И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

УРОКИ ГЕОМЕТРИИ

10 КЛАСС

2013

Пособие содержит подробные конспекты уроков по геометрии для 10-ых классов общеобразовательных учреждений. Оно соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту второго поколения, Примерной программе среднего общего образования. Помимо теоретического материала в пособие включены математические диктанты, индивидуальные задания по карточкам, устные упражнения, самостоятельные и контрольные работы, материал для проведения занимательных моментов уроков.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержится учебный материал для проведения уроков по геометрии в 10-х классах средней школы. Оно рассчитано на учебник геометрии Смирновой И.М., Смирнова В.А. для 10-11 общеобразовательных классов (М.: Мнемозина). Вместе с тем оно может быть использовано при обучении по любому другому учебнику геометрии, входящему в Федеральный перечень учебной литературы.

Обучение геометрии по предлагаемому пособию направлено на достижение следующих целей:

1) ***в направлении личностного развития*****:**

– формирование представлений о геометрии как части общечеловеческой культуры, о значимости геометрии в развитии цивилизации и современного общества;

– развитие геометрических представлений, логического мышления, культуры речи, способности к умственному эксперименту;

– формирование у учащихся интеллектуальной честности и объективности, способности к преодолению мыслительных стереотипов, вытекающих из обыденного опыта;

– воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения;

– формирование качеств мышления, необходимых для адаптации в современном информационном обществе;

– развитие интереса к математике;

– развитие математических способностей;

2) ***в метапредметном направлении*****:**

– развитие представлений о геометрии как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения опыта математического моделирования;

– формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности;

3) ***в предметном направлении*****:**

– овладение геометрическими знаниями и умениями, необходимыми для продолжения образования, изучения смежных дисциплин, применения в повседневной жизни;

– создание фундамента для математического развития, формирования механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Содержание пособия разбито на отдельные параграфы. В первых трех представлены особенности преподавания геометрии в условиях модернизации школьного образования; даны два варианта программы изучения учебного материала (с учетом дополнительного необязательного материала и без него) и тематическое планирование.

Далее идут подробные конспекты уроков по основным темам курса стереометрии 10 класса (без дополнительного материала). В пособие, помимо вопросов теории, включены математические диктанты, вопросы для учащихся по теории, индивидуальные задания по карточкам, задачи для самостоятельной работы, устные упражнения, контрольные работы, приводятся решения и ответы к задачам. Конспектам посвящены четвертый и пятый параграфы пособия.

В названном учебнике часть пунктов отмечена звездочкой (*). Это необязательный дополнительный учебный материал для воспитания и развития учащихся. В седьмом параграфе пособия даются конспекты уроков по дополнительным пунктам учебника.

В пособии предлагается материал для проведения индивидуальной работы со старшеклассниками, которые живо интересуются современной наукой и научно-популярным материалом, а также для проведения занимательных моментов уроков (это соответственно параграфы шесть и восемь).

Представленные конспекты и учебные материалы могут быть использованы и использовались при работе в старших классах различной профильной направленности. Например, в гуманитарных классах (Смирнова И.М. Геометрия: Учебник для 10-11 классов гуманитарного профиля обучения. – М.: Мнемозина, 2003; Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия: Учебник для 10-11 классов естественно-научного профиля обучения. - М.: Просвещение, 2001).

§ 1. О СОВРЕМЕННОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

При написании учебников по геометрии, а также пособий методического обеспечения к ним авторы исходили из огромной роли, которую играет геометрия в науке и образовании подрастающего поколения.

На протяжении веков геометрия служила источником развития не только математики, но и других наук. Именно в ней появились первые теоремы и доказательства. Сами законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи способствовали появлению новых научных направлений и, наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов.

Так, задача об измерении длины отрезка привела к открытию Пифагором несоизмеримых отрезков и в дальнейшем к построению действительных чисел.

Задачи об измерении длины окружности, площади круга, объемов шара, пирамиды и др. привели древнегреческих ученых к понятию предела и заложили основы интегрального исчисления.

Геометрические методы изображения пространственных фигур стали фундаментом изобразительного искусства.

Задачи нахождения уравнения касательной к кривой и вычисления площади криволинейной трапеции привели Г. Лейбница и И. Ньютона к созданию дифференциального и интегрального исчислений.

Задача о нахождении орбит движения космических тел была решена с помощью конических сечений.

Задача Л. Эйлера о кенигсбергских мостах положила начало новому направлению геометрии – теории графов.

Теорему Эйлера о числе вершин, ребер и граней выпуклого многогранника историки математики называют первой теоремой топологии.

Современные представления о Вселенной описываются на языке геометрии с помощью понятия многообразия.

Функциональный анализ, один из современных разделов математического анализа, опирается на понятие бесконечномерного линейного пространства, обобщающего понятие евклидова пространства.

Одно из основных понятий современной алгебры – понятие группы, возникло на основе геометрических понятий симметрии и движения. Группы симметрий играют важную роль не только в математике, но и в физике, химии, биологии, кристаллографии и других науках.

В последние десятилетия активно развивается алгебраическая геометрия – раздел математики, изучающий алгебраические структуры геометрическими методами. В частности, решение проблемы Ферма было недавно получено с использованием глубоких геометрических методов.

Разработка методов решения задач оптимального управления стала возможной благодаря развитию геометрических методов и в том числе теории многогранников.

В связи с развитием компьютерной техники, возникло и бурно развивается новое направление геометрии – компьютерная геометрия – раздел математики, в котором для решения геометрических задач используются компьютерные методы. Этими методами решаются многие прикладные задачи, в частности, задачи оптимального управления.

Современная наука и ее приложения немыслимы без геометрии и таких ее современных разделов, как топология, дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, теория графов, компьютерная геометрия и др.

Огромна роль геометрии и в школьном математическом образовании. Известен вклад, который она вносит в развитие логического мышления и пространственного воображения школьников. Отечественной школой накоплен богатый опыт преподавания геометрии. Создана уникальная учебная литература по геометрии таких авторов, как С. Е. Гурьев, А. Ю. Давидов, А. П. Киселев, Н. А. Глаголев, А. И. Фетисов, Н. М. Бескин и многие другие.

Учебник по геометрии А. П. Киселева на протяжении многих десятилетий оставался образцом строгости, четкости и доступности изложения геометрии. Поэтому одним из основных принципов, на которых должно быть построено изучение геометрии, с точки зрения авторов, является *принцип преемственности.* Сохранение традиций отечественной школы изучения геометрии чрезвычайно важно не только для геометрии, но и всего естественно-научного образования подрастающего поколения.

Конечно, учебники геометрии прошлого века уже не вполне отвечают современной структуре и дидактическим требованиям к обучению. В них не предусмотрена дифференциация обучения, недостаточно материала для воспитания и развития учащихся, отсутствуют исторические сведения, материал современного, научно-популярного и прикладного характера.

Наша задача состоит в том, чтобы, опираясь на достигнутый отечественной школой уровень геометрического образования, сделать курс геометрии 10-11 классов современным и интересным, учитывающим склонности и способности учеников, направленным на формирование математической культуры, интеллектуальное развитие личности каждого ученика, его творческих способностей, формирование представлений учащихся о математике, ее месте и роли в современном мире.

В разработанном курсе больше внимания уделяется историческим аспектам геометрии, ее философским и мировоззренческим вопросам. По образному высказыванию Б. В. Гнеденко, «история математики важна не только потому, что она необходима для решения ряда методологических и педагогических проблем. Она важна и сама по себе как памятник человеческому гению, позволившему человечеству пройти великий путь от полного незнания и полного подчинения силам природы до великих замыслов и свершений в познании законов, управляющих внутриатомными процессами и процессами космического масштаба. История науки является тем факелом, который освещает новым поколениям путь дальнейшего развития и передает им священный огонь Прометея, толкающий их на новые открытия, на вечный поиск, ведущий к познанию окружающего нас мира, включая нас самих».

Учащимся предлагаются исторические сведения о Н. И. Лобачевском, центральном проектировании – перспективе, Л. Эйлере, правильных многогранниках – телах Платона, полуправильных многогранниках – телах Архимеда, конических сечениях, объеме пирамиды, Р. Декарте и др.

Опыт работы школы показывает, что, наряду с интересом к вопросам истории и приложений математики, учащиеся старших классов живо интересуются современными и прикладными аспектами математики. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы и научно-популярных телевизионных и радиопередач. Желание узнать о новых идеях, направлениях развития математики – вполне естественное желание для молодого человека, необходимое выпускнику школы для ориентации в современном мире, правильному представлению о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в движении общества вперед.

Хотя необходимость включения в содержание школьного курса математики некоторых современных направлений развития математики и ее приложений не вызывает ни у кого сомнений, данный вопрос остается малоразработанным на уровне конкретных методических материалов.

Этот материал относится к необязательному (в названном учебнике он помечен звездочкой). В него включены следующие вопросы: центральное проектирование и изображение пространственных фигур в центральной проекции, понятие выпуклости и свойства выпуклых многогранников, теорема Л. Эйлера и ее приложения, полуправильные и звездчатые многогранники, применение теории многогранников в кристаллографии, конические сечения и их свойства, понятие ориентируемой поверхности и лист Мебиуса, как пример неориентируемой поверхности и т. д.

Большое значение придается наглядности, которая является одним из дидактических принципов обучения.

С самого начала изучения геометрии вводятся многогранники (параллелепипед, призма, пирамида, правильные многогранники). Это позволяет, с одной стороны, проиллюстрировать на многогранниках свойства параллельности и перпендикулярности, а с другой – постепенно формировать умения учащихся по нахождению геометрических величин, расстояний и углов.

Учащимся предлагаются различные способы изготовления моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора. Моделирование многогранников способствует развитию у школьников пространственных представлений, конструкторских рационализаторских способностей, формированию понятия математической модели, раскрытию прикладных возможностей геометрии; воспитанию эстетических чувств.

Самодельные модели являются средством конкретной наглядности – первой стадии, которая ведет к абстрактной наглядности – чертежу. Модели могут быть использованы учителем для иллюстрации новых понятий, доказательств теорем, решения задач. Красиво сделанные модели являются украшением любого кабинета математики, рабочего уголка школьников.

Развитие пространственных представлений учащихся предполагает умения правильно изображать основные геометрические фигуры и исследовать их взаимное расположение. Именно от этого во многом зависит успешность изучения геометрии. Поэтому много внимания уделяется вопросам изображения пространственных фигур.

Помимо изображения пространственных фигур в параллельной проекции, рассматриваются методы изображения пространственных фигур в ортогональной и центральной проекциях, приводятся примеры таких изображений (изображение прямоугольного параллелепипеда и сферы в ортогональной проекции, изображение куба в центральной проекции и др.).

Включение в курс геометрии разнообразного материала, учитывающего интересы каждого школьника, способствует повышению интереса и желания учащихся заниматься геометрией. Опираясь на этот интерес и желание, можно преодолеть и известные трудности обучения.

§ 2. ПРОГРАММА ИЗУЧЕНИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Вариант I (базовый уровень) – 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант II (профильный уровень) 2 часа в неделю, всего 68 часов за год.

Вариант III (углублённый уровень) 3 часа в неделю, всего 102 часа за год.

10 класс

Параграф учебника	Содержание	Количество часов		
		I	II	III
	Вводная беседа	1	1	2
1	Основные понятия и аксиомы стереометрии	2	2	3
2	Следствия из аксиом стереометрии	2	2	3
3	Пространственные фигуры	2	2	3
4	Моделирование многогранников	2	2	2
	Контрольная работа № 1	1	1	2
5	Параллельность прямых в пространстве	2	2	3
6	Скрещивающиеся прямые	2	2	3
7	Параллельность прямой и плоскости	2	2	3
8	Параллельность двух плоскостей	2	2	3
	Контрольная работа № 2	1	1	2
9	Векторы в пространстве	2	2	2
10	Коллинеарные и компланарные векторы	2	1	2
11	Параллельный перенос	2	1	2
12	Параллельное проектирование	2	2	3
13	Параллельные проекции плоских фигур	2	2	2
14	Изображение пространственных фигур	2	2	3
15	Сечения многогранников	2	2	3
	Контрольная работа № 3	1	1	2
16	Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых	2	2	3
17	Перпендикулярность прямой и плоскости	2	2	3
18	Перпендикуляр и наклонная	2	2	3
19	Угол между прямой и плоскостью	2	2	3
	Контрольная работа № 4	1	1	2
20	Расстояния между точками, прямыми и плоскостями	5	5	6

21	Двугранный угол	2	2	3
22	Перпендикулярность плоскостей	2	2	3
23*	Центральное проектирование. Изображение пространственных фигур в центральной проекции	-	2	3
	Контрольная работа № 5	1	1	2
24	Многогранные углы	2	2	3
25	Выпуклые многогранники	2	2	2
26*	Теорема Эйлера	-	2	3
27	Правильные многогранники	2	2	3
28*	Полуправильные многогранники	-	2	2
29*	Звёздчатые многогранники	-	1	2
30*	Кристаллы – природные многогранники	-	1	2
	Контрольная работа № 6	1	1	2
	Итоговое повторение	8	2	4

§ 3. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Вариант I (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	**Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)**
1. Начала стереометрии (10 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство). Пространственные фигуры (куб, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар). Моделирование многогранников. Развёртка.	Перечислять основные понятия стереометрии. Приводить примеры реальных объектов, идеализацией которых служат основные понятия геометрии. Изображать и моделировать пространственные фигуры.
2. Параллельность в пространстве (24 ч)	
Взаимное расположение прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Параллельность двух плоскостей. Признак параллельности двух плоскостей. Векторы в пространстве. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Коллинеарные и компланарные	Формулировать определения параллельности прямых и плоскостей. Распознавать на моделях и чертежах взаимное расположение прямых и плоскостей. Изображать различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей. Формулировать признаки параллельности прямых и плоскостей. Формулировать определение вектора. Устанавливать равенство, коллинеарность и компланарность векторов. Производить операции сложения векторов и умножения вектора на число. Формулировать определение параллельного переноса. Изображать фигуры в параллельной проекции.

векторы. Параллельный перенос. Параллельное проектирование и его свойства. Параллельные проекции плоских фигур. Изображение пространственных фигур. Сечения многогранников.	Строить сечения многогранников.
3. Перпендикулярность в пространстве (19 ч)	
Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности двух плоскостей.	Формулировать определения угла между прямыми и плоскостями. Находить углы между прямыми и плоскостями. Формулировать определения перпендикулярности прямых и плоскостей. Формулировать признаки перпендикулярности прямых и плоскостей. Применять признаки для установления перпендикулярности прямых и плоскостей. Находить расстояния между точками, прямыми и плоскостями.
4. Многогранники (7 ч)	
Многогранные углы и их свойства. Выпуклые и невыпуклые многогранники. Правильные многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр).	Формулировать определение многогранных углов, распознавать их на моделях и чертежах. Формулировать определение выпуклого многогранника. Распознавать на моделях и чертежах выпуклые и невыпуклые многогранники. Формулировать определение правильного многогранника. Распознавать на моделях и чертежах правильные многогранники.
Итоговое повторение (8 ч)	

Вариант II (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1. Начала стереометрии (10 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные понятия и аксиомы стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство). Пространственные фигуры (куб, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар). Моделирование многогранников. Развёртка.	Перечислять основные понятия и аксиомы стереометрии. Приводить примеры реальных объектов, идеализацией которых служат основные понятия геометрии. Изображать и моделировать пространственные фигуры.
2. Параллельность в пространстве (22 ч)	
Взаимное расположение прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Параллельность двух плоскостей. Признак параллельности двух плоскостей. Векторы в пространстве. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Параллельный перенос. Параллельное проектирование и	Формулировать определения параллельности прямых и плоскостей. Распознавать на моделях и чертежах взаимное расположение прямых и плоскостей. Изображать различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей. Формулировать признаки параллельности прямых и плоскостей. Формулировать определение вектора. Устанавливать равенство, коллинеарность и компланарность векторов. Производить операции сложения векторов и умножения вектора на число. Формулировать определение параллельного переноса. Изображать фигуры в параллельной проекции.

его свойства. Параллельные проекции плоских фигур. Изображение пространственных фигур. Сечения многогранников.	Строить сечения многогранников.
3. Перпендикулярность в пространстве (21 ч)	
Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Ортогональное проектирование. *Площадь ортогональной проекции многоугольника. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности двух плоскостей. *Центральное проектирование. *Изображение пространственных фигур в центральной проекции.	Формулировать определения угла между прямыми и плоскостями. Находить углы между прямыми и плоскостями. Формулировать определения перпендикулярности прямых и плоскостей. Формулировать признаки перпендикулярности прямых и плоскостей. Применять признаки для установления перпендикулярности прямых и плоскостей. *Находить площадь ортогональной проекции многоугольника. Находить расстояния между точками, прямыми и плоскостями. *Распознавать перспективу на изображениях реальных объектов.
4. Многогранники (13 ч)	
Многогранные углы и их свойства. Выпуклые и невыпуклые многогранники. *Теорема Эйлера. Правильные многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр). *Полуправильные и звёздчатые многогранники. *Кристаллы – природные многогранники.	Формулировать определение многогранных углов, распознавать их на моделях и чертежах. Формулировать определение выпуклого многогранника. Распознавать на моделях и чертежах выпуклые и невыпуклые многогранники. Использовать теорему Эйлера для нахождения числа

	вершин, рёбер и граней многогранников. Формулировать определение правильного многогранника. Распознавать на моделях и чертежах правильные многогранники. Иметь представление о полуправильных и звёздчатых многогранниках, о проявлениях формы многогранников в природе в виде кристаллов. Использовать компьютерные программы для изображения многогранников.
Итоговое повторение (2 ч)	

Вариант III (3 ч в неделю, всего 102 ч)

Основное содержание по темам	Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
1. Начала стереометрии (15 ч)	
История возникновения и развития геометрии. Основные понятия и аксиомы стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство). Следствия из аксиом. Пространственные фигуры (куб, параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар). Моделирование многогранников. Развёртка.	Перечислять основные понятия и аксиомы стереометрии. Формулировать и доказывать следствия из аксиом. Приводить примеры реальных объектов, идеализацией которых служат основные понятия геометрии. Изображать и моделировать пространственные фигуры.
2. Параллельность в пространстве (39 ч)	
Взаимное расположение прямых в пространстве. Параллельность прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Признак скрещивающихся прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости. Параллельность прямой и плоскости. Признак параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей. Параллельность двух плоскостей. Признак параллельности двух плоскостей. Векторы в пространстве. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Параллельный перенос. Параллельное проектирование и	Формулировать определения параллельности прямых и плоскостей. Распознавать на моделях и чертежах взаимное расположение прямых и плоскостей. Изображать различные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей. Формулировать и доказывать признаки параллельности прямых и плоскостей. Формулировать определение вектора. Устанавливать равенство, коллинеарность и компланарность векторов. Производить операции сложения векторов и умножения вектора на число. Формулировать определение параллельного переноса. Изображать фигуры в параллельной проекции.

