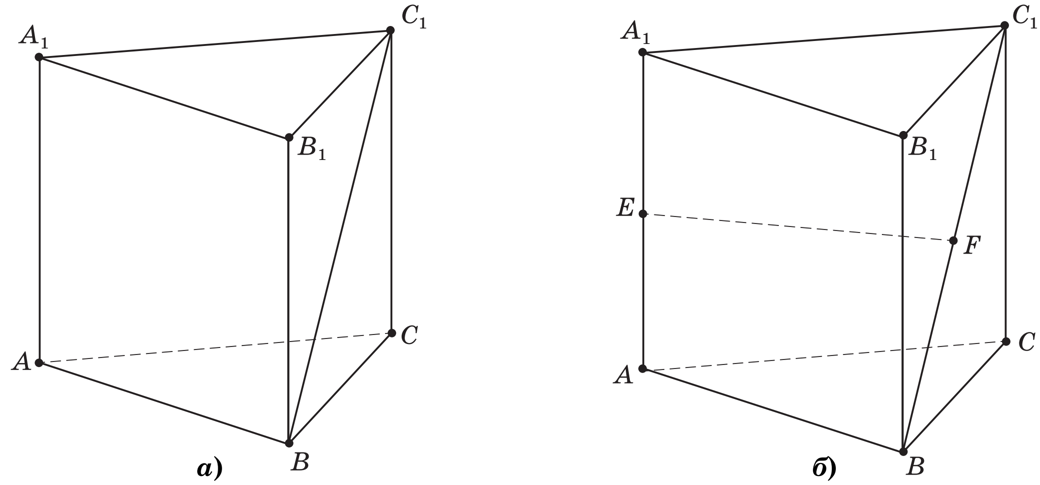


Рис. 8

ся прямым AA_1 и BC_1. Найдите его длину (рис. 8*а*).

Р е ш е н и е. На прямой AA_1 выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на плоскость BCC_1. Будем перемещать точку E до тез пор, пока точка F не займёт положение на прямой BC_1. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AA_1 и BC_1 (рис. 8*б*). Он равен расстоянию от точки A до прямой BC, то есть $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 5. Для правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB_1 и BC_1. Найдите его длину (рис. 9*а*).

Р е ш е н и е. Обозначим буквами D и G середины отрезков BC_1 и AC соответственно. Через точки B, D и G проведём плоскость (рис. 9*б*). Она будет содержать прямую DG, параллельную прямой AB_1, следовательно, будет параллельна этой прямой. На прямой AB_1 выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на плоскость BGC_1. Будем перемещать точку E до тех пор, пока точ-

