1. Математическая индукция

1. Найдите сумму $1 + 2 + \ldots + n$.
2. Найдите сумму $1 + 3 + \ldots + 2n - 1$.
3. Найдите сумму $d + 2d + \ldots + (n - 1)d$.
4. Найдите сумму $a + (a + d) + \ldots + (a + (n - 1)d)$.
5. Найдите сумму $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.
6. * Найдите сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$.
7. * Найдите сумму $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
8. *. Найдите сумму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \cdots + (2n-1)(2n+1)$.
9. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.
10. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.
11. Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
12. * Найдите сумму $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
13. * Найдите сумму $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$.
14. * Найдите сумму $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

2. Доказательство по индукции

1. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 + 3 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$$

3. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется равенство

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

6. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $q \neq 1$ выполняется равенство

$$1 + q + q^2 \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

7. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $x \geq -1$ выполняется неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

8. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство $2^n > n$.

9. Докажите, что для любого натурального числа $n \geq 4$ выполняется неравенство $n! > 2^n$.

10. Докажите, что для любого натурального числа n выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

11. * Докажите, что любую карту на плоскости, образованную конечным набором прямых, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области, т.е. области, имеющие общую границу (отрезок, луч или прямую), имели разный цвет.

12. * Докажите, что любую карту на плоскости, образованную конечным набором окружностей, можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области, т.е. области, имеющие общую границу (дугу окружности), имели разный цвет.

13. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16х16 вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки из трех клеток.

14. Из квадрата клетчатой бумаги размером 16х16 вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники из двух клеток.

3. Элементы комбинаторики

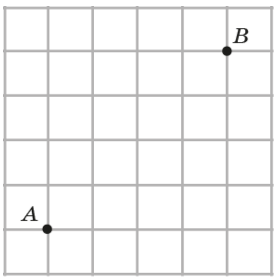
1. Укажите способ образования треугольных чисел. Напишите формулу для n-го треугольного числа.

2. Укажите способ образования пятиугольных чисел. Напишите формулу для n-го пятиугольного числа.

3. Изобразите числа, расположенные в первых нескольких строках треугольника Паскаля.

4. Напишите формулу, по которой числа треугольника Паскаля T_n^k, расположенные в n-ой строке, выражаются через числа предыдущей строки.

5. Сколько имеется кратчайших путей из A в B, проходящих по сторонам сетки, изображенной на рисунке, состоящей из единичных квадратов?



6. В магазине «Все для чая» имеется 5 различных чашек и 3 различных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

7. В магазине «Все для чая» имеется 5 различных чашек, 3 различных блюдца и 4 различных чайных ложек. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем и ложкой?

8. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

9. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

10. Код замка является набором из пяти цифр. Сколько имеется таких наборов?

11. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

12. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не смогли бить друг друга?

13. 65 школьников за год написали три контрольные работы. Верно ли, что среди этих школьников найдутся двое, получившие одинаковые оценки за все контрольные работы?

14. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из пяти различных красок?

15. Из класса, в котором учатся 20 человек, нужно выбрать троих человек. Сколькими способами это можно сделать?

16. У одного человека имеется семь книг, а у другого – 9. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

17. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

18. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

19. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?

20. На сколько частей разбивают плоскость n попарно параллельных прямых?

21. * Какое наибольшее число частей могут разбивать плоскость n прямых?

22. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей?

23. * На какое наибольшее число частей разбивают плоскость n окружностей?

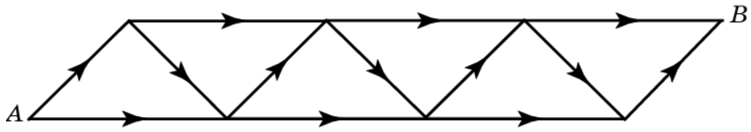
24. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

25. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная пирамида?

26. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная призма?

27. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

28. Сколько имеется путей из A и B по отрезкам, изображенным на рисунке, в направлениях указанных стрелками?



29. Сколькими способами человек может подняться по ступенькам лестницы с первой на 10-ю ступеньку, если с каждой ступеньки он может шагать или на следующую, или через одну ступеньку?