его свойства. Параллельные проекции плоских фигур. Изображение пространственных фигур. Сечения многогранников.	Строить сечения многогранников.
3. Перпендикулярность в пространстве (31 ч)	
Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Ортогональное проектирование. *Площадь ортогональной проекции многоугольника. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей. Признак перпендикулярности двух плоскостей. *Центральное проектирование. *Изображение пространственных фигур в центральной проекции.	Формулировать определения угла между прямыми и плоскостями. Находить углы между прямыми и плоскостями. Формулировать определения перпендикулярности прямых и плоскостей. Формулировать и доказывать признаки перпендикулярности прямых и плоскостей. Применять признаки для установления перпендикулярности прямых и плоскостей. Находить площадь ортогональной проекции многоугольника. Находить расстояния между точками, прямыми и плоскостями. *Распознавать перспективу на изображениях реальных объектов. Выполнять проекты, связанные с изображением пространственных фигур.
4. Многогранники (19 ч)	
Многогранные углы и их свойства. Выпуклые и невыпуклые многогранники. *Теорема Эйлера. Правильные многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр). *Полуправильные и звёздчатые многогранники. *Кристаллы – природные многогранники.	Формулировать определение многогранных углов, распознавать их на моделях и чертежах, доказывать их свойства. Формулировать определение выпуклого многогранника. Устанавливать на моделях и чертежах выпуклые и невыпуклые многогранники.

	Формулировать и доказывать свойства выпуклых многогранников. Формулировать и доказывать теорему Эйлера. Использовать теорему Эйлера для нахождения числа вершин, рёбер и граней многогранников. Формулировать определение правильного многогранника. Распознавать на моделях и чертежах правильные многогранники. Иметь представление о полуправильных и звёздчатых многогранниках, о проявлениях формы многогранников в природе в виде кристаллов. Использовать компьютерные программы для изображения многогранников. Выполнять проекты по исследованию свойств многогранников.
Итоговое повторение (4 ч)	

§ 4. КОСПЕКТЫ УРОКОВ ДЛЯ 10 КЛАССА

4.1. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ

Вводная беседа

Урок 1

Целью этого урока является знакомство учащихся с историей возникновения и развития стереометрии, ее основными понятиями. Учащиеся должны знать, какой раздел геометрии называется стереометрией, откуда произошло это слово, зачем нужно изучать стереометрию.

I. Представление термина «Стереометрия».

Стереометрия или геометрия в пространстве - это раздел геометрии, изучающий положение, форму, размеры и свойства различных пространственных фигур.

Стереометрия - греческое слово. Оно произошло от слов "стерео" - тело и "метрио" - измерять, т. е. буквально стереометрия означает "теломерие".

II. Историческая справка.

Стереометрия, как и планиметрия, возникла и развивалась в связи с потребностями практический деятельности человека. О зарождении геометрии в древнем Египте около 2000 лет до н.э. древнегреческий ученый Геродот (V в. до н.э.) пишет следующее: "Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию".

При строительстве даже самых примитивных сооружений необходимо было рассчитать сколько материала пойдет на постройку, уметь вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так египетские пирамиды, сооруженные за 2, 3 и 4 тысячи лет до н. э. поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие стереометрические положения и расчеты.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времен года, уметь определять свое местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звездами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке - астрономии.

Начиная с VII века до н.э., в древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Все большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI-V вв. до н.э.), названная так в честь своего основателя Пифагора. Учащимся уже известно это имя, в курсе планиметрии они изучали знаменитую теорему Пифагора (которую уместно здесь вспомнить). Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма (рис. 1).

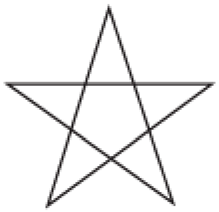


Рис. 1

В переводе на язык математики пентаграмма - правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник, который можно получить из выпуклого правильного пятиугольника путем проведения его диагоналей. Вопрос: Как еще можно получить пентаграмму из правильного пятиугольника?

Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов. Вот, что мы находим у Гете в "Фаусте":

Мефистофель: Нет, трудновато выйти мне теперь,
Тут кое-что мешает мне немного:
Волшебный знак у вашего порога.

Фауст: Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?

Мефистофель: Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, - и я свободно мог вскочить.

Для своих философских теорий пифагорейцы использовали правильные многогранники, формы которых придавали элементам первооснов бытия, а именно: огонь – тетраэдр; земля – гексаэдр (куб); воздух – октаэдр; вода – икосаэдр. Демонстрируем модели всех правильных многогранников (рис. 2, а-г).

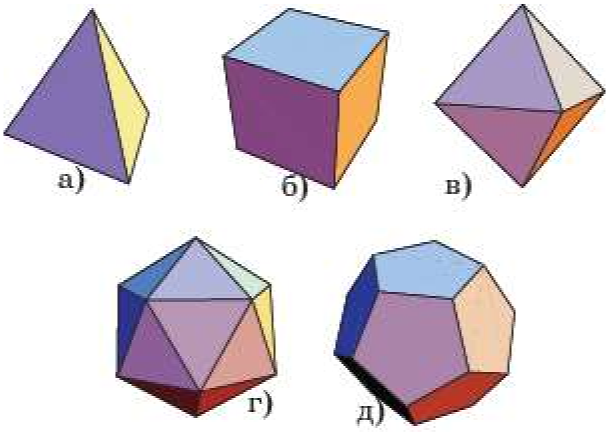


Рис. 2

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение, в них зашифровано число граней. "Эдра" - грань. Видя модель каждого представленного многогранника, учащиеся сами смогут сделать перевод: "Тетра" - четыре; "Гекса" - шесть; "Окта" - восемь; "Икоса" - двадцать.

Обращаем внимание на пятый правильный многогранник - додекаэдр (рис. 2, д). "Додека" - двенадцать. Форму додекаэдра, по мнению древних, имела вся Вселенная, т.е. мы живем внутри небесного свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.

Более поздняя философская школа - Александрийская, интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, который жил около 300 г. до н.э. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьезно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу: “Царь Птоломей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути".

Славу Евклиду создали его "Начала", в которых впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий они оставались основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия в геометрии появились новые методы, в том числе координатный и векторный методы, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развивались новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология и др. Геометрические методы широко используются в других науках: теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и др.

III. Зачем нужно изучать геометрию?

Стереометрия как ни один другой предмет нужна каждому человеку, поскольку именно она дает необходимые пространственные представления, знакомит с разнообразием пространственных форм, законами восприятия и изображения пространственных фигур, что позволяет человеку правильно ориентироваться в окружающем мире. С другой стороны, геометрия дает метод научного познания, способствует развитию мышления, формирует навыки дедуктивных рассуждений. Помимо этого, изучение стереометрии вырабатывает необходимые практические навыки в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, величин углов, площадей, объемов и др.).

Кроме сказанного, стереометрия сама по себе обладает интересным содержанием, так как имеет интересную историю, яркие приложения, она занимательна, изучает красивые объекты. Все это постепенно будет раскрываться и представляться учащимся по мере изучения курса стереометрии.

Демонстрируем 2-3 красивые сложные модели пространственных фигур (например, полуправильный и правильный звездчатый многогранники).

п.1. Основные понятия и аксиомы стереометрии (уроки 2, 3)

Цель – вспомнить основные понятия геометрии, обозначение, запись, научиться изображать простейшие геометрические ситуации, соответствующие схематические чертежи, делать краткие записи с посощью математической символики.

Урок 2

I. Представление основных понятий стереометрии.

Основными понятиями стереометрии являются точки, прямые и плоскости, которые являются идеализациями объектов реального пространства.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т.е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

II. Обозначение и запись основных понятий.

С учащимися необходимо вспомнить обозначение для точек и прямых, которые были приняты в курсе планиметрии. В стереометрии они будут обозначаться точно также. Это можно зафиксировать в специальной таблице.

Таблица 1

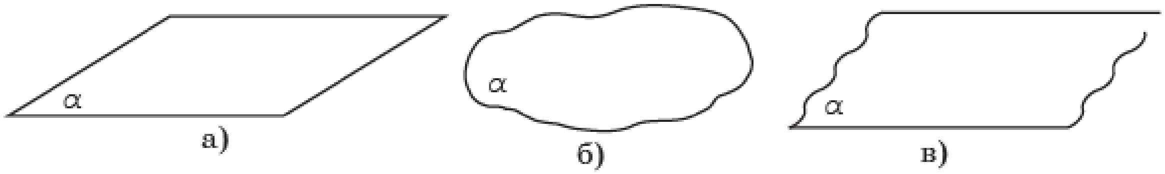
Запись	Чтение
A; B: C …	Точка A; точка B; точка C…
a; b; c …	Прямая a; прямая b; прямая c…
α; β; γ …	Плоскость α; плоскость β; плоскость γ; …
………… ……..	………………………………

Таблицу 1 рекомендуем учащимся поместить на последнюю страницу тетради, так как к ней придется еще не раз возвращаться. Обращаем внимание на то, что точки и прямые обозначаются латинскими соответственно заглавными и строчными буквами, а плоскости - строчными буквами греческого алфавита.

III. Изображение точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Точки и прямые изображаются также, как в курсе планиметрии.

Обращаем внимание учащихся на то, что прямая является бесконечным объектом. Мы всегда изображаем лишь конечный участок прямой - отрезок, который можно продолжать в обе стороны. Плоскость тоже является бесконечным объектом, и мы не в состоянии изобразить всю плоскость, а поэтому будем изображать лишь какой-нибудь конечный ее участок. Существует несколько способов изображения плоскости (рис. 3).



а) б) в)

Рис. 3

В первом случае плоскость изображается параллелограммом. Это не очень удобно, так как такое же изображение будут иметь некоторые четырехугольники: параллелограмм, квадрат, ромб, прямоугольник. Во втором случае плоскость изображается бесформенной фигурой. Таким образом неудобно будет изображать пересекающиеся плоскости. Наиболее предпочтительным является изображение плоскости в третьем случае, где плоскость изображается фигурой, ограниченной двумя параллельными прямыми и двумя произвольными кривыми. При таком изображении устранены недостатки, указанные в первом и втором случаях.

Обсуждаем с учащимися вопрос о том, как точки, прямые и плоскости могут располагаться друг относительно друга.

То, что точка A принадлежит прямой a обозначается $A \in a$; то, что точка C не принадлежит прямой a обозначается $C \notin a$.

Эти обозначения заносим в таблицу 1 и предлагаем учащимся изобразить соответствующие ситуации на рисунке (рис. 4).

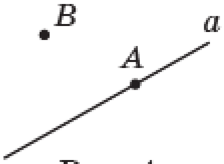


Рис. 4

Таблица 1 (продолжение)

Запись	Чтение
$A \in a$	Точка *A* принадлежит прямой *a*
$B \notin a$	Точка *B* не принадлежит прямой *a*
………… ……..	…………………………………

Аналогично, если точка *A* принадлежит плоскости α, то пишем $A \in \alpha$, если точка *B* не принадлежит плоскости α, то пишем $B \notin \alpha$. Делаем соответствующие записи в таблицу 1 и предлагаем учащимся изобразить соответствующие ситуации на рисунке (рис. 5).

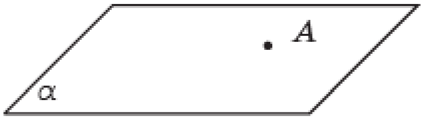


Рис. 5

Таблица 1 (продолжение)

Запись	Чтение
$A \in \alpha$	Точка *A* принадлежит плоскости α
$B \notin \alpha$	Точка *B* не принадлежит плоскости α
………… ……..	…………………………………… ……...

Если прямая *a* лежит в плоскости α, то пишем $a \subset \alpha$, если прямая *b* пересекает плоскость α в точке *A*, то пишем $b \cap \alpha = A$.

Учащимся предлагается модель (рис. 6).

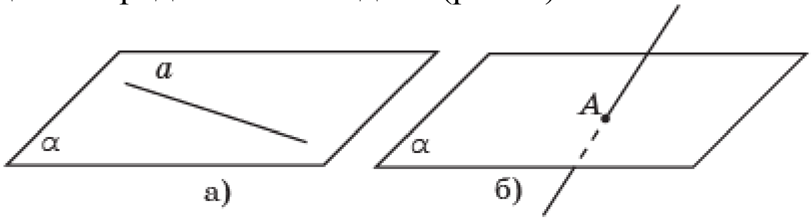


Рис. 6

Нужно изобразить данную ситуацию и сделать соответствующие записи в таблицу 1.

Таблица 1 (продолжение)

Запись	Чтение
$a \subset \alpha$	Прямая *a* лежит в плоскости α
$a \not\subset \alpha$	Прямая *a* не лежит в плоскости α
$b \cap \alpha = A$	Прямая *b* пересекается с плоскостью α в точке *A*

Замечание. Данную модель легко изготовить из куска цветного картона, проткнув его спицей.

Наконец, рассматриваем вопрос о том, как пересекаются две плоскости. Учащимся предлагается модель (рис. 7).

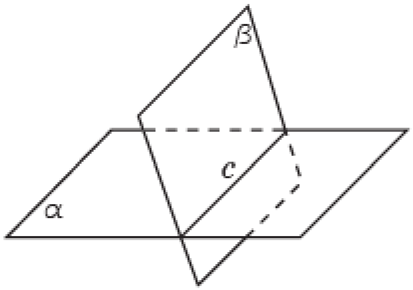


Рис. 7

В результате обсуждения делается вывод, что пересечением двух плоскостей является прямая. Нужно изобразить данную ситуацию и сделать соответствующую запись в таблицу 1.

Таблица 1 (продолжение)

Запись	Чтение
$\alpha \cap \beta = c$	Плоскости α и β пересекаются по прямой *c*

IV. Упражнения.

1. Изобразите точку *M*, принадлежащую прямой *a*, и точки *E*, *F*, ей не принадлежащие. Сделайте соответствующие записи.

2. Изобразите точку *K*, принадлежащую плоскости β и точку *L*, ей не принадлежащую. Сделайте соответствующие записи.

3. Изобразите две прямые *a* и *b*, *a* лежит в плоскости γ, *b* пересекает γ в точке *B*, не принадлежащей прямой *a*. Сделайте соответствующие записи.

Урок 3

I. Вопросы для повторения.

1. Чем отличаются курсы планиметрии и стереометрии?

2. Как переводятся термины "планиметрия" и "стереометрия"?

3. Почему многие геометрические термины имеют древнегреческое происхождение?

4. Какую вы знаете первую философскую школу в Древней Греции?

5. Какие математические открытия связаны с пифагорейской школой? Назовите все пять правильных многогранников. С чем связаны их названия?

6. Назовите основные понятия стереометрии, как они обозначаются?

7. Как могут располагаться друг относительно друга точки, прямые и плоскости?

II. Новый материал - Введение аксиом.

Переходим к введению аксиом. Вспоминаем, что аксиомы геометрии, относящиеся к плоскости, изучались ранее в курсе планиметрии. "Аксиома" в переводе с греческого означает "достойная признания". За аксиомы берутся те факты, которые принимаются без доказательства. Остальные факты доказываются с помощью аксиом и носят названия теорем, следствий, свойств, признаков и т. д.

В стереометрии изучаются свойства не только плоских, но и пространственных фигур. Также как в планиметрии некоторые свойства принимаются без доказательства и называются аксиомами. Помимо аксиом планиметрии, справедливых для плоскостей, мы формулируем аксиомы стереометрии.

Введение каждой аксиомы проводим в следующей последовательности:

1). Разъяснение учителем содержания аксиомы и иллюстрация этого свойства на модели.

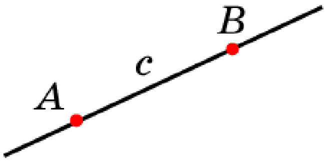
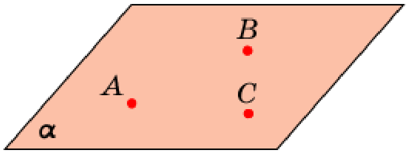
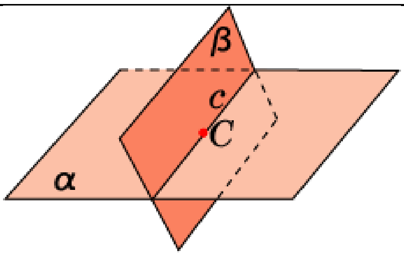
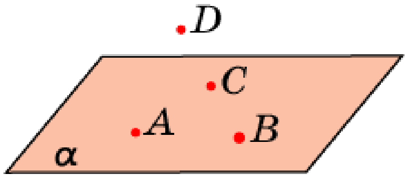
2). Чтение текста аксиомы учащимися (по учебнику, специально приготовленному плакату, через кодоскоп, компьютер и т. п.).

3). Схематический чертеж.

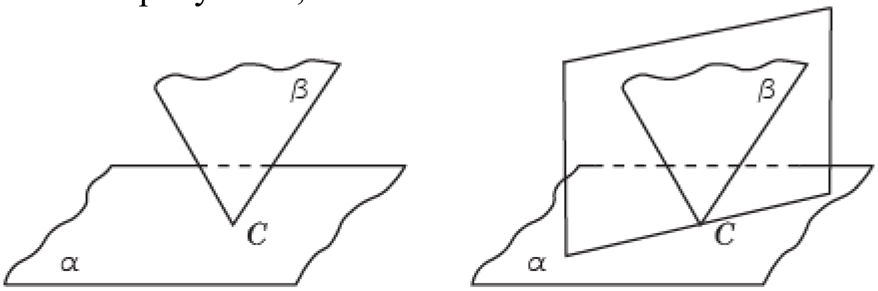
4). Запись содержания аксиомы с помощью символики.

В процессе рассмотрения аксиом с классом заполняем таблицу 2.

Таблица 2. – Аксиомы стереометрии

Аксиома	Чертеж	Запись
A_1		$A \in a$, $B \in a$, a – единственная прямая
A_2		A, B, C не принадлежат одной прямой $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ α – единственная плоскость
A_3		$C \in \alpha, \beta$; $\alpha \cap \beta = c$; $C \in c$
A_4		$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \notin \alpha$
A_5		α – любая плоскость, на ней выполняются все аксиомы планиметрии

При рассмотрении аксиомы A_3 учащимся предлагается модель, изображенная на рисунке 8, а.



