ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

В наиболее простой формулировке принцип Дирихле утверждает:

Если в *n* клетках сидит более *n* кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит более одного кролика.

Действительно, если бы во всех клетках сидело не более одного кролика, то тогда в *n* клетках сидело бы не более *n* кроликов.

Следующее утверждение является обобщением принципа Дирихле.

Если в *n* клетках сидит более *kn* кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит более *k* кроликов.

Действительно, если бы во всех клетках сидело не более *k* кроликов, то тогда в *n* клетках сидело бы не более *kn* кроликов.

Сформулируем еще одно утверждение, близкое к принципу Дирихле.

Если в *n* клетках сидит менее $\frac{n(n-1)}{2}$ **кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое число кроликов (может быть ни одного).**

Действительно, если бы во всех клетках сидело разное число кроликов, то их общее число было бы не менее, чем $0+1+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$.

Задача 1. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы.

Решение. В русском алфавите 33 буквы. Следовательно, среди 35 учеников найдутся два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы.

Задача 2. В школе 20 классов. В ближайшем доме живет 22 ученика этой школы. Верно ли, что среди них найдутся хотя бы два одноклассника?

Ответ. Верно.

Задача 3. При каком наименьшем количестве учеников школы среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

Ответ. 367.

Задача 4. 15 детей собрали 100 орехов. Докажите, что хотя бы два из них собрали одинаковое число орехов.

Решение. Если бы все дети собрали разное количество орехов, то число орехов должно было бы быть не менее $0+1+...+14=\frac{15\cdot 14}{2}=105$.

Задача 5. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них – мужчины. Докажите, что найдутся два мужчины, сидящие друг напротив друга.

Решение. Число пар, образованных людьми, сидящими напротив друг друга равно 50. Так как число мужчин больше 50, то хотя бы в одной паре найдутся два мужчины.

Задача 6. В ящике лежат 105 яблок четырех сортов. Докажите, что среди них найдутся, по крайней мере, 27 яблок одного сорта.

Решение. Если бы число яблок одного сорта было не более 26, то общее число яблок должно было быть не более 104.

Задача 7. Докажите, что из 82 выкрашенных в определенный цвет кубиков, можно выбрать или 10 кубиков разных цветов, или 10 кубиков одного цвета.

Решение. Если число кубиков одного цвета не больше 9, то число кубиков хотя бы одного цвета должно быть больше 9. так как в противном случае общее число кубиков было бы не больше 81.

Задача 8. 65 школьников за год написали три контрольные работы, за которые ставились оценки 2, 3, 4, 5. Верно ли, что среди этих школьников найдутся двое, получившие одинаковые оценки за все контрольные работы?

Решение. Число различных оценок равно $4^3 = 64$. Следовательно, среди 65 школьников найдутся двое, получившие одинаковые оценки за все контрольные работы

Задача 9. В классе 25 учеников. Среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что в этом классе есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Решение. Предположим, что в классе есть два ученика, не являющихся друзьями. Каждый человек из оставшихся 23 учеников является другом одного из этих двух учеников. Значит, у одного из них число друзей не менее 12.

Задача 10. В бригаде 7 человек. Их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что среди них найдутся три человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Решение. Число различных троек из семи человек равно 35. Каждый человек участвует в 15 тройках. Суммарный возраст всех человек во всех тройках равен $332 \cdot 15 = 4980$. Следовательно, должна быть тройка, в которой суммарный возраст не меньше 4980:35, что больше 142.

Задачи на делимость

Задача 1. Докажите, что среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Решение. Остатками могут быть n чисел: 0, 1, …, n. Следовательно, среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Задача 2. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

Решение. Число различных остатков при делении на 11 равно 11. Среди 12 целых чисел найдутся два, имеющие одинаковые остатки и, следовательно, их разность будет делиться на 11.

Задача 3. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько чисел, сумма которых делится на 10.

Решение. Обозначим числа a_1, a_2, …, a_{10}. Среди чисел 0, a_1, $a_1 + a_2$, …, $a_1 + … + a_{10}$ найдутся два, имеющие одинаковые остатки при делении на 10. Тогда их разность будет делиться на 10.

Задача 4. Верно ли, что из любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

Решение. Число различных остатков при делении на 3 равно трем. Из семи чисел найдутся три, имеющие одинаковые остатки. Сумма этих чисел будет делиться на 3.

Задача 5. Докажите, что среди любых 52 целых чисел найдутся два числа, сумма или разность которых делится на 100.

Решение. Разобьем все остатки при делении на 100 на группы {0}, {1, 99}, …, {49, 51}, {50}. Число таких групп равно 51. Среди 52 целых чисел найдется два числа, у которых остатки попадают в одну группу. Сумма или разность этих чисел будет делиться на сто.

Геометрические задачи

Задача 1. На плоскости проведены 10 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что среди этих прямых найдутся две, угол между которыми не больше 18^o.

Решение. Если бы все углы были больше 18^o, то их сумма была бы больше 360^o, что невозможно.

Задача 2. В квадрате 4x4 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1x1, не содержащий внутри себя ни одной из этих точек.

Решение. Разобьем квадрат на 16 равных квадратиков. Хотя бы в один из них не будет содержать внутри себя точку.

Задача 3. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более 5 точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

Решение. Разобьем круг на 6 равных секторов. Ни в одном из них не может быть двух точек, так как в этом случае расстояние между ними будет не больше 1. Предположим, что в каждом секторе имеется по точке. Тогда найдутся две точки, для которых центральный угол, образованный лучами, проходящими через эти точки, не больше 60^o. Тогда расстояние между этими точками не больше 1. Следовательно, нельзя выбрать более 5 точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

Задача 4. Можно ли квадрат со стороной 1,5 покрыть тремя квадратами со стороной 1?

Решение. Никакие две вершины квадрата со стороной 1,5 нельзя покрыть одним квадратиком со стороной 1. Следовательно, каждая вершина должна покрываться своим квадратиком, т.е. число квадратиков не меньше 4.

Задача 5. Докажите, что у любого многогранника найдутся, по крайней мере, две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон. Пусть оно равно n. Эту грань окружают n граней с числом сторон от трех до n. Среди них найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Литература

1. Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975 (http://www.mccme.ru/free-books).

2. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров, 1994 (http://www.mccme.ru/free-books).

3. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.