4. Рыцари и лжецы

1. Сидят мальчик и девочка. «Я – мальчик», - сказал первый ребенок. «Я – девочка», - сказал второй ребенок. Известно, что хотя бы один из них лжет. Кто мальчик, а кто девочка?

2. Житель острова Крит говорит: «Все критяне – лжецы. Истинно или ложно это высказывание?

3. У императора украли перстень. Известно, что те, кто крадут перстни, всегда лгут. Пресс-секретарь сказал, что знает, кто украл перстень. Виновен ли он?

4. На острове живут Рыцари и Лжецы. Островитянин А в присутствии другого островитянина В говорит: «По крайней мере один из нас – лжец». Кто А и кто В?

5. Три аборигена: А, В и С (рыцарь, лжец и хитрец) – на вопрос: «Кто В?» - ответили: А: «Лжец». В: «Хитрец». С: «Рыцарь». Кто из них кто?

6. До царя Гороха дошла молва, что кто-то из троих богатырей убил Змея Горыныча. Царь приказал всем троим явиться ко двору и ответить.

Илья Муромец ответил: «Змея убил Добрыня Никитич».

Добрыня Никитич ответил: «Змея убил Алеша Попович».

Алеша Попович ответил: « Змея убил я».

Известно, что только один из них сказал правду. Кто убил змея?

7. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди – среднего, а лжецы – низшего. А, В и С – жители этого острова. Один из них – рыцарь, другой – лжец, третий – обычный человек. А сказал, что В по рангу выше чем С. В сказал, что С по рангу выше чем А. Что ответил С на вопрос: «Кто выше по рангу – А или В?»

8. На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Два жителя называются однотипными, если они оба рыцари, либо оба лжецы. А, В и С – жители этого острова. А сказал, что В и С однотипны. Что скажет С относительно однотипности А и В?

9. Имеются три утверждения. 1. «У Вовы больше 1000 книг». 2. «У Вовы меньше 1000 книг». 3. «У Вовы есть, по крайне мере, одна книга». Сколько книг может быть у Вовы, если только одно из этих утверждений верно?

10. Число x – натуральное. Из неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$, $x > 5$ два верных и три неверных. Чему равно x?

5. Логические задачи

1. Встретились три друга: Белов, Серов, Чернов. На них были белая, серая и чёрная рубашки. Одетый в белую рубашку сказал Чернову: «Интересно, что цвет рубашки на каждом из нас не соответствует фамилии». Какой цвет рубашки у каждого?

2. Встретились три подруги: Белова, Серова и Чернова. На них были белые, серые и чёрные туфли. Обутая в серые туфли сказала Беловой: «Интересно, что цвет туфель на каждой из нас не соответствует фамилии». Какой цвет туфель у каждой подруги?

3. Друзья Алёша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один из них ездит домой из школы на автобусе, другой — на трамвае, а третий — на троллейбусе. Однажды после уроков Алёша пошёл проводить своего друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадку!» Кто на чем ездит домой?

4. Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

5. В бутылке, стакане и кувшине находятся молоко, квас и вода, причём вода не в бутылке, сосуд с молоком стоит между стаканом и сосудом с квасом, кувшин стоит около стакана и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

6. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода, причём вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

7. Имеются 6 человек: москвич, парижанин, киевлянин, туляк, одессит и римлянин. Имена их: А, Б, В, Г, Д и Е. Известно, что А и москвич — врачи, Д и парижанин — учителя, В и туляк — инженеры. Б и Е женаты, а туляк — холост. Римлянин старше А, одессит старше В. Б и москвич курят, а В и римлянин — нет. Определите, кто есть кто.

8. Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподает литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

6. Принцип Дирихле

1. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы.

2. В школе 20 классов. В ближайшем доме живет 22 ученика этой школы. Верно ли, что среди них найдутся хотя бы два одноклассника?

3. При каком наименьшем количестве учеников школы среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

4. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них – мужчины. Докажите, что найдутся два мужчины, сидящие друг напротив друга.