а) б)

Рис. 8

После соответствующих рассуждений делается вывод о том, что плоскость β на рисунке 8, а может быть изображена по-другому, например, так как показано на рисунке 8, б, откуда становится ясным, что плоскости α и β пересекаются по прямой, проходящей через точку *C*.

III. Закрепление нового материала.

1. Можно ли сказать, что любые две точки всегда принадлежат одной прямой?

2. Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку? Две общие точки?

3. Сколько общих точек могут иметь две пересекающиеся плоскости?

4. Сделайте схематический чертеж по следующим условиям: а) точки *E* и *F* принадлежат прямой *d*; б) точки *M, N, L* принадлежат плоскостям α и β. Что можно сказать об этих плоскостях? в) Из двух пересекающихся прямых *m* и *n* прямая *m* лежит в плоскости γ, прямая *n* пересекает плоскость γ в точке *K*. Что можно сказать о расположении точки *K*?

Задание на дом

1. Знать основные понятия стереометрии, формулировки аксиом (пункт 1 учебника).

2. Разобрать таблицу 2.

3. Уметь обозначать и изображать основные случаи взаимного расположения точек, прямых и плоскостей.

4. Задачи.

1). Изобразите точки *M*, *N*, *K*. Как они могут быть расположены в пространстве?

2). Могут ли вершины замкнутой ломаной не принадлежать одной плоскости, если она имеет: а) три звена; б) четыре звена?

3). Дана прямая и не принадлежащая ей точка. Как расположены прямые, проходящие через данную точку и пересекающие данную прямую, относительно данной прямой? Ответ обоснуйте.

4). Какое наибольшее число прямых можно провести через 4 точки в пространстве?

Решение. Наибольшее число прямых можно провести, если никакие 3 точки не принадлежат одной прямой. Таким образом, через одну точку можно провести 3 прямые; через 4 точки можно провести $3 \cdot 4 = 12$ (прямых). Учитывая, что при этом каждую прямую подсчитывали дважды, окончательно получаем 6 прямых.

5)*. Каким еще способом (помимо представленного на первом уроке) можно получить пентаграмму из правильного пятиугольника?

Ответ. Продолжить стороны правильного пятиугольника до взаимного пересечения.

(Задания, помеченные *, не являются обязательными).

6)*. Какое наибольшее число прямых можно провести через n точек в пространстве?

Решение. Наибольшее число прямых можно провести, если никакие 3 точки не принадлежат одной прямой. Таким образом, если дано n точек, то через каждую из них можно провести (n-1) прямую. Всего получится $n(n$-1) прямых, но каждая прямая учитывалась при этом дважды. Итак, окончательно получаем $\frac{n(n-1)}{2}$ прямых.

п.2. Следствия из аксиом стереометрии (уроки 4, 5).

Цель – показать применение аксиом стереометрии в доказательствах первых теорем, которые называются следствиями аксиом стереометрии.

Урок 4

I. Опрос учащихся.

Проводится следующим образом: раздаются 8 индивидуальных заданий (один или два варианта) на отдельных карточках (эту работу учащиеся выполняют на своих местах и им разрешается пользоваться своими тетрадями) и двое учеников за первой партой (освобожденной специально для опроса) воспроизводят материал предыдущих уроков.

№ 1. – Основные понятия стереометрии.

№ 2. - Таблица 2 - Аксиомы стереометрии.

Приведем содержание двух вариантов индивидуальных заданий. Они могут оцениваться отметкой или знаками "+", "-", по усмотрению учителя.

Карточка 1

1). Назовите основные понятия стереометрии.

2). Почему они вводятся?

3). Что идеализирует плоскость? Приведите примеры.

4). Изобразите и опишите с помощью математических символов следующую пространственную ситуацию: "Прямая b пересекает плоскость β в точке K. Прямые c и d лежат в плоскости β и пересекаются в точке H".

5). Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку? Ответ обоснуйте.

Карточка 2

1). Как переводится термин "аксиома"?

2). Зачем нужны аксиомы?

3). Что идеализирует прямая в пространстве? Приведите примеры.

4). Изобразите и опишите с помощью символов следующую пространственную ситуацию: "Плоскость β пересекается с плоскостью γ по прямой l. В плоскости β лежит прямая m, которая пересекает прямую l в точке M".

5). Сколько плоскостей проходит через три точки? Ответ обоснуйте.

II. Задание классу.

1. Нарисуйте прямую m. Проведите через нее плоскость β. Сколько таких плоскостей можно провести?

2. Изобразите плоскость α, проходящую через точку *C*, не принадлежащую плоскости β, и пересекающую плоскость β в точках *A* и *B*, и линию пересечения этих плоскостей.

3. Сколько плоскостей можно провести через три точки?

4. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через 4 точки?

Решение. Наибольшее число плоскостей получится, если никакие 4 точки не принадлежат одной плоскости, и никакие 3 точки не принадлежат одной прямой (они определяют единственную плоскость). Обозначив точки 1, 2, 3, 4, получим плоскости, которые определяются следующими точками: (1,2,3); (1,2,4); (2,3,4); (3,1,4). Таким образом, получили 4 плоскости.

III. Новый материал.

Вопросы для учащихся:

- Итак, сколько плоскостей можно провести через одну прямую?

При ответе на этот вопрос учащимся демонстрируется модель, изображенная на рисунке 9.

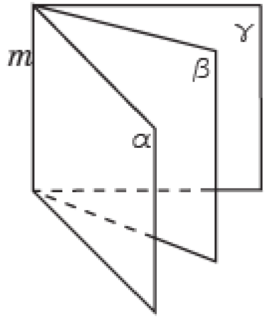


Рис. 9

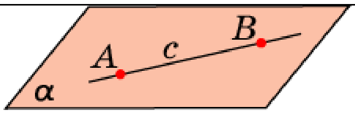
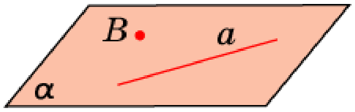
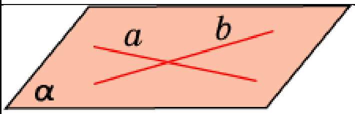
- Точки *A* и *B* принадлежат плоскости α. Как расположена прямая *AB* относительно плоскости α?

- Возьмем прямую и не принадлежащую ей точку. Можно через них провести плоскость? Почему? Как вы думаете, сколько таких плоскостей можно провести?

- Даны две пересекающиеся прямые. Можно ли через них провести плоскость? Будет ли она единственной?

После ответов на эти вопросы мы говорим, что эти свойства являются следствиями из аксиом стереометрии и заполняем следующую таблицу.

Таблица 3. – Следствия из аксиом стереометрии

Следствие	Чертеж	Формулировка
C_1		Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то она лежит в этой плоскости
C_2		Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость
C_3		Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну

Доказательства следствий – первых теорем стереометрии, представляем с подробной записью (дано, требуется доказать, доказательство) и с помощью схемы, где показаны все логические шаги доказательств. Учащимся будет удобно и легко воспроизводить отдельные этапы доказательств по данной схеме.

Схема 1. – Аксиомы и их следствия (рис. 10).

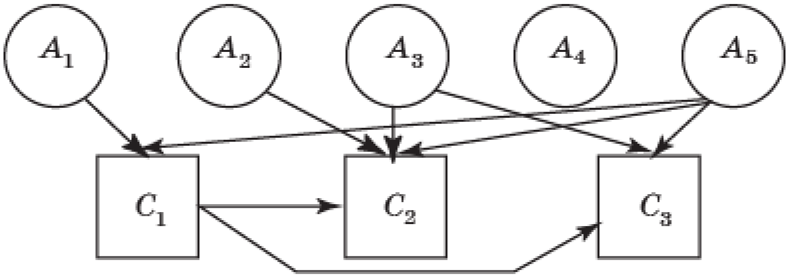


Рис. 10

IV. Закрепление нового материала.

1. Прямая и плоскость параллелограмма *ABCD* имеют две общие точки *K* и *L*. Как расположена точка *M* прямой *KL* относительно плоскости параллелограмма *ABCD* (рис. 11)?

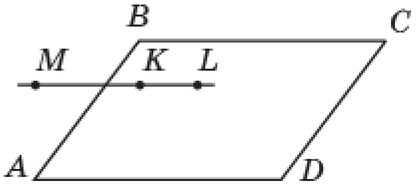


Рис. 11

2. Даны прямая и точка, не принадлежащая этой прямой. Лежат ли прямые, проходящие через эту точку и пересекающие данную прямую, в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

3. Верно ли утверждение, что любая прямая, пересекающая каждую из двух пересекающихся прямых, лежит в плоскости этих прямых?

Урок 5

I. Устная работа.

Устная работа заняла достойное место в начальных и младших 5-6 классах в преподавании математики, значительно меньше ей уделяется внимания в 7-9 классах, и практически полностью она игнорируется в старших классах. Вместе с тем некоторые дидактические функции устной работы, как-то: подготовка учащихся к работе на уроке, в частности, к восприятию нового материала; систематическое повторение пройденного; развитие учащихся, - остаются не менее актуальными и для старшеклассников. Кроме этого, устная работа активизирует учебную деятельность учащихся. Это связано как с содержанием, так и с формой проведения. Содержание устной работы включает в себя упражнения четырех типов:

1. Упражнения на закрепление и отработку текущего материала.
2. Упражнения на повторение.
3. Упражнения с элементами творчества. Это может быть, например, задача с новой для учащихся пространственной ситуацией или элементами подготовки к восприятию нового материала.
4. Упражнения развивающего, занимательного характера.

При планировании устной работы необходимо иметь в виду, что ее продолжительность не должна превышать 10 минут (оптимально 7-8 минут). Начинать устную работу желательно с легкого задания, чтобы не подавить инициативу ребят, постепенно повышая трудность задач и вводя элементы творчества. Устная работа – это хорошее активное мобилизующее, настраивающее на работу начало урока. Для стимулирования активности и инициативы учащихся, возможности себя проявить мы ввели следующую систему оценок во время устной работы: за каждый ответ учащийся получает "+", "-" или "±", "∓". Если учащийся (может быть за несколько уроков) набрал пять представленных знаков, например, все "+", то он получает оценку - "5", за четыре "+" и один "-" - оценку "4" и т.д., учитываются все возможные комбинации сочетания четырех знаков. Личный опыт работы показывает, что такая система оценок с успехом принимается учащимися и нравится им. Причины этого заключаются в том, что она позволяет, довольно, гибко реагировать на ответы, ребята могут проявить себя, сами добиться хорошей оценки.

В устной работе особенно ярко проявляется еще один аспект современного обучения - возможности для формирования и развития диалоговой культуры учащихся.

Упражнения.

1). Можно ли сказать, что любые две точки всегда принадлежат одной прямой?

2). Можно ли тоже самое сказать о трех точках?

3). Как пересекаются две плоскости?

4). Задача по модели (рис. 12). Плоскостям каких фигур принадлежит точка *A* плоскости α?

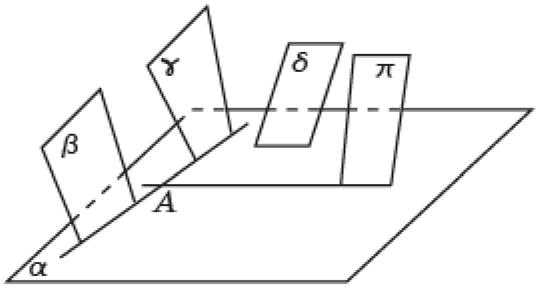


Рис. 12

5). Когда открывают крышку рояля, то ее подпирают в одной точке. Какое свойство плоскости при этом применяется?

Ответ. Через прямую и не принадлежащую ей точку можно провести единственную плоскость (следствие из аксиом стереометрии – C_2).

6). Может ли стул на трех ножках, имеющих разную длину, не качаться?

Ответ. Да может, его концы принадлежат одной плоскости (аксиома 2 – A_2).

II. Решение задач.

1. Лежит ли параллелограмм *ABCD* в плоскости α, если ей принадлежат две его вершины *A* и *C*?

Решение. Не обязательно. В данной плоскости может лежать только диагональ *AC* параллелограмма, а вершины *B* и *D* могут не принадлежать плоскости α и находиться по разные сторолны от нее, т.е. принадлежать разным полупространствам относительно данной плоскости.

2. Изобразите следующую геометрическую ситуацию: три точки *K*, *L* и *M*, не принадлежащие одной прямой, принадлежат одной плоскости β. Прямая *a* пересекает стороны *KL* и *ML* треугольника *KLM* и не лежит в плоскости β.

Решение. Прямая *a* пересекает плоскость β в точке *L* – вершине треугольника *KLM* (рис. 13).

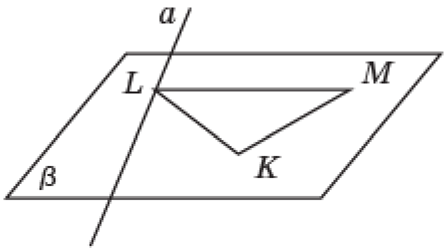


Рис. 13

III. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1. Определите взаимное расположение прямых, если им принадлежат точки *A* и *B*.

2. Изобразите следующую геометрическую ситуацию: прямые *m* и *n* пересекаются в точке *O* и определяют плоскость γ. Прямая *k* пересекает обе данные прямые и не лежит в их плоскости.

3*. Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через 7 точек.

Решение. Наибольшее число прямых получится, если никакие три точки не принадлежат одной прямой. Следовательно, всего получится $\frac{7\cdot6}{2}$=21 (прямая).

Вариант 2

1. Определите взаимное расположение двух плоскостей, если им принадлежат точки *A* и *B*.

2. Лежит ли в плоскости β прямоугольник *ABCD*, если ей принадлежат точки *C* и *D*?

3*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 7 лучей, выходящих из одной точки.

Решение. Наибольшее число плоскостей получится, если никакие три луча не лежат в одной плоскостей. Следовательно, всего получится $\frac{5\cdot4}{2}$=10 (плоскостей).

IV. Занимательный момент.

На своих уроках часто последние 5-7 минут мы посвящаем занимательному материалу, не связанному с изучением текущей темы, особенно если проводим сдвоенные уроки. Это материал для развития мышления учащихся, их сообразительности, находчивости, смекалки, инициативы и других очень важных личностных качеств, необходимых в жизни каждого человека. Например, на первых уроках по стереометрии мы обычно предлагаем задачи с плоскими фигурами. Ребята лучше пока ориентируются в планиметрии, нужно поддержать в них эту уверенность и постепенно переносить ее на стереометрию. Например, можно рассмотреть с учащимися простейшие задачи на разрезание плоских фигур, начав с одной из увлекательнейших тем, связанных с равновеликостью и равносоставленностью фигур. Материал для занимательных моментов уроков дан в отдельном параграфе 8 настоящей работы.

Задание на дом

1. Разобрать таблицу 3 и схему 3. Уметь их воспроизвести (пункт 2 учебника).

2. Решить задачи.

1). Дано: $\alpha\cap\beta=c$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, $a\cap b=C$.

Доказать: $C\in c$.

2). Даны отрезки *EF*, *FG*, *GH* и *EH*. Докажите, что все они лежат в одной плоскости, если отрезки *EG* и *FH* пересекаются в точке *O*.

Решение. Пересекающиеся прямые *EG* и *FH* определяют плоскость (следствие 3 из аксиом стереометрии – C_3), назовем ее α. Тогда точки *E*, *F*, *G*, *H* принадлежат α, значит, прямые *EF*, *FG*, *GH*, *EH*, а тем более одноименные отрезки, лежащие на них, лежат в плоскости α (следствие 1 из аксиом стереометрии – C_1).

3). Даны три плоскости. В каждой плоскости лежит по две прямых. Сколько всего прямых?

Ответ. От 3 до 6.

4)*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 5, 6, ..., *n* точек, не принадлежащих одной прямой.

Решение. Наибольшее число плоскостей получится, если никакие 4 точки не принадлежат одной плоскости, и никакие три точки не принадлежат одной прямой. Рассмотрим случай с 5 точками. Первую точку можно выбрать 5 способами, тогда вторую точку можно выбрать 4 способами. Через выбранные две точки можно провести всего $\frac{5\cdot4}{2}$=10 (прямых). Третью точку можно выбрать 3 способами. Число прямых, проходящих через три точки, будет равно $\frac{10\cdot3}{3}$=10. Это число определяет искомое количество плоскостей.

Для 6 точек поступаем аналогично и получаем 20 плоскостей.

Теперь возьмем *n* точек. Как и в случае с 5 точками, первую точку можно взять *n* способами, вторую (*n*-1) способом. Число прямых, проходящих через них, равно $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Третью точку можно выбрать (n-2) способами. Тогда число прямых, проходящих через эти три точки, равно: $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$, что и определяет наибольшее количество плоскостей, которые можно провести через n точек.

п. 3. Пространственные фигуры (урок 6)

Цель – познакомить учащихся с основными пространственными фигурами, в том числе многогранниками.

Основными целями взаимосвязанного изучения начал стереометрии и многогранников являются следующие:

а) хорошая иллюстрация изучаемых свойств;

б) практическое применение изучаемого материала;

в) изучение свойств самих многогранников.

Урок 6

I. Математический диктант.

Проводится на листочках с копиркой.

Вариант 1

1. Через две точки пространства проходит…
2. Через две пересекающиеся прямые проходит…
3. Если в двух плоскостях лежит один и тот же ромб, то…
4. Наибольшее число прямых, которые можно провести через 4 точки, равно…

Вариант 2

1. Через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит…
2. Через прямую и не принадлежащую ей точку, проходит…
3. Если в двух плоскостях лежит одна и та же окружность, то…
4. Наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 4 точки, равно…

II. Проверка математического диктанта.

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые экземпляры работы, а копии оставляют себе для проверки, которую удобно организовать через кодоскоп.

III. Новый материал - Основные пространственные фигуры.

Среди пространственных фигур выделяются многогранники – тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются диагоналями многогранника.

Примерами многогранников являются следующие.

Куб – многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Параллелепипед – многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов.

Параллелепипед, у которого все грани – прямоугольники, называется прямоугольным.

Призма – многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, имеющих общие стороны с каждым из оснований и называемых боковыми гранями призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называются боковыми ребрами.

Призма, боковыми гранями которой являются прямоугольники, называется прямой. В противном случае призма называется наклонной.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется правильной.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях – соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Пирамида – многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых боковыми гранями пирамиды. Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды. Ребра, сходящиеся в вершине пирамиды, называются боковыми ребрами.

Пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые ребра которой равны, называется правильной.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. в зависимости от того, какие многоугольники лежат в их основаниях – соответственно треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д.

Среди пространственных фигур, не являющихся многогранниками, отметим сферу и шар.

Сфера – фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на данное расстояние, называемое радиусом.