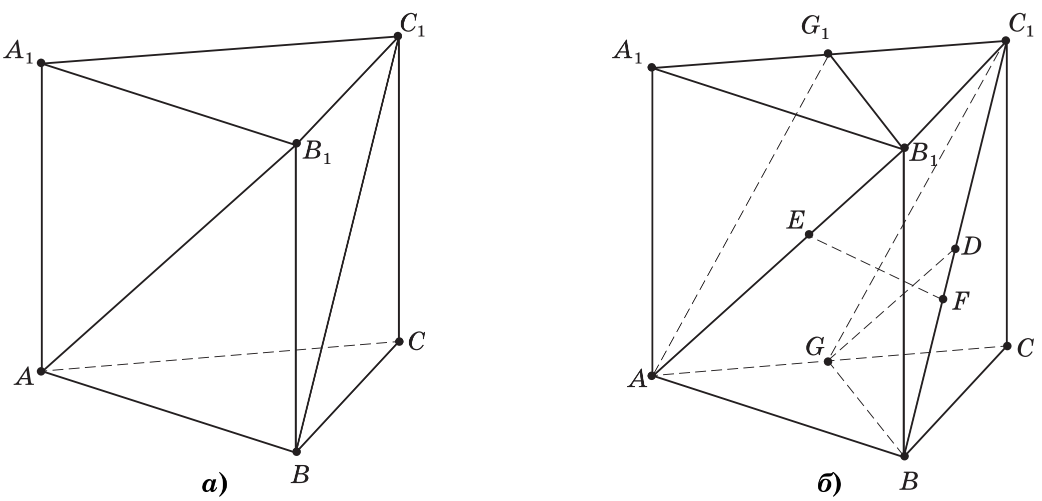


Рис. 9

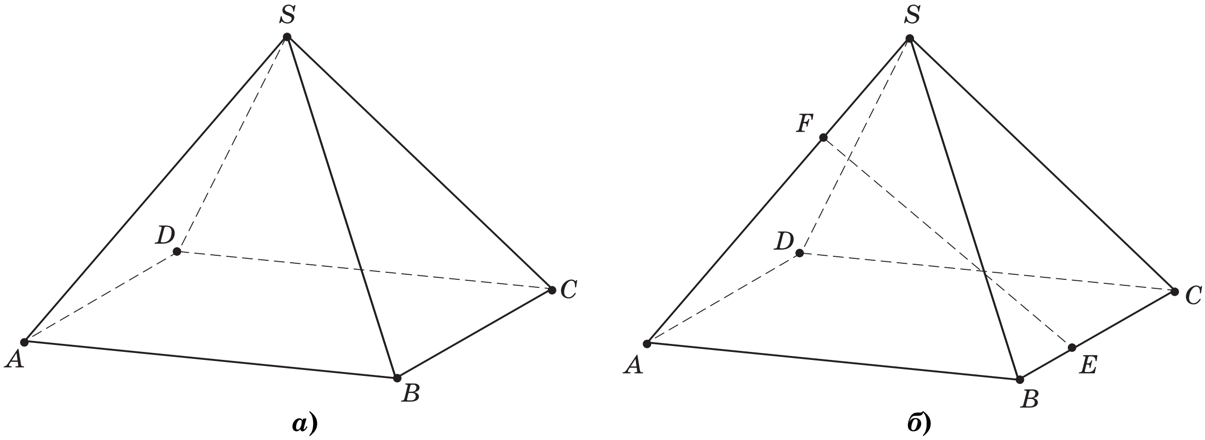


Рис. 10

ка F не займёт положение на прямой BC_1. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым AB_1 и BC_1. Он равен расстоянию между плоскостями AB_1G_1 и BGC_1, где G_1 – середина ребра A_1C_1. Так как плоскости AB_1G_1 и BGC_1 перпендикулярны плоскости ACC_1, то это расстояние равно расстоянию между прямыми AG_1 и GC_1. Оно равно $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Задача 6. Для правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, все рёбра которой равны 1, в программе GeoGebra постройте общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым SA и BC. Найдите его длину (рис. 10*а*).

Р е ш е н и е. На прямой BC выберем какую-нибудь точку E и опустим из неё перпендикуляр EF на плоскость SAD. Будем перемещать точку E пока точка F не займёт положение на прямой SA. Полученный отрезок EF будет искомым общим перпендикуляром к прямым SA и BC (рис. 10*б*). Он равен расстоянию от прямой BC до плоскости SAD. Оно равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Задача 7. Для правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, в программе GeoGebra постройте общий перпендику-

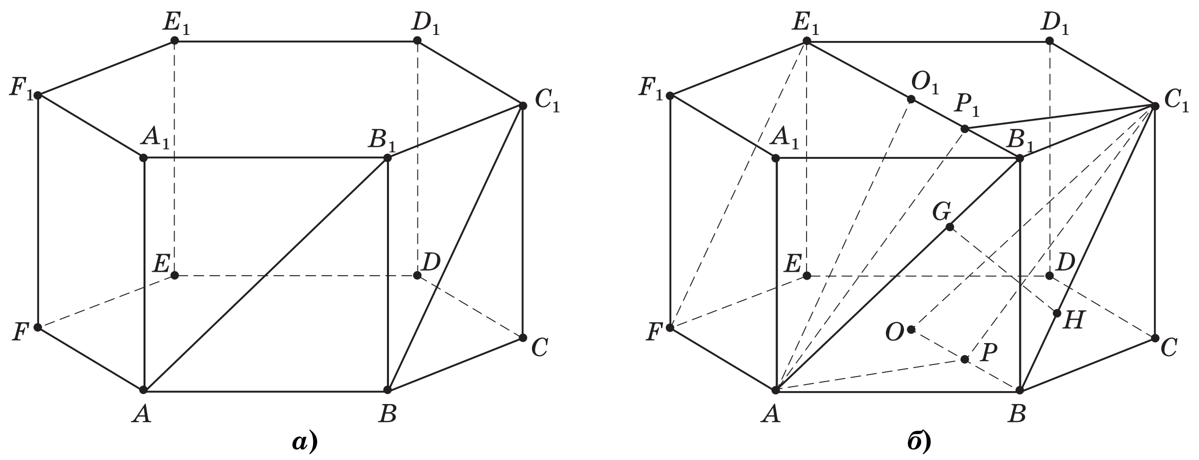


Рис. 11

ляр к скрещивающимся прямым AB_1 и BC_1. Найдите его длину (рис. 11*а*).

Р е ш е н и е. Обозначим буквами O и O_1 центры оснований призмы. Через точки B, C_1 и O проведём плоскость. Она будет содержать прямую OC_1, параллельную прямой AB_1, следовательно, будет параллельна этой прямой (рис. 11*б*). На прямой AB_1 выберем какую-нибудь точку G и опустим из неё перпендикуляр GH на плоскость BOC_1. Будем перемещать точку G до тех пор, пока точка H не займёт положение на прямой BC_1. Полученный отрезок GH будет искомым общим перпендикуляром к прямым AB_1 и BC_1. Он равен расстоянию между плоскостями AB_1O_1 и BOC_1. Обозначим буквами P и P_1 середины отрезков OB и O_1B_1 соответственно. Расстояние между плоскостями AB_1O_1 и BOC_1 равно расстоянию между прямыми AP_1 и PC_1. Оно равно $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Литература

1. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрия с GeoGebra. Планиметрия. – М.: Прометей, 2018.

2. *Смирнов В.А., Смирнова И.М.* Геометрия с GeoGebra. Стереометрия. – М.: Прометей, 2018.