5. Кот Базилио пообещал Буратино открыть Великую Тайну, если он составит чудесный квадрат 6x6 из чисел +1, –1 и 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

6. 65 школьников за год написали три контрольные работы, за которые ставились оценки 2, 3, 4, 5. Верно ли, что среди этих школьников найдутся двое, получившие одинаковые оценки за все контрольные работы?

7. В ящике лежат 105 яблок четырех сортов. Докажите, что среди них найдутся, по крайней мере, 27 яблок одного сорта.

8. Докажите, что из 82 выкрашенных в определенный цвет кубиков, можно выбрать или 10 кубиков разных цветов, или 10 кубиков одного цвета.

9. В классе 25 учеников. Среди любых трех из них есть двое друзей. Докажите, что в этом классе есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

10. На плоскости проведены 10 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что среди этих прямых найдутся две, угол между которыми не больше 18^{o}.

11. Докажите, что у любого многогранника найдутся, по крайней мере, две грани с одинаковым числом сторон.

12. Докажите, что у любого многогранника найдутся, по крайней мере, две вершины, в которых сходится одинаковое число ребер.

13. Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на 10 дают одинаковые остатки.

14. Дано $n + 1$ целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на n.

15. Докажите, что из любых трех целых чисел можно выбрать два, сумма которых четна.

16. Верно ли, что из любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

17. Докажите, что найдется число вида 1…10…0, делящееся на 1998.

18. Докажите, что среди любых 52 целых чисел найдутся два числа, сумма или разность которых делится на 100.

19. На плоскости даны 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из отрезков, соединяющих их, также имеет целые координаты.

20. В квадрате 4х4 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1х1, не содержащий внутри себя ни одной из этих точек.

21. На газоне в форме правильного треугольника со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, находящиеся друг от друга на расстоянии, не превышающем 1 м.

22. Прямоугольник 20х30 разбит на клетки 1х1. Можно ли провести прямую, пересекающую по внутренним точкам 50 клеток этого прямоугольника?

23. Докажите, что в любом выпуклом $2n$-угольнике найдется диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

24. В прямоугольнике 3х4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

25. Докажите, что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более 5 точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

26. 15 детей собрали 100 орехов. Докажите, что хотя бы два из них собрали одинаковое число орехов.

27. Докажите, что среди любых $n + 1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

28. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.

29. Докажите, что среди любых 10 целых чисел найдется несколько чисел, сумма которых делится на 10.

30. Верно ли, что из любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

31. Докажите, что среди любых 52 целых чисел найдутся два числа, сумма или разность которых делится на 100.

7. Четность

1. Можно ли 25 рублей разменять десятью купюрами по 1, 3 и 5 рублей?

2. На столе стоят семь перевернутых стаканов. Разрешается одновременно переворачивать любые два стакана. Можно ли добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

3. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могла ли у него получиться сумма 1990?

4. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «–» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

5. Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путем расстановки перед числами 1, …, 1989 знаков «+» и «–» и последующего выполнения указанных операций?

6. Из шахматной доски вырезали две противоположные угловые клетки. Докажите, что оставшуюся фигуру нельзя разрезать на прямоугольники 1х2.

7. Может ли шахматный конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав на каждом из остальных полей ровно один раз.

8. В классе 15 компьютеров. Можно ли их соединить друг с другом так, чтобы каждый компьютер был соединен ровно с пятью другими?

9. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

10. Может ли прямая, не проходящая через вершины многоугольника, пересекать его стороны в нечетном числе точек?