Шар – фигура, состоящая из всех точек пространства, удаленных от данной точки, называемой центром, на расстояние, не превосходящее данное, называемое радиусом.

Сфера с тем же центром и того же радиуса, что и данный шар, называется поверхностью шара.

Примерами пространственных фигур являются также знакомые учащимся цилиндр и конус.

Учащимся демонстрируются модели и рисунки представленных фигур. В качестве упражнения по закреплению рассмотренного материала предлагается подсчитать для перечисленных выше многогранников количество вершин, ребер и граней.

В дальнейшем мы рассмотрим и другие пространственные фигуры, в частности, правильные, полуправильные и звездчатые многогранники.

Многогранники обозначаются перечислением их вершин. Например, куб или параллелепипед обозначаются $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (или $A\ldots D_1$), где $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ - противоположные грани. Аналогично треугольная пирамида с вершиной в точке S и основанием ABC обозначается $SABC$.

Учащимся предлагается сделать обозначения для пирамиды, в основании которой лежит четырехугольник; для треугольной призмы и т. д.

Формы многих многогранников, которые изучаются в школе, придумал не сам человек, их создала природа в виде кристаллов. Кристаллы - природные многогранники. Многие свойства кристаллов, которые учащиеся изучали на уроках физики и химии, объясняются их геометрическим строением. Поэтому свойства многогранников используются в кристаллографии.

Примеры кристаллов с их демонстрацией:

- Кристалл горного хрусталя напоминает оточенный с двух сторон карандаш, т.е. форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды.

- Исландский шпат имеет форму косого параллелепипеда.

- Пирит чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба или даже усеченного октаэдра.

IV. Упражнения.

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите и запишите линии пересечения плоскостей следующих граней: а) $ABCD$ и AA_1D_1D; б) DCC_1D_1 и $A_1B_1C_1D_1$; в) $ABCD$ и плоскости AA_1C_1**.** Каким граням принадлежат точки A и C_1?

2. Найдите число диагоналей: а) 4-угольной призмы; б) 5-угольной пирамиды.

Решение. а) Из каждой вершины 4-угольной призмы можно провести только одну диагональ. Учитывая, что каждая диагональ подсчитывается дважды, получим $\frac{8\cdot1}{2}$=4 (диагонали); б) у пирамид нет диагоналей, таким образом ответ – 0.

3*. Докажите, что у любого многогранника число граней с нечетным числом ребер четно.

Решение. Пусть $Г_н$ – число граней с нечетным числом ребер. Если бы $Г_н=2n+1$ (т.е. число нечетное), то общее число ребер в этих гранях было бы нечетным. Общее число ребер в остальных гранях четно. Следовательно, общее число ребер во всех гранях было бы нечетным, а оно должно быть четно.

Задание на дом

1. Знать основные пространственные фигуры, какие из них называются многогранниками; примеры многогранников (п. 3 учебника).

2. Решить следующие задачи:

1). Даны куб $A\ldots D_1$ и точки K на ребре BB_1 и L на ребре CC_1. Причем $CL=LC_1$, $BK:KB_1=2:1$. Изобразите куб и точки пересечения прямой KL с плоскостями граней куба. Сделайте соответствующие записи.

2). Определите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г): а) 5-угольной призмы; б) 7-угольной пирамиды; в) n-угольной призмы; г) n-угольной пирамиды.

Ответ. а) В=10, Р=15, Г=7; б) В=8, Р=14, Г=8; в) В=$2n$, Р=$3n$, Г=$n+2$; г) В=$n+1$, Р=$2n$, Г=$n+1$.

3). Найдите число диагоналей: а) 5-угольной призмы; б) :-угольной призмы; в) n-угольной призмы.

Решение. Из каждой вершины n-угольной призмы можно провести (n-3). Учитывая, что каждую диагональ подсчитывают дважды, общее число диагоналей будет равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Таким образом, ответы: а) 5; б) 9 диагоналей.

3). Все грани многогранника являются четырехугольниками, и в каждой вершине сходится по три ребра. Найдите число вершин (В) и граней (Г) данного многогранника, если он имеет 12 ребер. Определите его вид и нарисуйте.

Решение. Г·4=2·Р, по условию Р=12, значит, Г=6. Аналогично В·3=2·Р, откуда, В=8. Данным многогранником является любая четырехугольная призма, в частности, куб.

3*. Докажите, что у любого многогранника число вершин, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

Решение. Пусть $В_н$ – число вершин, в которых сходится нечетное число ребер. Если бы $В_н=2n+1$ (т. е. число нечетное), то общее число ребер в этих вершинах было бы нечетным. Общее число ребер в остальных вершинах четно. Следовательно, общее число ребер во всех вершинах было бы нечетным, а оно должно быть четно.

п. 4. Изготовление моделей многогранников (уроки 7, 8)

Цель – научить учащихся делать модели некоторых многогранников из разверток и геометрического конструктора.

I. Модели многогранников из разверток.

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется разверткой многогранника. Например, на рисунке 14 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.

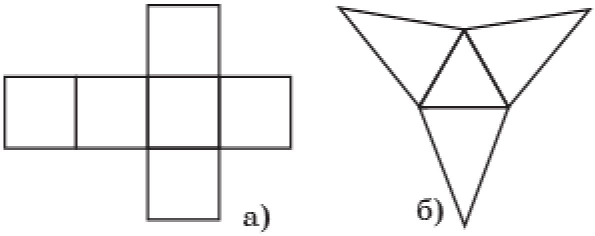


Рис. 14

Ясно, что, имея многогранник, всегда можно построить его развертку. Труднее выяснить вопрос, можно ли, задав на плоскости набор многоугольников, быть уверенным в том, что задана развертка многогранника.

Задача. Какие из изображенных на рисунке 15 фигур являются развертками куба?

Ответ. Рисунки 15, в), д), ж).

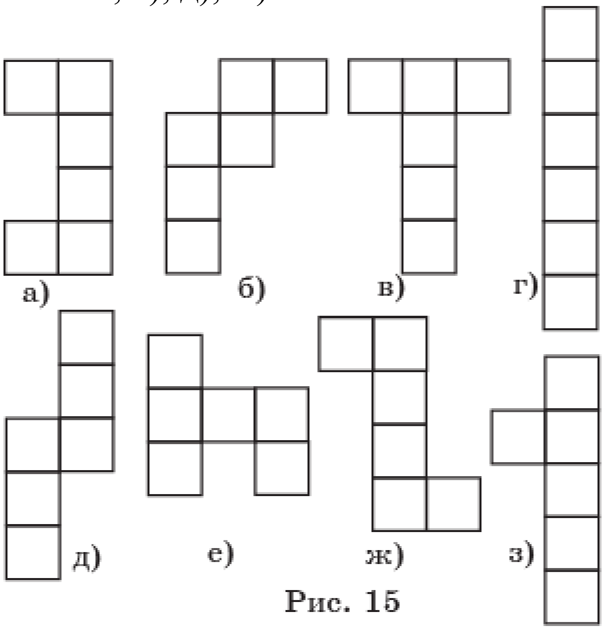


Рис. 15

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка.

При этом выделяются следующие основные этапы:

1). Начертить развертку многогранника с клапанами для склеивания.

2). Вырезать развертку.

3). Согнуть ее по линиям сгиба, предварительно проведя по ним аккуратно лезвием или ножницами.

4). Склеить модель.

5). Можно произвести окантовку ребер или окрашивание граней, наклейку на грани многогранника тонкой цветной бумаги и т.п.

II. Геометрический конструктор.

Помимо изготовления моделей многогранников из разверток, существует другой, более “быстрый” способ моделирования с помощью геометрического конструктора, который состоит из следующих компонентов:

а) многоугольников - граней будущих многогранников, сделанных из плотного материала, у которых обрезаны уголки и сделаны отгибающиеся клапаны (рис. 16);

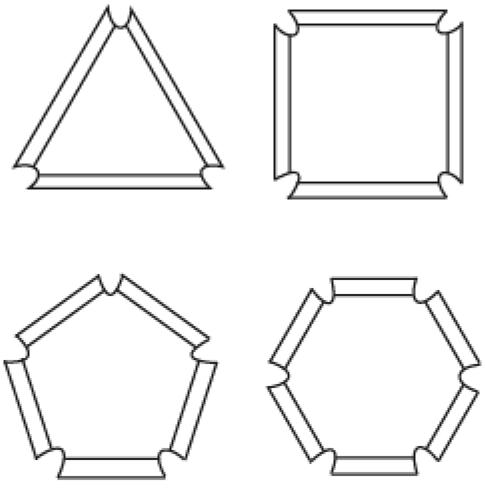


Рис. 16

б) резиновых колечек - основной крепежной детали конструктора (их можно нарезать, например, из велосипедной камеры, чтобы было одинаковое натяжение).

Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того, чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, и обрезают углы многоугольников.

При таком способе изготовления модели многогранников получаются не такие красивые и прочные, как клееные, но их просто сделать, к тому же модель можно разобрать и использовать ее детали в других моделях.

Грани хорошо иметь разных цветов. Удобно для каждого типа выбирать свою окраску. В связи с этим интересной представляется задача окраски граней многогранников таким образом, чтобы число цветов было минимальным и соседние грани имели разный цвет. Например, тетраэдр можно окрасить в 4 цвета, все его грани должны иметь разную окраску; треугольную призму – тоже можно окрасить в 4 цвета, три цвета на боковые грани и один, четвертый, на основания; параллелепипед окрашивается в три цвета, одним цветом красятся противоположные грани и т. д.

Задание на дом

1. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и тетраэдра.

2. Сделайте конструктор, состоящий из правильных треугольников, четырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с одинаковыми сторонами. Изготовьте с помощью этого конструктора какие-нибудь модели многогранников.

3. Сколько цветов потребуется для минимальной окраски граней правильных многогранников?

Ответ. Тетраэдр – 4 цвета; октаэдр – 2 цвета; гексаэдр (куб) – 3 цвета; додекаэдр – 4 цвета; икосаэдр – 5 цветов.

Урок 9

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Три вершины *ABC* параллелограмма *ABCD* принадлежат одной плоскости α. Будет ли четвертая вершина *D* принадлежать этой плоскости? Ответ поясните.

2. Четырехугольник *ABCD* лежит в плоскости α, а плоскость четырехугольника *BCEF* не совпадает с плоскостью α. По какой прямой пересекаются плоскости: а) *ACD* и *BCE*; б) *CEF* и *AEF*?

3. Дана прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, проходящие через эту точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

4. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные тройки из четырех точек.

5*. Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через различные пары из пяти точек.

Вариант 2

1. Две вершины *A* и *B* квадрата *ABCD* и точка *O* – точка пересечения его диагоналей принадлежат плоскости β. Совпадает ли плоскость квадрата с плоскостью β. Ответ поясните.

2. Плоскости четырехугольников *ABCD* и *BCEF* не совпадают. Найдите прямую по которой пересекаются плоскости: а) *BDC* и *BEC*; б) *AED* и *ABF*.

3. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие эти прямые и не проходящие через точку их пересечения, лежат в одной плоскости.

4. Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через различные пары из четырех точек.

5*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные тройки из пяти точек.

4.2. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 7. Параллельность прямых в пространстве (уроки 10, 11)

Цель - изучение одного из основных соотношений между прямыми в пространстве - соотношения параллельности. Учащиеся должны знать определения параллельных прямых, уметь находить параллельные прямые на рисунках и моделях многогранников.

Урок 10

I. Анализ контрольной работы № 1.

II. Устная работа.

- Сколько прямых можно провести через две точки?

- Сколько точек нужно задать, чтобы провести плоскость?

- Как расположены две плоскости, если в них лежит один и тот же треугольник?

- Среди выставленных на столе моделей многогранников укажите правильную призму и правильную пирамиду. Ответ обоснуйте.

- Как расположены в кубе $A\ldots D_1$ прямые AB и BB_1; A_1C_1 и B_1D_1; BC и AD?

III. Новый материал. - Определение параллельности двух прямых.

Сначала вспоминаем определение параллельных прямых, известное учащимся из курса планиметрии, а затем даем определение параллельных прямых в пространстве (Объяснения сопровождаем демонстрацией на каркасной модели куба).

Определение. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если: 1) они лежат в одной плоскости и 2) они не имеют общих точек (рис. 17).

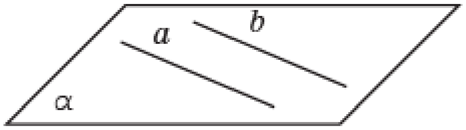


Рис. 17

Два отрезка параллельны, если они лежат на параллельных прямых.

Вопросы:

1). Как на плоскости через точку, не принадлежащую прямой, лежащей в той же плоскости, провести прямую, параллельную данной?

Ответ. Из данной точки нужно опустить на данную прямую перпендикуляр и через данную точку провести к нему перпендикулярную прямую. Тогда полученная прямая будет искомой, так как, согласно признаку параллельности прямых на плоскости, данная прямая и построенная будут параллельны.

2). Сколько таких прямых на плоскости можно провести?

Ответ. Одну, согласно аксиоме параллельных.

3). Можно ли в пространстве через точку, не принадлежащую прямой, провести прямую, параллельную данной?

Ответ. Да, можно. Для этого достаточно через данные точку и прямую провести плоскость (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2) и поступить, как в первом случае.

Разбираем с учащимися теорему о том, что через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Теорема. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство. Действительно, пусть точка A не принадлежит прямой b. Проведем через эту прямую и точку A плоскость α (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). Эта плоскость единственна. В плоскости α через точку A проходит единственная прямая, назовем ее a, параллельная прямой b. Она является искомой прямой.

IV. Закрепление нового материала.

1. Дан куб $A...D_1$. Запишите 4 пары: а) пересекающихся прямых; б) параллельных прямых.

2. Если прямая a пересекает плоскость α, и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также пересекает плоскость α.

Решение. Действительно, проведем через прямые a и b плоскость β (рис. 18).

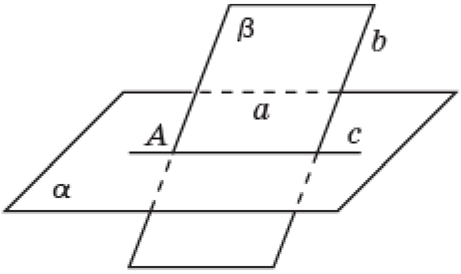


Рис. 18

Она пересечет плоскость α по прямой c. По условию, прямые a и c пересекаются. По свойствам параллельных прямых на плоскости, должны пересекаться и прямые b и c. Следовательно, прямая b пересекает плоскость α.

3. Докажите, что прямая, пересекающая две параллельные прямые, лежит в плоскости этих прямых.

Решение. Пусть даны две параллельные прямые a, b и прямая d, пересекающая их соответственно в точках A, B. Тогда прямая d имеет в плоскости данных параллельных прямых две точки (A, B). Следовательно, прямая d лежит в этой плоскости (следствие 1 из аксиом стереометрии – C_1).

Урок 11

I. Индивидуальные задания.

Вариант 1

1). Какой многогранник называется параллелепипедом?

2). Что идеализирует прямая?

3). Дан куб $A...D_1$. Найти линию пересечения плоскостей граней BB_1C_1C и DD_1C_1C. Сделать соответствующую запись.

4). Докажите, что через прямую k и не принадлежащую ей точку H можно провести плоскость.

5). Сколько плоскостей можно провести через одну прямую? Почему?

Вариант 2

1). Какой многогранник называется пирамидой?

2). Что идеализирует плоскость?

3). Дан куб $A...D_1$. Найти линию пересечения граней AA_1B_1B и BB_1C_1C. Сделать необходимые записи.

4). В каком случае через точки A, B и C можно провести плоскость? Ответ поясните.

5). Сколько плоскостей можно провести через две точки? Почему?

II. Задание классу.

1. В каких пирамидах есть параллельные ребра?

Решение. Пирамиды, в основаниях которых лежат многоугольники с параллельными сторонами, например, параллелограмм, прямоугольник, трапеция, правильный многоугольник с четным числом сторон.

2. Дан отрезок AB, A принадлежит плоскости α, B не принадлежит плоскости α. Точка C принадлежит отрезку AB; $BB_1 \| CC_1$, причем точки B_1, C_1 принадлежат плоскости α. Изобразите данную геометрическую ситуацию и найдите CC_1, если BB_1=24 см и AC:CB=2:1.

Решение. Данная геометрическая ситуация изображена на рисунке 19.

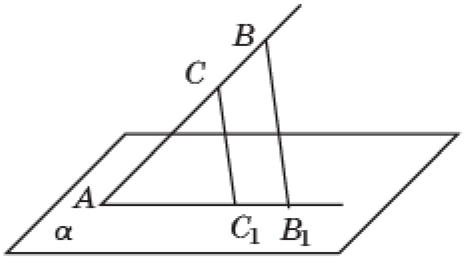


Рис. 19

Точки A, C_1, B_1 принадлежат одной прямой – линии пересечения плоскостей α и ABB_1. Треугольники ACC_1 и ABB_1 подобны (по углам), значит, ABB_1. $AC:AB=CC_1:BB_1$. Из условия задачи следует, что $AC:AB=2:3$, т.е. $CC_1:BB_1=2:3$, отсюда $CC_1 = \frac{2\cdot BB_1}{3}$=16 (см).

3. Докажите, что через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

Решение. Пусть через две параллельные прямые проходят две плоскости. Тогда они должны пересекаться по двум параллельным прямым. Это противоречит аксиоме 3 (A_3). Таким образом, через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.

4*. Докажите, что если каждые две из нескольких данных прямых пересекаются, то все эти прямые либо проходят через одну точку, либо лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть a и b – две из данных прямых. Они пересекаются, по условию, в некоторой точке A. Все остальные прямые или проходят через точку A, или есть прямая c, не проходящая через A. Во втором случае прямая c, по условию, должна пересекаться с прямыми a и b. Следовательно, прямые a, b и c лежат в одной плоскости α. Если теперь d – какая-либо из остальных данных прямых, то она пересекается с прямыми a, b, c и, следовательно, лежит в плоскости α.

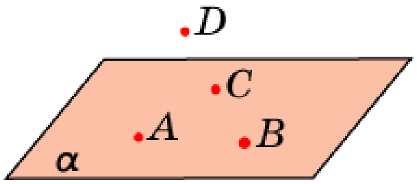
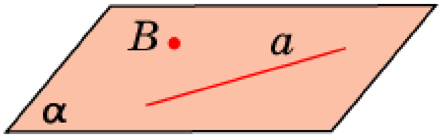
III. Способы задания плоскости.

