I. Выполните деление с остатком многочлена f(x) на многочлен g(x):

1) $f(x) = x^3 – 3x + 2$, $g(x) = x – 2$;

2) $f(x) = x^5 + 2$, $g(x) = x – 1$;

3) $f(x) = x^6 – 2$, $g(x) = x^2 – x + 1$;

4) $f(x) = x^4 – 3x^2 + 1$, $g(x) = x – 2$;

5) $f(x) = x^4 + x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$;

6) $f(x) = x^8 – 1$, $g(x) = x^2 + 2$.

II. Найдите кратность k корня *a* многочлена f(x) и представьте его в виде произведения многочленов с рациональными коэффициентами, если:

1) $a = 1$ и $f(x) = x^6 – 9x^5 + 33x^4 – 65x^3 + 74x^2 – 46x + 12$;

2) $a = 1$ и $f(x) = x^6 – 3x^5 + 16x^4 – 34x^3 + 32x^2 – 17x + 5$;

3) $a = 2$ и $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

4) $a = -2$ и $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x – 16$;

5) $a = 1$ и $f(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$;

6) $a = -1$ и $f(x) = x^6 - 4x^4 - 6x^3 + 16x^2 + 29x + 12$.

III. Найдите все рациональные корни многочлена и представьте его в виде произведения многочленов с рациональными коэффициентами:

1) $x^3 – 6x^2 + 15x – 14$;

2) $x^4 – 27x^2 – 14x + 120$;

3) $x^4 + 4x^3 – 2x^2 – 12x + 9$;

4) $x^4 – 2x^3 – 8x^2 + 13x - 24$;

5) $x^4 + 2x^3 – 13x^2 - 38x - 24$;

6) $x^5 – 2x^4 – 4x^3 + 4x^2 – 5x + 6$;

7) $x^5 + x^4 – 6x^3 - 14x^2 – 11x - 3$;

8) $2x^3 + 3x^2 + 6x – 4$;

9) $6x^4 + 19x^3 – 7x^2 – 26x + 12$;

10) $4x^4 – 7x^2 – 5x - 1$;

11) $24x^5 + 10x^4 – x^3 - 19x^2 – 5x + 6$;

12) $10x^4 – 13x^3 + 15x^2 - 18x - 24$.

IV. По интерполяционной формуле Лагранжа найдите многочлен второй степени f(x), если:

1) f(-2) = 2, f(1) = - 2, f(5) = 3;

2) f(-3) = -5, f(1) = - 2, f(2) = 2.

V. С помощью критерия Эйзенштейна докажите неприводимость в поле рациональных чисел многочленов:

1) $x^3 – 12$;

2) $x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$;

3) $2x^5 + 6x^4 – 9x^2 + 12$;

4) $x^5 - 12x^3 + 36x – 12$;

5) $x^4 - x^3 + 2x + 1$.

VI. Упростите:

1) $(3a+b)(3a–b)/9a^2+b^2+6ab$

2) $64a^2+36–96a/64a^2–36$

3) $(4a+2b)(4a–2b)/16a^2+4b^2–16ab$

4) $(2a+3c)(2a–3c)/4a^2–9c^2$

5) Вычислите $a^3 + 2a^2 + 8/a^2 + 8/a^3$, если $a + 2/a = -4$;

6) Вычислите $2b^3 + 3b^2 + 3/b^2 - 2/b^3$, если $b - 1/b = 3$.

VII. Вычислите наиболее удобным способом:

1) $(0,3)^{-3} + (3/7)^{-1} + (-0,5)^{-2}(3/4) + 6(-1)^{-8}$;

2) $(2,3)^{-2} - (1/9)^{-1} + (6/17)^0(1/8) + 16(-0,25)^{-2}$;

3) 0,815(-2/3) – (1/6)(-4,385) + 0,815(1/6) – (4,385)(-2/3);

4) $(-14,09)(2\frac{1}{6}) – 6,31(-1\frac{1}{2}) – (2\frac{1}{6})6,31 + (-1\frac{1}{2})(-14,09)$;

5) $74,7(2/21) – (-105,3)\ (2\frac{3}{7}) – (-105,3)(2/21) – 74,7(2\frac{3}{7})$;

6) $2,391(6\frac{1}{10}) – 0,109(1\frac{5}{6}) – (1\frac{5}{6})\ 2,391 + 0,109(6\frac{1}{10})$;

7) $(17,31^2 – 12,69^2) – (29,81^2 – 0,19^2)$;

8) $(7,84^2 – 12,16^2) – (25,66^2 – 5,66^2)$;

9) 234,174•234,168 - 234,164•234,178;

10) 101,456•101,472 - 101,460•101,468.

VIII. Найдите НОД многочленов f(x) и g(x):

1) $f(x) = (x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$, $g(x) = (x-1)^2(x+2)(x+5)$;

2) $f(x) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$, $g(x) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1)$;

3) $f(x) = (x^3-1)(x^2-2x+1)$, $g(x) = (x^2-1)^3$;

4) $f(x) = (x^3+1)(x^2+2x+1)$, $g(x) = (x^2-1)^3$;

5)* $f(x) = x^{2k+1}-1$, $g(x) = x^{2n+1}-1$

6)* $f(x) = x^k-1$, $g(x) = x^n-1$.

IX. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y + x^2 + y^2 = 42; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}, \\ xy\,(x+y) = 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 + xy, \\ x^3 + y^3 = 6xy - 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 49, \\ x^4+x^2y^2+y^4 = 931; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^4 + y^4 = a^4, \\ x + y = b; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x^5 - y^5 = a^5, \\ x - y = b; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 14x^2y^2, \\ x + y = a; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x^2+y^2-x-y = a, \\ x^4+y^4+x+y-2(x^3 + y^3) = b; \end{cases}$

л) $\begin{cases} \dfrac{x^5 + y^5}{x^3 + y^3} = \dfrac{31}{7}, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$

м) $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy\,(x+y) = 13, \\ x^2y^2\,(x^2 + y^2) = 468. \end{cases}$

н) $xy(x+y) = 30$ и $x^3 + y^3 = 35$;

о) $x + y = 72$ и $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6$;

п) $x + xy + y = 12$ и $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y} = 0$.

X. Решите уравнение:

а) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$;

б) $x\sqrt[3]{35-x^3}\,(x + \sqrt[3]{35-x^3}) = 30$;

в) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{54-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}$;

г) $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$;

д) $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0$;

е) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$;

ж) $32x^5 + 24x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 = 0$;

з) $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0$;

и) $32x^5 - 24x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$;

к) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$;

л) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$;

м) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;

н) $3x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = 0$;

о) $5x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 12x + 5 = 0$;
п) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0$;
р) $2x^{11} + 7x^{10} + 15x^9 + 14x^8 - 16x^7 - 22x^6 - 22x^5 - 16x^4 + 14x^3 + 15x^2 + 7x + 2 = 0$.

XI. Разложите на множители:
а) $18a^4 - 21a^3b - 94a^2b^2 - 21ab^3 + 18b^4$;
б) $(x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4$.

XII. Докажите тождества:
а) $(a + b + c)^3 + (b - a - c)^3 + (c - a - b)^3 + (a - b - c)^3 = 24abc$;
б) $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2 = 2(a - d)(a + b + c + d)$.