8. Делимость чисел

1. На какую цифру оканчивается число: а) 9^{9999}; б) 3^{999}; в) 7^{1000}; г) $33^{77}+77^{33}$?
2. Может ли квадрат натурального числа оканчиваться цифрой 2?
3. Делится ли на три число $13^{16}-2^{25}5^{15}$?
4. Докажите, что число 49^{100} — 14^{50} делится на 5.
5. Докажите, что число $11^{10}-1$ делится на 100.
6. Докажите, что число $3^{1974}+5^{1974}$ делится на 13.
7. Доказать, что число $2222^{5555}+5555^{2222}$ делится на 7.
8. Найдите остаток от деления числа 7^{100} на 8.
9. Найдите остаток от деления числа $10^{10}+10^{10^2}+\ldots+10^{10^{10}}$ на 7.
10. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.
11. Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.
12. Найдите все натуральные числа $n>1$, для которых n^3-3 делится на $n-1$.
13. Докажите, что для любого натурального n число n^3+2n делится на 3.
14. Докажите, что для любого натурального n число n^5+4n делится на 5.
15. Докажите, что для любого натурального n число n^2+1 не делится на 3.
16. Докажите, что при любом натуральном n число n^3+11n делится на 6.
17. Докажите, что для любого натурального n число n^2+1 не делится на 3.
18. Докажите, что для любого натурального n число n^3+2 не делится на 9.
19. Докажите, что для любого четного натурального n число n^3-4n делится на 48.
20. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^6-n^4-n^2+1$ делится на 128.
21. Докажите, что число $21^{10}-1$ делится на 2200.

22. Докажите, что для любого натурального n число $n^2 - 3n + 5$ не делится на 121.

23. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом n.

24. Определить натуральные n, при которых $2^n — 1$ делится на 7.

25. Докажите, что ни при каких натуральных n число $2^n + 1$ не делится на 7.

26. Пусть $S(n)$ – сумма цифр в десятичной записи числа n. Найдите все натуральные n, для которых выполняется равенство $n + S(n) + S(S(n)) = 1993$.

9. Простые и составные числа

1. Докажите, что число 1001 – составное.
2. Докажите, что число 9991 – составное.
3. Докажите, что число 3551– составное
4. Докажите, что числа вида $8^n + 1$ – составные.
5. Докажите, что число $2^9 + 5^{12}$ – составное.
6. Докажите, что число $222^{555} + 555^{222}$ – составное.
7. Докажите, что числа вида $n^4 + 4$ – составные при $n > 1$.
8. Найдите все простые числа p, для которых $p + 10$ и $p + 14$ – простые.
9. Найдите все простые числа p, для которых $2p + 1$ и $4p + 1$ – простые.
10. Найдите все простые числа p, для которых $8p^2 + 1$ – простое.
11. Найдите все простые числа p, для которых $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ – простые.
12. Числа p и $p^2 +2$ – простые. Докажите, что число $p^3 + 2$ – простое.
13. Найдите все натуральные n, при которых $2^n - 1$ и $2^n + 1$ – простые.
14. Верно ли, что число $n^3 + 5n - 1$ простое для любого натурального n?
15. Докажите, что если $2^n + 1$ — простое число, то n — степень двойки.
16. Докажите, что если $2^n - 1$ — простое число, то n – простое число.

10. Решение уравнений в целых числах

1. Решите уравнение в целых числах $2x + 9y = 50$.
2. Решите уравнение $62x + 26y = 6$.
3. На складе имеются ящики с гвоздями по 17 кг и 19 кг. Можно ли отгрузить 300 кг гвоздей не раскрывая ящиков?
4. **.** Имеются контейнеры двух видов: по 100 кг и по 170 кг. Можно ли полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 т?
5. У продавца есть 100-граммовые гирьки и консервные банки весом по 450 г. Как с их помощью отвесить на чашечных весах 2,5 кг сахара за один раз, используя наименьшее количество гирек и банок в общей сложности?
6. Даны углы 36° и 25°. Постройте угол 1°.
7. Найдите все точки с целочисленными координатами (x, y), $x < 0$, $y > 0$, принадлежащие прямой $8x - 13y + 11 = 0$.

8. Решите уравнение в целых числах $x^2 – y^2 = 2$.

9. Найдите все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

10. Найти все решения в целых числах уравнения $xy + 3x – 5y = 18$.

11. Решить в целых числах уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$.

12. Решите в целых числах уравнение $x + y = x^2 – xy + y^2$.

13. Решите в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 – xy – xz – yz = 3$.

14. Решите в натуральных числах уравнение $5^n + 12^n = 13^n$.

15. В прямоугольном треугольнике один катет равен 7. Найдите две другие стороны этого треугольника, если их длины выражаются целыми числами.