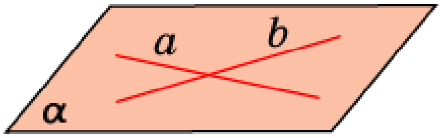
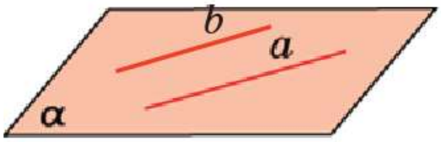
Вывешиваем плакаты с таблицами 2 и 3.

Вопрос классу: "Как можно задать плоскость?"

После обсуждения ответа на него заполняем таблицу.

Таблица 4. - Способы задания плоскости

Способ	Чертеж
1. Тремя точками, не принадлежащими одной прямой (A_2).	
2. Прямой и не принадлежащей ей точкой (C_2).	

3. Двумя пересекающимся прямым (C_3).	
4. Двумя параллельными прямыми (определение).	

IV. Занимательный момент.

(См. материал параграфа 8).

Задание на дом

1. Выучить определения параллельных прямых, формулировку и доказательство теоремы, таблицу 4 (пункт 5 учебника).

2. Решить задачи.

1). Для параллелепипеда, правильных 6-угольных призмы и пирамиды запишите пары параллельных ребер.

2). Докажите, что параллельные прямые a, b, c, каждая из которых пересекается с прямой d, лежат в одной плоскости.

Решение. Пусть прямая d пересекает данные прямые соответственно в точках A, B, C. Тогда d лежит в плоскости прямых a и b (две точки, A и B, прямой d принадлежат плоскости, следствие 1 из аксиом стереометрии). Аналогично прямая d лежит в плоскости прямых b, c. Но через пересекающиеся прямые d и b проходит единственная плоскость. Следовательно, плоскости, в которых лежат прямые d, a, b и d, b, c совпадают. Таким образом, данные прямые a, b, c лежат в одной плоскости.

3). Какое наибольшее число плоскостей можно провести через: а) 3; б) 4; в) 5; г) n параллельных между собой прямых?

Решение. Наибольшее число плоскостей получится, если никакие три прямые не лежат в одной плоскости. Тогда через каждые две прямые можно провести плоскость. Следовательно, через каждую прямую, в случае n прямых можно провести (n-1) прямую и всего получится $n(n\text{-}1)$ прямая, при этом каждая прямая считалась дважды. Таким образом, можно всего провести: а) 3; б) 6; в) 10; г) $\frac{n(n-1)}{2}$ плоскостей.

3*. В плоскости α даны прямая a и точка A. Через точку B, не принадлежащую плоскости α, проведите плоскость β таким образом, чтобы линия пересечения этих плоскостей проходила через точку *A* и была перпендикулярна прямой *a*.

Решение. В плоскости α через точку *A* проводим прямую *b*, перпендикулярную прямой *a*. Через *b* и не принадлежащую ей точку *B* (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2) проводим искомую плоскость β.

п. 6. Скрещивающиеся прямые (уроки 12, 13)

Цель – ввести понятие скрещивающихся прямых; дать классификацию взаимного расположения двух прямых в пространстве; доказать признак скрещивающихся прямых; показать его применение при решении задач.

Урок 12

I. Опрос учащихся.

1. Опрос по теории.

№ 1. – Следствия из аксиом стереометрии (таблица 3).

№ 2. – Определение параллельных прямых. Запись параллельных ребер в кубе $A\ldots D_1$.

№ 3. – Способы задания плоскости (таблица 4).

№ 4. – Доказать, что через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

2. Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). В правильной 5-угольной призме $A\ldots E_1$ запишите все ребра, параллельные ребру AB.

2). В правильной 8-угольной пирамиде $SA_1\ldots A_8$ запишите пары параллельных ребер.

3). Найдите число диагоналей в параллелепипеде.

Ответ. 4.

II. Устная работа.

1. Сколько вершин, ребер и граней имеет: а) 5-угольная призма; б) 9-угольная пирамида?

2. Существует ли пирамида, имеющая 20 ребер? Если да, как она называется?

3. Существует ли призма, имеющая 22 ребра? Если да, как она называется?

4. Даны две параллельные прямые и точка, не принадлежащая им. Как установить, принадлежит ли эта точка плоскости данных прямых?

5. Каково должно быть взаимное расположение трех прямых, чтобы через них можно было провести плоскость?

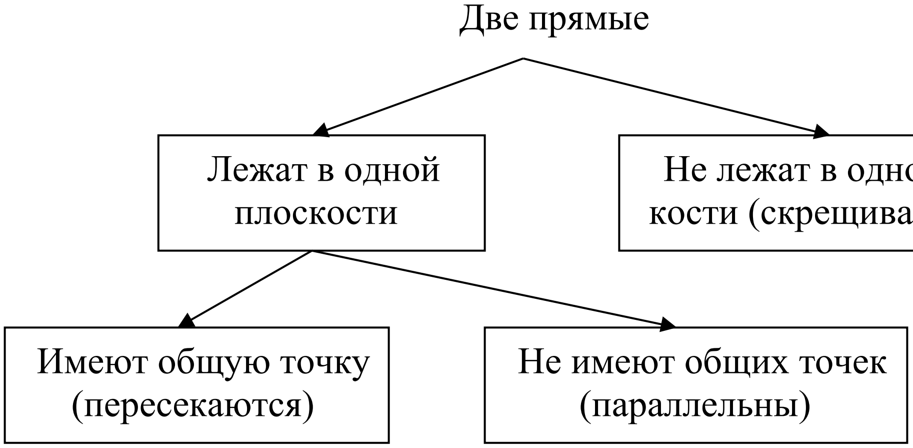
6. Назовите ребра куба $A\ldots D_1$, которые не параллельны и не пересекаются с ребром AD.

III. Новый материал – Определение скрещивающихся прямых.

Вопрос: «Как могут располагаться относительно друг друга две прямые в пространстве?»

После обсуждения с учащимися ответа на поставленный вопрос составляем следующую схему взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Схема 2. – Взаимное расположение двух прямых в пространстве



Определение. Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Два отрезка будем называть скрещивающимися, если они лежат на скрещивающихся прямых.

Рассмотрим такую геометрическую ситуацию: прямая *a* лежит в плоскости α, прямая *b* пересекает плоскость α в точке *B*, причем точка *B* не принадлежит прямой *a*. Изобразите данную ситуацию. Будут ли прямые *a* и *b* лежать в одной плоскости?

Теперь докажем теорему – признак скрещивающихся прямых, которая дает достаточное условие того, что две прямые скрещиваются.

Теорема. (Признак скрещивающихся прямых). Если одна прямая лежит в данной плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти две прямые скрещиваются.

Доказательство. Пусть прямая *a* лежит в плоскости α, а прямая *b* пересекает плоскость α в точке *B*, не принадлежащей прямой *a* (рис. 20). Если бы прямые *a* и *b* лежали в одной плоскости, то в этой плоскости лежали бы прямая *a* и ей принадлежала бы точка *B*. Поскольку через прямую и точку вне этой прямой проходит единственная плоскость, то этой плоскостью будет плоскость α. Но тогда прямая *b* лежала бы в плоскости α, что противоречит условию. Следовательно, *a* и *b* не лежат в одной плоскости, т. е. они скрещиваются.

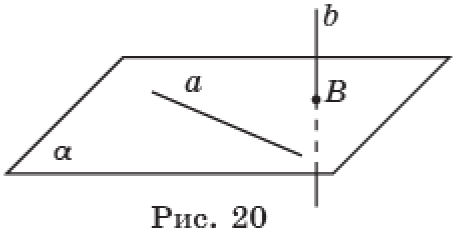


Рис. 20

IV. Закрепление нового материала.

1. Дан куб $A...D_1$. Запишите 4 пары скрещивающихся прямых.

2. Вопрос: "Какие две прямые в пространстве являются непараллельными?"

Ответ: "Две прямые в пространстве являются непараллельными, если они пересекаются или скрещиваются".

(Обратить внимание учащихся на данный вопрос. Как правило, они дают неправильный ответ, а именно: "Прямые непараллельны, если они пересекаются").

3. В тетраэдре *ABCD* укажите пары скрещивающихся ребер.

4*. Каково взаимное расположение диагоналей пространственного четырехугольника (четырехугольник, четыре вершины которого не принадлежат одной плоскости).

Урок 13

I. Опрос учащихся по теории.

№ 1. – Способы задания плоскости (таблица 4).

№ 2. – Теорема о том, что через точку пространства, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.

№ 3. – Взаимное расположение прямых в пространстве (схема 2).

№ 4. – Признак скрещивающихся прямых.

II. Задание классу.

1. Докажите, что если две прямые содержат 4 точки, не принадлежащие одной плоскости, то они скрещиваются.

Решение. Данные прямые не могут пересекаться или быть параллельными, так как в этих случаях 4 данные точки принадлежали бы одной плоскости. Значит, данные прямые скрещиваются.

2. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Точка C принадлежит прямой a. Докажите, что плоскость, проходящая через b и C, пересекает a.

Решение. Из условия следует, что точка C не принадлежит прямой b. Через b и C проведем плоскость α (следствие 2 из аксиом стереометрии C_2). Поскольку $C\in\alpha$, $a\cap\alpha=C$. При этом $a\not\subset\alpha$, так как a скрещивается с b.

3*. Проведите прямую, пересекающую одну из двух скрещивающихся прямых и параллельную другой прямой.

Решение. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Возьмем какую-нибудь точку B на прямой b. Через прямую a и точку B проведем плоскость α. В плоскости α через точку B проведем прямую c, параллельную прямой a. Прямая c будет искомой, так как она пересекает одну из скрещивающихся прямых и параллельна другой.

III. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1. Пирамида имеет: а) 5 вершин; б) 10 ребер. Определите ее вид.

2. В кубе $A\dots D_1$ запишите ребра, которые скрещиваются с диагональю AC_1.

3*. Найдите геометрическое место прямых, параллельных данной прямой и пересекающих другую прямую, пересекающуюся с первой.

Ответ. Плоскость данных пересекающихся прямых.

Вариант 2

1. Призма имеет: а) 10 вершин; б) 18 ребер. Определите ее вид.

2. В кубе $A\ldots D_1$ запишите ребра, которые скрещиваются с диагональю B_1D.

3*. Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

Ответ. Плоскость данных параллельных прямых.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить теорию: определение скрещивающихся прямых, схему взаимного расположения двух прямых в пространстве (схема 2), формулировку и доказательство теоремы – признака скрещивающихся прямых (п. 6 учебника).

2. Решить задачи:

1). Запишите пары скрещивающихся ребер пятиугольной пирамиды *SABCD*.

2). Дана плоскость γ и лежащая в ней прямая g. Возьмите на данной плоскости точку *H* и проведите через нее прямую h, скрещивающуюся с прямой g. Сделайте рисунок и соответствующее обоснование.

3). Через данную точку (*M*) проведите прямую (*m*), скрещивающуюся с данной прямой (*a*).

Решение. Если $M \in a$, то решения нет, так как любая прямая, проходящая через *M*, будет пересекаться с прямой *a*. Итак, $M \notin a$. Проведем через *M* и *a* плоскость α (следствие 2 из аксиом стереометрии C_2). Через *M* проведем прямую *m*, которая не лежала бы в плоскости α; *m* – искомая прямая, так как она проходит через точку *M* и скрещивается с прямой *a* (по признаку скрещивающихся прямых).

3*. Сколько пар скрещивающихся прямых определяются: а) 4; б) 5; в) 6 точками, никакие 4 из которых не принадлежат одной плоскости?

Решение. Из условия следует, что никакие три точки не принадлежат одной прямой. Таким образом, выбираем 3 точки, они не определяют ни одной пары скрещивающихся прямых. Берем четвертую точку, она определит 3 пары искомых прямых. Берем пятую точку. С выбранными точками она тоже определит 3 пары скрещивающихся прямых. При этом тройки точек можно выбрать в этом случае следующим образом, где числами 1,…,5 обозначены точки: (1,2,3); (1,2,4); (1,2,5); (2,3,4); (2,4,5); (3,4,5).

п. 7. Параллельность прямой и плоскости (уроки 14, 15, 16)

Цель – ввести понятие параллельности прямой и плоскости, познакомить учащихся с классификацией взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве, они должны уметь формулировать и доказывать признак параллельности прямой и плоскости и научиться применять его при решении задач.

Урок 14

I. Математический диктант.

Проводится на листочках с копиркой.

Вариант 1

1). Две прямые в пространстве называются параллельными, если…

2). В тетраэдре *ABCD* скрещивающимися ребрами являются следующие...

3). Если в плоскостях β и γ, лежит один и тот же параллелограмм *MNKL*, то …

4). Призма имеет 12 граней, значит, в ее основании лежит …

5). Пирамида имеет 18 вершин, значит, она имеет … ребер.

Вариант 2

1). Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если …

2). В правильном октаэдре *FABCDF'* параллельными ребрами являются следующие …

3). Если в двух плоскостях β и δ, лежит один и то же правильный шестиугольник *ABCDEF*, то …

4). Пирамида имеет 12 граней, значит, в ее основании лежит …

5). Призма имеет 18 ребер, значит, она имеет … вершин.

После окончания математического диктанта учащиеся сдают первые листки, а копии работы оставляют себе для проверки.

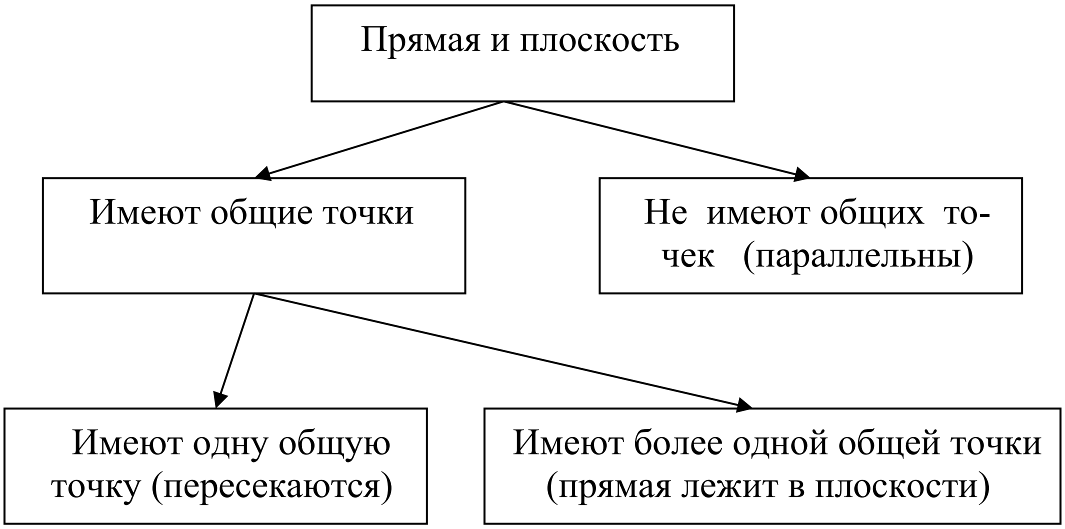
II. Проверка математического диктанта.

Проводится по вариантам через кодоскоп.

III. Новый материал - Параллельность прямой и плоскости.

Прежде всего с учащимися обсуждается вопрос о различных вариантах взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве. Демонстрируются соответствующие модели, в частности, на каркасной модели куба. Делается вывод о том, что прямая может иметь с плоскостью одну общую точку, более одной общей точки, не иметь общих точек. Составляется схема взаимного расположения прямой и плоскости.

Схема 3. - Взаимное расположение прямой и плоскости



Дается следующее определение.

Определение. Прямая называется параллельной плоскости, если она не имеет с ней ни одной общей точки.

Будем говорить, что ребро куба многогранника параллельно его грани, если оно лежит на прямой, параллельной плоскости грани.

Учащимся предлагается на каркасной модели куба показать пары параллельных прямой и плоскости.

IV. Закрепление нового материала.

1. В кубе $A \ldots D_1$ запишите грани, которые параллельны ребру AA_1.

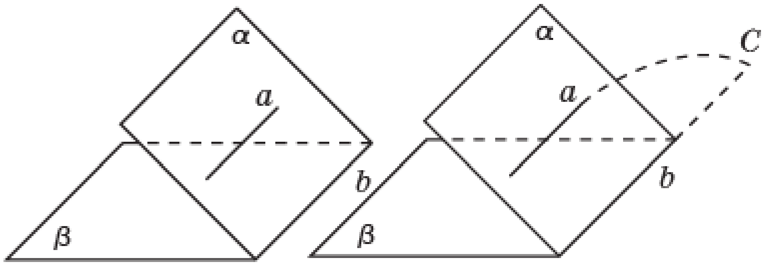
2. Как могут располагаться относительно друг друга две прямые, параллельные одной и той же плоскости?

Ответ. Могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающимися.

3. Учащимся предлагается задача, в которой рассматривается свойство, связывающее понятие параллельности прямой и плоскости с понятием параллельности двух прямых в пространстве.

Задача (Признак параллельности двух прямых). Докажите, что если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то их линия пересечения параллельна первой прямой.

Решение. Пусть плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и прямая b является линией пересечения этих плоскостей (рис. 21, а). Покажем, что прямые a и b параллельны.



а) Рис. 21 б)

Действительно, они лежат в одной плоскости α. Кроме этого, прямая *b* лежит в плоскости β, а прямая *a* не пересекается с этой плоскостью. Следовательно, прямая *a* и подавно не пересекается с прямой *b*. Таким образом, прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости и не пересекаются. Значит, они параллельны.

Желательно рассмотреть с учащимися другой способ доказательства этого свойства, который называется доказательством от противного и заключается в том, что, предположив, что утверждение не выполняется, приходят к противоречию (рис. 21, б).

Итак, предположим, что прямые *a* и *b* не параллельны. Тогда, поскольку они лежат в одной плоскости - плоскости α, они должны пересекаться. Но тогда прямая *a* пересекается с плоскостью β, что противоречит условию.

Урок 15

I. Устная работа.

- Всегда ли две непересекающиеся прямые в пространстве параллельны?

- Как через точку A вне прямой a провести прямую, параллельную a?

- В каком случае верно утверждение, что прямая лежит в плоскости?

- Верно ли утверждение (дается через кодоскоп): "Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не лежат в одной плоскости"? Нет ли в нем лишних условий?

- Как может располагаться прямая относительно плоскости?

- Верно ли утверждение о том, что прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?

II. Новый материал - Признак параллельности прямой и плоскости.

Вопрос: "Как прямая может быть расположена относительно плоскости?"

Задача. (Необходимое условие параллельности прямой и плоскости). Дана прямая, параллельная некоторой плоскости. Докажите, что в этой плоскости найдется прямая, параллельная данной прямой.

Решение. Пусть прямая a параллельна плоскости α. Докажем, что в плоскости α найдется прямая b, параллельная прямой a. Для этого в плоскости α возьмем произвольную точку B (рис. 22) и проведем плоскость β через прямую a и не принадлежащую ей точку B (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). $\alpha \cap \beta = b$ и $B \in b$. Прямые a и b не пересекаются, так как $a \| \alpha$ (по условию). Значит, $b \| a$.

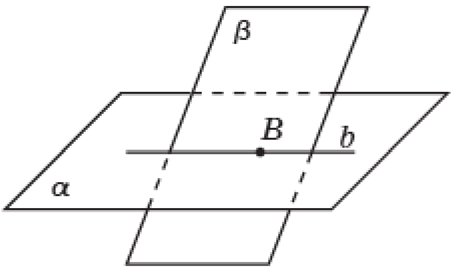


Рис. 22

Итак, если прямая параллельна плоскости, то в плоскости найдется прямая, ей параллельная. А если мы хотим выяснить, будет ли данная прямая параллельна данной плоскости? Условие параллельности прямой и плоскости дает следующая теорема, которая называется признаком (достаточным условием) параллельности прямой и плоскости.

Теорема I. (Признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то эта прямая параллельна самой плоскости.

Доказательство. Пусть прямая *a* параллельна прямой *b*, лежащей в плоскости β (рис. 23). Покажем, что прямая *a* параллельна плоскости β.

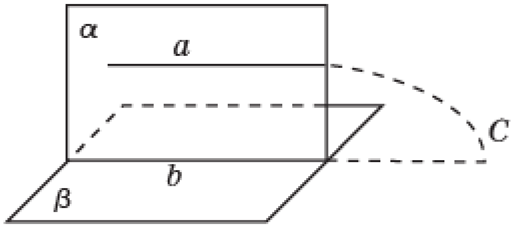


Рис. 23

Проведем доказательство методом от противного. Рассмотрим плоскость α, проходящую через прямые *a* и *b* (*a*||*b*, по условию), и предположим, что прямая *a* пересекает плоскость β. Тогда их точка пересечения принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, т. е. принадлежит линии их пересечения - прямой *b*. Следовательно, прямые *a* и *b* пересекаются, что противоречит условию. Таким образом, *a*|| β.

III. Закрепление нового материала.

1. Используя признак параллельности прямой и плоскости, в кубе и правильном октаэдре укажите параллельные прямые и плоскости, проходящие через их вершины.

2. Дан параллелограмм *ABCD*. Через сторону *AB* проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью параллелограмма. Докажите, что *CD*|| α.

3. Прямые *a* и *b* параллельны. Через прямую *a* проведите плоскость, параллельную прямой *b*. Сколько таких плоскостей можно провести?

Решение. Любая плоскость, проходящая через прямую *a* и отличная от плоскости, определяемой параллельными прямыми *a* и *b*, будет параллельна прямой *b*, в силу признака параллельности прямой и плоскости.

Урок 16

I. Опрос учащихся.

1. Теория.

№ 1. – Взаимное расположение двух прямых в пространстве (схема 2).

№ 2. – Взаимное расположение прямой и плоскости (схема 3).

№ 3. – Признак параллельности двух прямых в пространстве (формулировка, доказательство).

№ 4. – Признак параллельности прямой и плоскости (формулировка, доказательство).

2. Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Используя признак параллельности прямой и плоскости, укажите параллельные прямые и плоскости, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы $A \ldots F_1$.

2). Плоскость проходит через середины двух сторон треугольника. Как распожены относительно друг друга третья сторона треугольника и данная плоскость? Ответ обоснуйте.

II. Устная работа.

1. Каково должно быть взаимное расположение трех прямых, чтобы можно было провести плоскость, содержащую все прямые?

Ответ. Плоскость можно провести, если: а) прямые попарно пересекаются и точки пересечения различны; б) прямые пересекаются в одной точке и существует прямая, пересекающая каждую из них; в) две прямые параллельны и третья пересекает их; г) прямые параллельны и существует прямая, пересекающая их.

2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

3. Сформулируйте утверждение, обратное признаку параллельности прямой и плоскости. Верно ли оно?

Ответ. Необходимое условие параллельности прямой и плоскости, доказанный выше, а именно: «Если прямая параллельна плоскости, то в этой плоскости существует прямая, параллельная данной». Утверждение верно.

4. Верно ли утверждение: «Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости»?

Ответ. Нет.

5. Верно ли утверждение: «Прямая параллельна плоскости, если она параллельна прямой, лежащей в этой плоскости»?

Ответ. Нет.

II. Решение задач.

1). Прямые *a* и *b* параллельны. Какое положение может занимать прямая *a* относительно плоскости, проходящей через прямую *b*? Сделайте соответствующие рисунки.

Решение. Прямая *a* может лежать в этой плоскости или быть ей параллельной.

2). Как расположена прямая, параллельная линии пересечения двух плоскостей, относительно каждой из этих плоскостей? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

Решение. Данная прямая параллельна каждой из плоскостей. «Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна линии их пересечения». Утверждение верно.

3). Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, параллельную этой плоскости. Сколько можно построить таких прямых?

Решение. В данной плоскости, назовем ее α, проведем произвольную прямую *a*. Через проведенную прямую *a* и данную точку *B* проведем плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии C_2). В плоскости β через точку *B* проведем прямую *b*, параллельную прямой *a*. Прямая *b* – искомая прямая, она параллельна плоскости α (по признаку параллельности прямой и плоскости). Можно построить бесконечно много таких прямых.

4*). Используя рисунок 24, докажите, что если прямые *a* и *c* параллельны третьей прямой *b*, то они параллельны между собой.

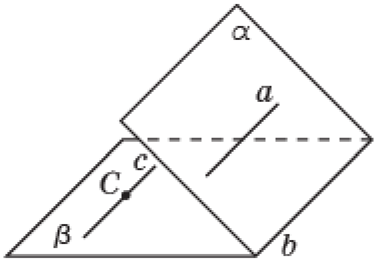


Рис. 24

Решение. Случай, когда прямые лежат в одной плоскости, рассматривался в курсе планиметрии. Здесь мы рассмотрим случай, когда прямые не лежат в одной плоскости. Пусть прямые *a* и *b* лежат в плоскости α, *b* и *c* – в плоскости β. На прямой *c* возьмем произвольную точку *C* и проведем через *C* и прямую *a* плоскость γ. Если γ пересекает β по прямой *c*, то *a* параллельна *c* (по признаку параллельности двух прямых). Допустим, что это не так, т. е. γ пересекает β по прямой *c'*, отличной от *c*. Докажем, что *c'* параллельна *b*. Действительно, прямая *b* параллельна плоскости γ (по признаку параллельности прямой и плоскости, так как *b* параллельна *a*), тогда линия пересечения плоскостей β и γ, т. е. *c'*, будет параллельна *b*. Значит, в плоскости β через точку *C* проходит две прямые *c* и *c'*, параллельные прямой *b*. Это противоречит аксиоме параллельных (через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной). Следовательно, плоскости β и γ пересекаются по прямой *c* и прямая *a* параллельна *c*.

Это свойство называется свойством транзитивности параллельных прямых.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить теорию: определение параллельности прямой и плоскости, классификацию взаимного расположения прямой и плоскости (схема 3); теорему – признак параллельности двух прямых в пространстве, формулировку и доказательство теоремы I – признака параллельности прямой и плоскости (п. 7 учебника).

2. Решить задачи.

1). В правильной шестиугольной пирамиде *SA…F* укажите пары параллельных ребер и граней.

2). Как расположена прямая, лежащая в плоскости, относительно прямой: а) параллельной данной плоскости; б) пересекающей данную плоскость? Сделайте соответствующие рисунки.

Решение. а) Параллельна этой прямой или скрещивается с ней; б) пересекается или скрещивается с данной прямой.

3). Плоскости α и *ABC* не совпадают. В плоскости α лежит основание *AD* трапеции *ABCD*. Найдите взаимное расположение сторон трапеции и плоскости α.

4). Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b*. Через прямую *a* проведите плоскость α, параллельную прямой *b*.

Решение. Возьмем на прямой *a* точку *A*. Через точку *A* и прямую *b* проведем плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). В плоскости β через точку *A* проведем $a'||b$. Через две пересекающиеся прямые *a* и *a*' проведем плоскость α (следствие 3 из аксиом стереометрии – C_3). $\alpha||b$ (по признаку параллельности прямой и плоскости).

3*. Два треугольника *ABC* и *A'B'C'* не лежат в одной плоскости, и их стороны *AB* и *A'B'*; *AC* и *A'C'*; *BC* и *B'C'* пересекаются. Докажите, что три прямые *AA'*, *BB'* и *CC'* проходят через одну точку или попарно параллельны.

Решение. По условию прямые *AB* и *A'B'* пересекаются, значит, они лежат в одной плоскости. Проведем прямые *AA'* и *BB'*. Предположим, что они пересекаются в точке *S*. Поскольку по условию прямые *BC* и *B'C'* пересекаются, они также лежат в одной плоскости. Эта плоскость проходит через точки *B*, *B'*, *C* и, следовательно, совпадает с плоскостью *SBC*. Аналогично прямая *A'C'* лежит в плоскости *SAC*. Значит, точка *C'* принадлежит пересечению плоскостей *SBC* и *SAC*, т. е. принадлежит прямой *SC*. Таким образом, все три прямые *AA'*, *BB'* и *CC'* пересекаются в одной точке *S*.

Прямые *AA'* и *BB'* могут быть параллельны. В этом случае плоскость *BB'C*, в которой лежат прямые *BC* и *B'C'* будет параллельна прямой *AA'* (по признаку параллельности прямой и плоскости: $AA'\|BB'$). Плоскость *AA'C* пересекается с плоскостью *BB'C* по прямой *CC'*, которая будет параллельна *AA'*. Таким образом, все три прямые *AA'*, *BB'* и *CC'* будут параллельны.

п. 8. Параллельность двух плоскостей (уроки 17, 18, 19)

Цель - сформировать понятие параллельности двух плоскостей. Учащиеся должны знать определение параллельности двух плоскостей, классификацию взаимного расположения двух плоскостей, уметь формулировать и доказывать признак параллельности двух плоскостей, а также свойство, связывающее понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Урок 17

I. Устная работа.

1). Какие прямая и плоскость называются параллельными?

2). Верно ли утверждение: "Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости?

3). Дан правильный шестиугольник *ABCDEF*, плоскость которого не совпадает с плоскостью α. Сторона *AF* лежит в плоскости α. Как расположены относительно друг друга стороны данного шестиугольника и плоскость α? Почему?

4). Прямая *a* параллельна прямой *b* - линии пересечения плоскостей α и β. Как располагается прямая *a* относительно этих плоскостей? Почему?

5). Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

6). По рисунку (рисунок 23 из урока 15) воспроизведите доказательство теоремы I - признака параллельности прямой и плоскости.

II. Опрос учащихся.

Восьми ученикам предлагаются индивидуальные задания (на карточках), которые они выполняют на своих местах.

Карточка 1

1. Докажите, что в кубе $A...D_1$ ребро *BD* параллельно грани $A_1B_1C_1D_1$.

2. Сторона *AC* треугольника *ABC* лежит в плоскости α. Вершина *B* не принадлежит этой плоскости. Как расположена прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *BC*, относительно плоскости α? Почему?

Решение. Прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *BC* треугольника *ABC* будет параллельна основанию *AC*, как средняя линия треугольника и, следовательно, по признаку параллельности прямой и плоскости, параллельна плоскости α.

3*. Можно ли построить плоскость, проходящую через данную прямую и параллельную другой данной прямой? Ответ обоснуйте.

Решение. Если данные прямые пересекаются, то нельзя. Если они скрещиваются, то для построения требуемой плоскости достаточно на данной прямой, назовем ее a, взять произвольную точку A и в плоскости, определяемой этой точкой и другой прямой b, через точку A провести прямую c, параллельную прямой b. Плоскость, определяемая пересекающимися прямыми a и c, будет проходить через данную прямую a и быть параллельной прямой b. Если исходные прямые параллельны, то искомых плоскостей можно провести бесконечно много. Для построения таких плоскостей проведем плоскость через заданные параллельные прямые a и b. Возьмем какую-нибудь точку B, не принадлежащую этой плоскости. Через прямую b и точку B проведем плоскость. Она и будет искомой плоскостью, проходящей через прямую b и параллельную прямой a.

Карточка 2

1. Покажите, что в кубе $A...D_1$ диагональ A_1C_1 параллельна грани $ABCD$.

2. Через основание AD трапеции $ABCD$ проведена плоскость α. Основание BC не лежит в плоскости α. Как расположена прямая, проходящая через середины сторон AB и CD, относительно плоскости α? Почему?

Решение. Прямая, проходящая через середины сторон AB и CD трапеции $ABCD$, будет параллельна основанию AD, как средняя линия. Следовательно эта прямая, по признаку параллельности прямой и плоскости, будет параллельна плоскости α.

3*. Задача 3* из карточки 1.

Два ученика вызываются за первую парту для опроса по теории. Первый воспроизводит схему 3 - "Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве" и определение параллельности прямой и плоскости. Второй ученик воспроизводит доказательство теоремы I - признака параллельности прямой и плоскости.

Классу предлагаются следующие задачи (условия даются сразу для всех задач, в том числе и необязательной со звездочкой, чтобы учащиеся видели перспективу своей работы и трудились в своем индивидуальном темпе):

1). Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, параллельную этой плоскости.

Решение. Точка $A \notin \alpha$ (рис. 25).

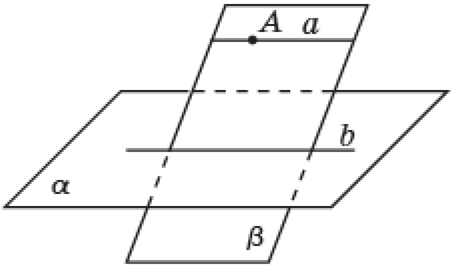


Рис. 25

В плоскости α возьмем произвольную прямую *b*. Через точку *A* и прямую *b* проведем плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии – С$_2$). В плоскости β через точку *A* проведем прямую *a*, параллельную прямой *b*. Прямая *a* будет параллельна плоскости α (по признаку параллельности прямой и плоскости).

2). Дана плоскость и параллельная ей прямая. Через точку, взятую на плоскости, проведите в этой плоскости прямую, параллельную данной прямой.

Решение. Пусть $a||\alpha$. В плоскости α возьмем точку *B*. Через точку *B* и прямую *a* проведем плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). $\alpha\cap\beta=b$, $B\notin b$. $a||b$, так как в противном случае *a* будет пересекаться с плоскостью α, что будет противоречить условию.

3*. Покажите, что если прямая *a* пересекает плоскость α, и прямая *b* параллельна прямой *a*, то прямая *b* также пересекает плоскость α.

Решение. Проведем плоскость β через данные параллельные прямые. Линия пересечения плоскостей α и β, назовем ее прямой *c*, проходит через точку *A* пересечения прямой *a* с плоскостью α. Прямая *c* в плоскости β пересекается с прямой *a*. Следовательно, она должна пересекаться и с параллельной ей прямой *b* в некоторой точке *B*. Эта точка *B* и будет искомой точкой пересечения прямой *b* и плоскости α.

Для решения первых двух обязательных задач к доске вызываются два ученика. Класс работает вместе с первым, а второй решает свою задачу самостоятельно. Если к моменту решения первой задачи, он справился со своей задачей, классу предлагается проверить и прокомментировать его решение. Для выставления оценки за работу у доски ученикам, кроме решения задач, даются дополнительные вопросы, соответственно следующие:

1. Определение скрещивающихся прямых.
2. Определение прямой, параллельной плоскости.

Замечание. Дополнительные вопросы отвечающим у доски могут задавать сами учащиеся.

После решения классных задач сдаются все индивидуальные задания.

III. Новый материал - Параллельность двух плоскостей.

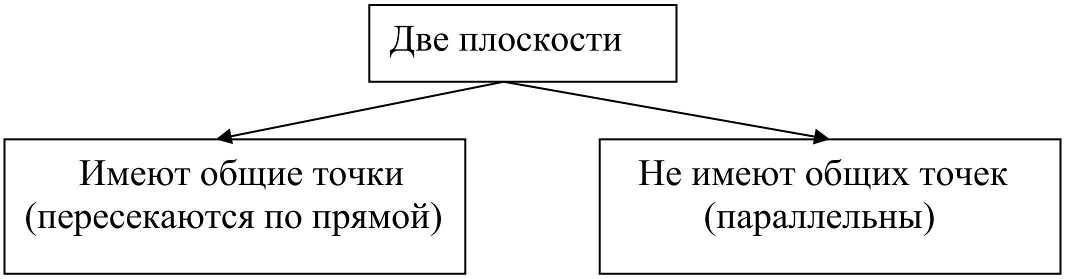
Сначала с учащимися обсуждается вопрос о различных расположениях двух плоскостей относительно друг друга.

Согласно аксиоме 3 (A_3), если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой. Отсюда следует, что две плоскости либо пересекаются по прямой, либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки.

Определение. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если они не пересекаются.

Составляется схема взаимного расположения двух плоскостей.

Схема 4 - Взаимное расположение двух плоскостей



Рассматривается свойство, связывающее понятие параллельности двух плоскостей с понятием параллельности двух прямых.

Теорема. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Доказательство. Пусть параллельные плоскости α и β пересечены

плоскостью γ, a, b - линии пересечения этих плоскостей с плоскостью γ. Покажем, что прямые a и b параллельны. Действительно, они лежат в одной плоскости - плоскости γ. Кроме этого, они лежат в не пересекающихся плоскостях, следовательно, и подавно, не пересекаются. Значит, они параллельны.

IV. Закрепление нового материала.

1. Какие две плоскости называются не параллельными?
2. Докажите приведенное выше свойство методом от противного.

3*. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть прямая *c* пересекает плоскость α в точке *A* и плоскость α параллельна плоскости β. Покажем, что прямая *c* пересекает плоскость β. Для этого в плоскости β возьмем какую-нибудь точку *B* и проведем плоскость γ через эту точку и прямую *c* (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). По доказанному выше свойству, эта плоскость пересекает плоскости α и β по параллельным прямым, пусть *a* и *b* соответственно. Прямая *c* в плоскости γ пересекает прямую *a* в точке *A*. Следовательно, она пересечет и параллельную ей прямую *b*. Так как прямая *b* лежит в плоскости β, то прямая *c* будет пересекаться с плоскостью β.

Урок 18

I. Устная работа.

1). Какие две прямые называются параллельными? Какие две плоскости называются параллельными?

2). Прямая *a* параллельна прямой *b*. Через прямую *a* проведена плоскость α. Какое положение может занимать прямая *b* относительно плоскости α?

3). Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

(Да, существует, показать соответствующую модель).

4). Даны прямая и пара пересекающихся плоскостей. Охарактеризуйте все возможные случаи их взаимного расположения и показать на моделях.

5). Возможно ли такое положение карандашей, как показано на рисунке 26.

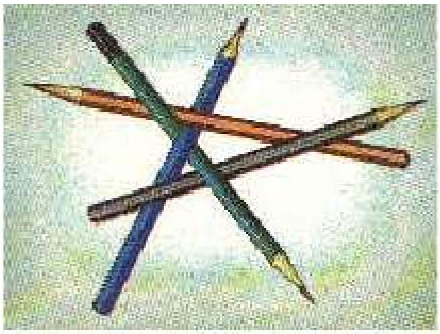


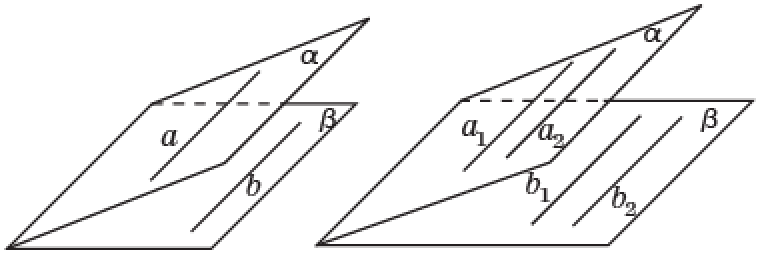
Рис. 26

Рисунок, желательно, воспроизвести в цвете, изобразив красный, желтый, зеленый, черный карандаши. Можно попросить учащихся попробовать продемонстрировать рисунок на модели, взяв карандаши таких же цветов, а потом выяснить, почему опыт потерпел неудачу.

II. Новый материал. Признак параллельности двух плоскостей.

Для того, чтобы прямая, не лежащая в плоскости, была параллельна этой плоскости, достаточно было в плоскости иметь прямую, параллельную данной прямой.

Пусть теперь даны две плоскости α и β. В каждой из них возьмем по прямой, соответственно *a* и *b*. Причем *a*||*b*. Достаточно ли этого, чтобы утверждать, что α||β? Нет, недостаточно, демонстрируем соответствующую модель (рис. 27, а).



а) Рис. 27 б)

Далее берем две прямые в одной плоскости, соответственно параллельные двум прямым в другой плоскости. Тот же вопрос. Оказывается, опять недостаточно, демонстрируем модель, изображенную на рисунке 27, б.

Наконец, предлагается ситуация, в которой берутся две пересекающиеся прямые в одной плоскости, соответственно параллельные двум прямым в другой плоскости. Показываем модель. После такой предварительной беседы переходим к формулировке и доказательству признака параллельности двух плоскостей.

Теорема II. (Признак параллельности двух плоскостей). Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть пересекающиеся прямые a_1, a_2 в плоскости α соответственно параллельны прямым b_1, b_2 в плоскости β (рис. 28).

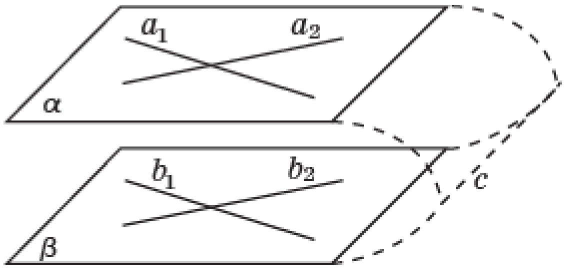


Рис. 28

Покажем, что плоскости α и β параллельны. Предположим противное, т. е., что плоскости пересекаются, и пусть c - линия их пересечения. По признаку параллельности прямой и плоскости, прямая a_1 параллельна плоскости β, а по свойству параллельности прямой и плоскости, она параллельна прямой c. Аналогично, прямая a_2 также параллельна прямой c. Таким образом, в плоскости a мы имеем две пересекающиеся прямые, параллельные одной прямой, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что неверным было наше предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, и, следовательно, они параллельны.

Замечание. При доказательстве данной теоремы используется так называемый метод доказательства от противного. На доске появился чертеж нереальной пространственной ситуации. Учащиеся не могут смириться с мыслью, что по чертежу неправильной ситуации можно сделать правильный вывод. В классе возникает дискуссия, которая является одним из методов обучения, она как нельзя лучше соответствует возрастным особенностям старшеклассников. Некоторые учителя придерживаются того мнения, что дискуссии мешают проведению уроков, отрывают от прохождения программы, что это лишняя трата времени. Однако дискуссия имеет целый ряд преимуществ по сравнению с другими формами работы учащихся. Она стимулирует активизацию учения, повышение интереса к изучаемому материалу, лучшему его усвоению. Темы дискуссий могут быть самыми разнообразными. У нас, например, интересно проходили обсуждения, в которых использовались исторические факты, возникновение и развитие некоторых теорий. Дискуссия может быть посвящена определенной теме, но она может возникнуть и при изучении обычных учебных вопросов на любом уроке, возникнуть стихийно при обсуждении какой-нибудь допущенной учеником ошибки. При этом вопросы, подлежащие обсуждению, дискуссионные вопросы могут и специально планироваться, "провоцироваться" самим учителем. В процессе практической работы нами были выявлены возможные темы для дискуссий при изучении стереометрии, на которые мы постараемся обратить ваше внимание.

III. Закрепление нового материала.

1. (Устно). Используя признак параллельности двух плоскостей, укажите в параллелепипеде $A...D_1$ параллельные плоскости.

2. Через данную точку проведите плоскость, параллельную данной плоскости.

Решение. Через точку B вне плоскости α проведем плоскость β, параллельную α. Для этого через точку B проведем две прямые a и b, параллельные плоскости α. Через пересекающиеся прямые a и b проведем плоскость β (следствие 3 из аксиом стереометрии – C_3). По признаку параллельности двух плоскостей $\alpha||\beta$.

3*. Каким образом провести прямую, параллельную двум данным плоскостям, через точку, не принадлежащую этим плоскостях?

Решение. Если плоскости параллельны, через данную точку проводим прямую, параллельную любой из данных плоскостей. Если плоскости пересекаются, через данную. точку нужно провести прямую, параллельную линии их пересечения.

Урок 19

I. Самостоятельная работа.

Проводится на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

2. Дан куб $A...D_1$. Докажите, что плоскость, содержащая грань AA_1B_1B, параллельна плоскости грани DD_1C_1C.

3. Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой? Ответ обоснуйте.

4*. Может ли многогранник иметь 21 плоский угол?

Решение. Нет, не может, так как число плоских углов равно 2Р, где Р – число ребер многогранника. Следовательно, число плоских углов многогранника всегда четно.

Вариант 2

1. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.

2. Дан куб $A...D_1$. Докажите, что прямая B_1C параллельна плоскости, проходящей через грань AA_1D_1D.

3. Могут ли пересекаться плоскости, содержащие параллельные прямые? Ответ обоснуйте.

4*. Может ли число плоских углов многогранника равняться 15?

Решение. Нет, см. решение задачи 4* из первого варианта.

II. Проверка самостоятельной работы.

Учащиеся сдают верхние листочки и оставляют нижние для проверки, которую проводим через кодоскоп.

III. Устная работа.

1). Верно ли утверждение: "Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Почему? Приведите примеры"?

2). Верно ли утверждение: "Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым в другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Почему? Приведите примеры"?

3). Через всякую ли прямую можно провести плоскость, параллельную данной плоскости? Почему?

4). Есть ли у правильного додекаэдра параллельные грани? Покажите их на модели.

5). Дан треугольник ABC. Точки M и N - середины сторон AB и BC. Что можно сказать о треугольниках ABC и MBN? Каковы соотношения их соответствующих элементов?

(В этой задаче учащиеся повторят понятие подобных треугольников и связь между их соответствующими элементами).

6). Как могут располагаться три плоскости, если две из них параллельны?

Ответ. Все три плоскости параллельны; две плоскости параллельны, а третья пересекает их по параллельным прямым.

IV. Решение задач.

Классу предлагаются следующие задачи (предъявляем все задание сразу, чтобы учащиеся видели его перспективу и работали в своем индивидуальном темпе):

1. Лежат ли прямые a, b и c в одной плоскости, если прямые a и b, a и c, b и c пересекаются, и точки пересечения не совпадают? Ответ обоснуйте.

2. Плоскость, пересекая стороны AB и BC треугольника ABC, делит их в отношении $AA_1{:}A_1C=CC_1{:}C_1B=2{:}3$. Найдите длину отрезка A_1C_1, если длина отрезка равна 25 см.

Ответ: $A_1C_1=15$ см, так как $AC{:}A_1C_1=BC{:}B_1C_1=5{:}3$, $25{:}A_1C_1=5{:}3$.

3*. Покажите, что если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.

Решение. Пусть $\alpha||\gamma$, $\beta||\gamma$. Нужно показать, что $\alpha||\beta$. Проведем прямую a, пересекающую плоскость α в точке A. Эта прямая пересечет также плоскости β и γ в точках соответственно B и C. Через прямую a проведем какие-нибудь две плоскости. Они пересекут плоскости α, β, γ по прямым соответственно a_1 и a_2; b_1 и b_2; c_1 и c_2. При этом в силу параллельности соответствующих плоскостей будут параллельны пары следующих прямых: a_1 и c_1, a_2 и c_2, b_1 и c_1, b_2 и c_2. Отсюда (по свойству транзитивности паралльных прямых) прямые a_1 и b_1, a_2 и b_2 будут параллельны. Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей, плоскости α и β, будут также параллельны.

Замечание. Это свойство параллельности плоскостей называется свойством транзитивности.

Задание на дом

1. Выучить: определение параллельных плоскостей, классификацию взаимного расположения плоскостей (схему 4), формулировку и доказательство теоремы II - Признака параллельности двух плоскостей. Повторить: формулировку теоремы I - Признака параллельности прямой и плоскости (п. 8 учебника).

2. Решить задачи.

1). Плоскость α пересекает плоскости β и γ по параллельным прямым соответственно *b* и *c*. Будут ли плоскости β и γ параллельны? Ответ обоснуйте. Сделайте соответствующий чертеж.

2). Через две скрещивающиеся прямые *a* и *b* проведите параллельные плоскости.

Решение. Через каждую данную прямую проводим плоскость, параллельную другой данной прямой (см. решение задачи 4) из домашнего задания к п. 7 учебника). Эти плоскости будут параллельны по признаку параллельности двух плоскостей.

3). Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться: а) три плоскости; б) четыре плоскости.

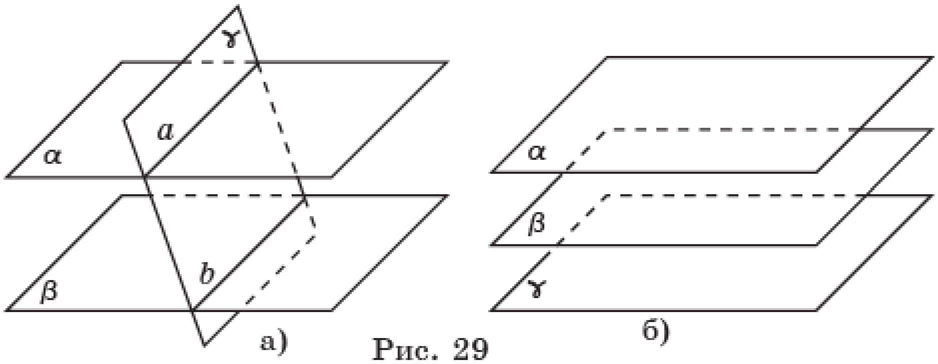
Решение. а) Три прямые - плоскости расположены как боковые грани треугольной призмы; б) шесть прямых - плоскости расположены как боковые грани тетраэдра.

4). Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

Решение. Пусть даны параллельные плоскости α и β и пусть плоскость γ пересекает плоскость α. Если γ параллельна плоскости β, то (по свойству транзитивности параллельности плоскостей, см. урок 19) γ должна быть параллельна α, что противоречит условию. Следовательно, γ пересекает и плоскость β.

5). Как могут быть расположены относительно друг друга три плоскости α, β и γ? Рассмотрите два случая: 1). Какие-нибудь две плоскости, например, α и β параллельны. 2). Среди плоскостей α, β, γ нет параллельных, все они попарно пересекаются.

Решение. Случай 1. Решение представлено на рисунке 29: а) плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым; б) плоскость γ параллельна обеим плоскостям.



а) Рис. 29 б)

Случай 2. Пусть $\alpha \cap \beta = a$; $\alpha \cap \gamma = b$; $\beta \cap \gamma = c$. Обратим внимание на прямые a и b. Обе они лежат в одной плоскости α. Они могут либо совпадать, либо пересекаться, либо быть параллельными. Если a и b совпадают, то плоскость β пересекается с плоскостью γ по той же прямой, т.е. все три плоскости пересекаются по одной прямой. Такое расположение плоскостей напоминает раскрытую книгу (рис. 30, а).

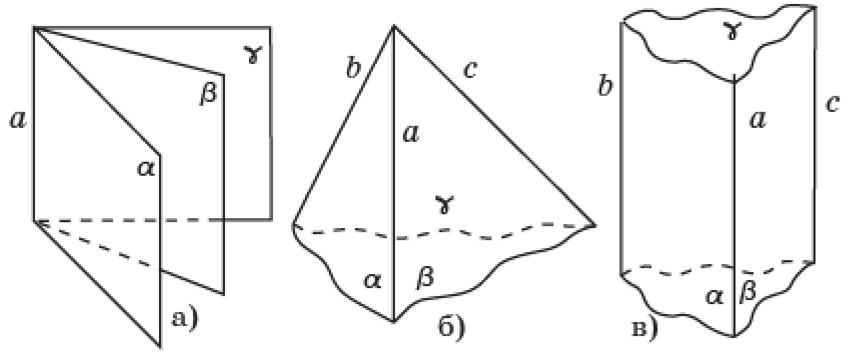


Рис. 30

Если прямые a и b пересекаются в точке A, то A принадлежит всем трем плоскостям. В этом случае плоскости располагаются как боковые грани в треугольной пирамиде (рис. 30, б). Если прямые a и b параллельны, то в этом случае прямые b и c параллельны (или a и c параллельны). Действительно, c и b лежат в γ и, если c не параллельна b, т.е. $c \cap b = B$, то $B \in \alpha$, $B \in \beta$. Следовательно, $B \in a$, т.е. прямые a и b не параллельны, что противоречит условию. Итак, три плоскости не имеют общей точки, попарно пересекаясь по параллельным прямым. В этом случае плоскости расположены как боковые грани треугольной призмы (рис. 30, в).

3*. Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться n плоскостей.

Ответ: $\frac{n(n-1)}{2}$.

4**. Индивидуальное задание - Сообщение на тему "О жизни и творчестве Н.И.Лобачевского". (Использовать следующую литературу: Соловьев Ю.П. Николай Иванович Лобачевский //Квант.-1992.-№ 11.-С.2; Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию: Книга для внеклассного чтения учащихся 9-10 классов средней школы. - М.: Просвещение, 1988).

Индивидуальные домашние задания для учащихся являются важной составной частью нашей работы с учащимися старших классов. Каждый ученик может выбрать тему выступления в соответствии со своими вкусами и интересами, касающуюся различных сторон геометрии. Мы разработали систему индивидуальных заданий по основным аспектам содержания стереометрии таким, как исторические, прикладные, современные, занимательные (в том числе и красоту математики). Подробнее об этом см. в параграфе 6 настоящей книги.

Урок 20

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. В плоскости двух параллельных прямых a и b дана точка C, не принадлежащая этим прямым. Через нее проведена прямая c. Найдите все возможные расположения прямой c относительно прямых a и b.

2. Сторона KM треугольника KLM параллельна плоскости α. Точки G и H принадлежат соответственно его сторонам KL и KM. Точка P – точка пересечения прямой GH с плоскостью α. Постройте точки пересечения прямых KL и LM с плоскостью α. Найдите линию пересечения плоскостей треугольника KLM и α.

3. Прямая b параллельна плоскости α. Определите положение данной прямой относительно прямых: а) лежащих в плоскости α; б) параллельных α; в) пересекающих α.

4. Из точки S, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей, проведены три прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Найдите SA_2, SB_2 и A_1C_1, если $SA_1 = A_1B_1 = 5$ см; $A_2C_2 = B_1B_2 = 12$ см; $A_2B_2 = 15$ см.

5*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные пары из: а) пяти лучей; б) шести лучей, выходящих из одной точки.

Вариант 2

1. В плоскости двух пересекающихся прямых m и n дана точка A, не принадлежащая этим прямым. Прямая a проходит через точку A. Найдите все возможные расположения прямой a по отношению к прямым m и n.

2. Сторона CD четырехугольника $CDEF$ параллельна плоскости α. Прямая CE пересекает плоскость α в точке G. Постройте точки пересечения прямых CF и DE с плоскостью α. Найдите линию пересечения плоскостей четырехугольника $CDEF$ и α.

3. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Определите положение прямой a относительно третьей прямой c, если: а) c параллельна b; б) c пересекает b; в) c скрещивается с b.

4. Из точки O, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей, проведены три прямые, пересекающие плоскости соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1. Найдите BC, если $OA = a,$ $AA_1 = b$, $B_1C_1 = c$.

5*. Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться: а) 5 плоскостей; б) 6 плоскостей.

п. 9. Векторы в пространстве (уроки 21, 22)

Цель – по аналогии с векторами на плоскости ввести понятия вектора в пространстве, длины или модуля вектора, одинаково и противоположно направленных векторов; определить равные векторы; рассмотреть операции над векторами.

Урок 21

I. Анализ контрольной работы № 2.

II. Новый материал.

Вспоминаем с учащимися определение вектора на плоскости и аналогичным образом определяем вектор в пространстве.

Определение. Вектором в пространстве называется направленный отрезок, т. е. такой отрезок, в котором указаны начало и конец.

Рассматривается также нулевой вектор, у которого начало совпадает с концом.

Вектор с началом в точке A_1 и концом в точке A_2 обозначается $\overrightarrow{A_1A_2}$ и изображается стрелкой. Будем также обозначать векторы малыми латинскими буквами со стрелками над ними. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и т.д. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Длиной, или модулем, вектора называется длина соответствующего отрезка. Она обозначается $|\overrightarrow{A_1A_2}|$ или $|\vec{a}|$. Длина нулевого вектора считается равной нулю.

Два вектора в пространстве называются одинаково (противоположно) направленными, если они лежат в одной плоскости и в этой плоскости одинаково (противоположно) направлены.

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковые длины и направления.

III. Закрепление нового материала.

1. В кубе $A…D_1$ определите пары: а) одинаково; б) противоположно направленных векторов.

2. В четырехугольной призме $A…D_1$ найдите векторы, равные вектору: а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B}$.

3. Точка B – середина отрезка AC, а точка C – середина отрезка BD. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$?

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 22

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Вектором в пространстве называется …
2. Вектор обозначается …
3. Длиной вектора называется …
4. Два вектора в пространстве называются одинаково направленными, если …
5. Нулевым вектором называется …

Вариант 2

1. Вектором на плоскости называется …
2. Вектор изображается …
3. Модулем вектора называется …
4. Два вектора в пространстве называются противоположно направленными, если …
5. Два вектора считаются равными, если …

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал.

Так же, как и на плоскости для векторов в пространстве определяются операции сложения и умножения на число.

Для того, чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Тогда вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

При умножении вектора $\vec{a}$ на число t длина вектора умножается на $|t|$, а направление остается прежним, если $t>0$, и изменяется на противоположное, если $t<0$. При умножении вектора на нуль получается нулевой вектор. Произведение вектора $\vec{a}$ на число t обозначается $t\vec{a}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}$+(-1)$\vec{b}$, который обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Для операций сложения векторов и умножения вектора на число справедливы свойства, аналогичные свойствам этих операций для векторов на плоскости. Среди них:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3. $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

4. $t(s\vec{a}) = (ts)\,\vec{a}$.

5. $(t+s)\,\vec{a} = t\vec{a} + s\vec{a}$.

Доказательство этих свойств проводится непосредственной проверкой, аналогично тому, как это делалось для плоскости.

Докажем, например, выполнимость свойства 2. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала A. Если эти векторы лежат в одной плоскости, то соответствующее равенство $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ следует из свойств векторов на плоскости. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не лежат в одной плоскости, то это равенство следует из рассмотрения параллелепипеда $ABCDAB_1C_1D_1$, в котором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, b = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$. Тогда $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

IV. Закрепление нового материала.

1. Для данного вектора $\overrightarrow{AB}$ постройте вектор: а) $2\overrightarrow{AB}$; б) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; в) $-\overrightarrow{AB}$; г) $-3\overrightarrow{AB}$.

2. Изобразите тетраэдр $ABCD$ и найдите вектор:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}$;

3. Изобразите параллелепипед $A\ldots D_1$ и найдите вектор:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CC_1}$; в) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$;

г) $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DC}$.

Задание на дом

1. Выучить определения введенных понятий (п. 9 учебника).

2. Решить задачи.

1). В прямоугольном параллелепипеде укажите пары: а) противоположно; б) одинаково направленных векторов.

2). Найдите число векторов, которые определяются вершинами правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$.

Ответ. 16.

3). Докажите справедливость следующих свойств для векторов в пространстве:

а) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; б) $t(\vec{a} + \vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Тогда: а) $\vec{a} + \vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, таким образом, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

б) $\overrightarrow{AB}$+$\overrightarrow{AD}$=$\vec{a}+\vec{b}$ =$\overrightarrow{AC}$. Построим векторы $t\overrightarrow{AC}$, $t\overrightarrow{AB}$, $t\overrightarrow{AD}$. Точка *A* и концы построенных векторов являются вершинами параллелограмма, в котором $t\overrightarrow{AB}$+ $t\overrightarrow{AD}$= $t\overrightarrow{AC}$. Значит, $t(\vec{a}+\vec{b}) = t\vec{a} + t\vec{b}$.

4). Точка *O* – середина отрезка *AB*. Докажите, что для любой точки *X* пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$.

Решение. Для произвольной точки *X* имеем $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{XO}$,

$\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{XO}$. Складывая почленно эти равенства и замечая, что $\overrightarrow{AO}$=-$\overrightarrow{BO}$, имеем требуемое равенство $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$.

3*. Точка *M* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*. Докажите, что для произвольной точки *X* пространства выполняется равенство$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

Решение. Для произвольной точки *X* пространства имеем $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{CM}$. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$, что следует из рассмотрения параллелограмма *MBDC* (рис. 31), где *MD*=*AM*.

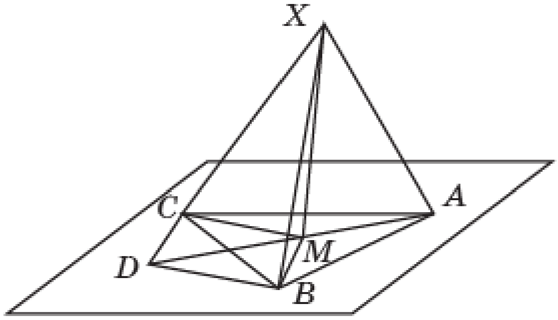


Рис. 31

Следовательно, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$, откуда следует, что $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Окончательно получаем требуемое равенство $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}$ $(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$.

п. 10. Коллинеарные и компланарные векторы (уроки 23, 24)

Цель – сформировать понятия коллинеарности двух векторов в пространстве и компланарности трех векторов в пространстве, ввести необходимые и достаточные условия коллинеарности двух и компланарности трех векторов в пространстве.

Урок 23

I. Устная работа.

1. Какие два вектора считаются равными?

2. Сколько векторов определяют ребра куба?

3. На рисунке 32 изображена равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$) и равносторонний треугольник BCE.

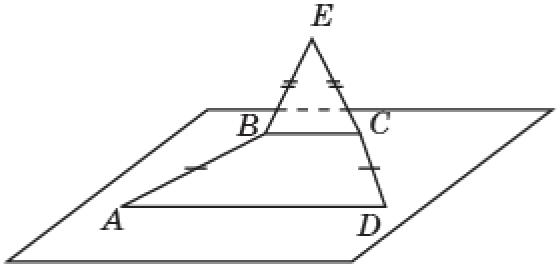


Рис. 32

Найдите векторы: а) равные; б) одинаково направленные; в) противоположно направленные.

4. Как можно определить вычитание двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

II. Новый материал – коллинеарные векторы.

Возьмем на прямой a точки в следующей последовательности: A, B, C, D и рассмотрим пары векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Вопрос: “Что общего у каждой из этих пар векторов? Сравните пары а), б) и а), г)”.

Определение. Два вектора называются коллинеарными, если при откладывании их от одной точки, они лежат на одной прямой.

Вопросы.

- Как располагаются относительно друг друга векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$?
- Будут ли векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$ коллинеарными?
- Могут ли коллинеарные векторы располагаться на пересекающихся прямых?

После обсуждения ответов на предложенные вопросы, рассматриваем следующую теорему.

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$.

Доказательство. То, что векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$ коллинеарны следует непосредственно из определения умножения вектора на число. Докажем, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то для некоторого числа t выполняется равенство $\vec{b} = t\vec{a}$. Пусть $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Из коллинеарности векторов следует, что точки O, A и B лежат на одной прямой. Если точки A и B лежат по одну сторону от точки O, то положим $t=OB:OA$, если они лежат по разные стороны от точки O, то положим $t = -OB:OA$. В обоих случаях будет выполняться равенство $\overrightarrow{OB} = t\,\overrightarrow{OA}$и, следовательно, равенство $\vec{b} = t\vec{a}$.

III. Закрепление нового материала.

1. Дан куб $A…D_1$ и точка M – середина ребра AA_1. Среди следующих пар векторов найдите коллинеарные:

а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$;

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{BA}$;

д) $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BB_1}$;

е) $\overrightarrow{A_1M}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ. Пары коллинеарных векторов а), б), г), д).

2. Докажите, что если векторы лежат на параллельных прямых, то они коллинеарны.

Решение. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$лежат на параллельных прямых, тогда $\vec{b} = t\vec{a}$, векторы $\vec{a}$ и $t\vec{a}$, по доказанной теореме, коллинеарны.

3*. Докажите, что если выполняется равенство $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$, то точки A, B и C принадлежат одной прямой. При каком t точка C лежит между точками A и B?

Решение. $t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OB}=t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}$. Таким образом, $\overrightarrow{OC}= t\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}= t\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}= t\overrightarrow{BA}$. Итак, точки A, B, C принадлежат одной прямой. Причем C лежит между A и B, если $0<t<1$.

Урок 24

I. Опрос учащихся.

Два ученика приглашаются за первый стол – опрос по теории.

№ 1. – Определения вектора, суммы двух векторов, произведения вектора на число, коллинеарных векторов.

№ 2. – Формулировка и доказательство теоремы о коллинеарных векторах.

Индивидуальные задания на местах по карточкам.

Карточка

1. Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны. Векторы $\vec{k}$ и $\vec{l}$ тоже коллинеарны. Будут ли коллинеарны векторы $\vec{m}$ и $\vec{k}$, $\vec{n}$ и $\vec{l}$.

Решение. Нет. Если вектор $\vec{m}$ окажется коллинеарным вектору $\vec{k}$, то все четыре данных вектора будут коллинеарны.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Будут ли коллинеарны векторы: а) $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$?

Решение. а), б) Векторы коллинеарны, так как расположены на параллельных прямых (или на одной прямой).

II. Задание для класса.

1. В параллелепипеде $A \ldots D_1$ точки M и N являются серединами соответственно ребер AD и B_1C_1. Докажите, что векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{A_1N}$ коллинеарны.

Решение. В параллелограмме $ABCD$ проведем AK, где K – середина BC, тогда $AKCM$ - параллелограмм (по признаку параллелограмма: $KC=AM$ $KC \| AM$). Таким образом, $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{MC}$, но $\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{AK}$. Итак, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{A_1N}$, т. е. они коллинеарны.

2. В тетраэдре $ABCD$ точки M_1 и M_2 являются центрами тяжести (точками пересечения медиан) граней соответственно ADB и BDC. Докажите, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны. Найдите отношение длин этих векторов.

Решение. Обратимся к рисунку 33. Точки D_1 и D_2 – середины соответственно AB и BC, т.е. D_1D_2 – средняя линия треугольника ABC и $D_1D_2 \| AC$. Но треугольники D_1DD_2 и DM_1M_2 подобны (у них общий угол и прилежащие к нему стороны пропорциональны). Следовательно, $M_1M_2 \| D_1D_2$ и $M_1M_2 : D_1D_2 = 2:3$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и $|\overrightarrow{M_1M_2}|:|\overrightarrow{AC}|=1:3$.

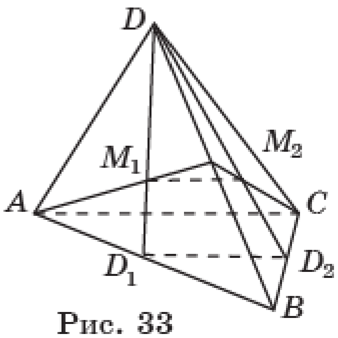


Рис. 33

3*. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке, совпадающей с центроидом (точка пересечения высот тетраэдра).

Решение. Пусть M и N – середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$, O – середина MN. Тогда так как $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = -\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OM}$, то

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$ и, следовательно, середина отрезка MN является центроидом.

II. Новый материал – компланарные векторы.

Ученикам предлагается найти сумму двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и сделать это двумя способами.

Решение. Возьмем произвольную точку O пространства и отложим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, затем $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, вектор $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ будет искомым. Другой способ: от выбранной точки O откладываем векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Строим параллелограмм $OACB$, вектор $\overrightarrow{OC}$ - искомый, так как $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. В нашем случае три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ были отложены от одной точки и располагались в одной плоскости.

Определение. Три ненулевых вектора называются компланарными, если при откладывании их от одной точки они располагаются в одной плоскости.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой, будем считать их компланарными.

Теорема. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно представить единственным образом в виде $\vec{c} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

Доказательство. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от точки O, и обозначим их концы, соответственно, A, B и C. Из условия теоремы следует, что точки A, B и C принадлежат одной плоскости. Если точка

C принадлежит прямой *OA*, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $s = 0$. Аналогично, если точка *C* принадлежит прямой *OB*, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Требуемое равенство выполняется при $t = 0$.

Пусть теперь точка *C* не принадлежит прямым *OA* и *OB*. Проведем через нее прямые, параллельные прямым *OA* и *OB*. Соответствующие точки пересечения обозначим *A'* и *B'* (рис. 34).

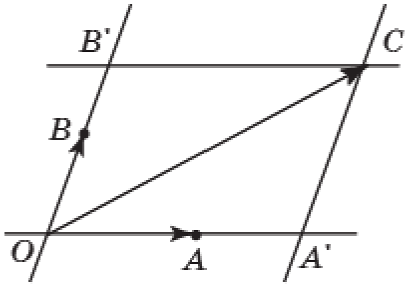


Рис. 34

Тогда $\overrightarrow{OA'} = t\,\overrightarrow{OA} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = s\,\overrightarrow{OB} = s\vec{b}$ и, следовательно, $\vec{c} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = t\vec{a} + s\vec{b}$.

III. Закрепление нового материала.

1. Дан параллелепипед $A \ldots D_1$. Будут ли компланарны следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{DD_1}\ \overrightarrow{C_1C}$;

б) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC_1},\ \overrightarrow{BB_1}$;

в) $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DD_1}$;

г) $\overrightarrow{BD_1}$,$\overrightarrow{DD_1}$, -$\overrightarrow{D_1B_1}$?

Ответ. а), б), г) Да; в) нет.

2. Дан параллелограмм *ABCD*. $\overrightarrow{AB}$=$\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}$=$\vec{b}$. Разложите по ним векторы: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AO}$, где *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

Ответ. а)$\overrightarrow{AB}=1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}$; б) $\overrightarrow{BC}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC}=1\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}$; г) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\cdot\vec{b}$.

Задание на дом

1. Выучить определения коллинеарных и компланарных векторов, формулировки и доказательства теорем о них (п.10 учебника).

2. Решить задачи.

1). Докажите, что два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Решение. Если два вектора лежат на параллельных прямых или на одной прямой, то их можно представить в виде $\vec{a}$и $t\vec{a}$. Тогда по доказанной теореме они коллинеарны. Обратно, если два вектора коллинеарны, то по доказанной тореме их можно представить в виде $\vec{a}$и $t\vec{a}$, значит, они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

2). Дан параллелограмм $EFGH$. $\overrightarrow{HE}=\vec{e}$, $\overrightarrow{HG}=\vec{g}$. Разложите по этим векторам векторы; а) $\overrightarrow{FO}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма; б) $\overrightarrow{FM}$, где M – середина FG; в) $\overrightarrow{KL}$, где K, L – середины соответственно EF, EH.

Ответ. а) $\overrightarrow{FO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}=-\frac{1}{2}(\vec{e}+\vec{g})=-\frac{1}{2}\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{g}$;

б) $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{HG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}=\vec{g}-\frac{1}{2}\vec{e}=-\frac{1}{2}\vec{e}+\vec{g}$;

в) $\overrightarrow{KL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}=-\frac{1}{2}\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{g}$.

3*. Докажите, что для произвольного пятиугольника $ABCDE$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$, где O – центр пятиугольника.

Решение. Имеем, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=k\cdot\overrightarrow{OE}$. Следовательно, имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=(k+1)\overrightarrow{OE}$. С другой стороны, $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=l\cdot\overrightarrow{OD}$ и, следовательно, имеет место равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=(l+1)\overrightarrow{OD}$. Эти два равенства могут выполняться только в случае, если $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.

п. 11. Параллельный перенос (урок 25)

Цель – определить понятие параллельного переноса и доказать, что он является движением.

Урок 25

I. Опрос учащихся по теории.

№ 1. – Определение вектора в пространстве. Понятия длины вектора, одинаково и противоположно направленных векторов, равенства векторов.

№ 2. – Действия с векторами и их свойства. Доказать одно по выбору.

№ 3. – Определение коллинеарных векторов. Теорема о коллинеарных векторах.

№ 4. – Определение компланарных векторов. Теорема о компланарных векторах.

II. Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1. Даны отрезок KL и точка O – его середина. Докажите, что для произвольной точки M справедливо равенство $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{ML})$.

Решение. См. задачу 4) из домашнего задания к урокам 21, 22.

2. Дан треугольник ABC. $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Разложите по ним вектор $\overrightarrow{CM}$, де M – середина AB. Укажите два способа.

Решение. $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}+\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. Окончательно получаем, что $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$. Другой способ. CM – половина диагонали параллелограмма $ACBD$, M – точка пересечения его диагоналей и $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

III. Задание для класса.

1). Среди данных векторов найдите одинаково и противоположно направленные; $\vec{a}$, $-\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $-3\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\frac{1}{5}\vec{a}$.

2). На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{c}$, чтобы получить вектор $\vec{d}$, противоположно направленный с вектором $\vec{c}$ и имеющий длину, равную $2|\vec{c}|$?

Ответ. $\vec{d}=-2\vec{c}$.

3). Точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите x, если: а) $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{CA}$; г)$\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{OD}$.

Ответ. а) x=1; б) x=-1; в) x=-$\frac{1}{2}$; г) x=2.

4). В кубе $A\ldots D_1$ назовите тройку: а) компланарных векторов; б) некомпланарных векторов.

Ответ. Например, в случае а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1}$.

5*). В параллелограмме $ABCD$ точка O – точка пересечения его диагоналей. $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Разложите по ним вектор: а) $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{AD}$; в) $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BD}$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AO}=0\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$; б) $\overrightarrow{AD}=-1\cdot\vec{b}+\vec{c}$; в) $\overrightarrow{CD}=-1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}$; г) $\overrightarrow{BD}$ = -1$\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\vec{c}$.

IV. Новый материал.

Пусть дан некоторый вектор $\vec{a}$. Определим следующее преобразование пространства. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее заданный вектор $\vec{a}$. Для этого проведем луч с началом в точке A и одинаково направленный с вектором $\vec{a}$. На нем отложим отрезок AA'=$|\vec{a}|$. Таким образом, $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$. Говорят, что точка A' получена из точки A параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Причем для каждой точки пространства подобным образом можно найти точку, в которую она перейдет при таком преобразовании.

Определение. Преобразование пространства, при котором точки A переходят в точки A' так, что векторы $\overrightarrow{AA'}$ равны заданному вектору $\vec{a}$, называется параллельным переносом на вектор $\vec{a}$.

Говорят, что фигура F' получается параллельным переносом фигуры F на вектор $\vec{a}$, если все точки фигуры F' получаются всевозможными параллельными переносами точек фигуры F на вектор $\vec{a}$.

Докажем, что параллельный перенос является движением.

Доказательство. Пусть точки A', B' получены параллельным переносом на вектор $\vec{a}$ точек A и B соответственно. Тогда $AA'B'B$ - параллелограмм и, следовательно, $AB = A'B'$. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, т.е. является движением.

V. Закрепление нового материала.

1). Приведите примеры фигур, которые можно перевести в себя с помощью параллельного переноса.

Ответ. Прямая, плоскость, пространство.

2). Задайте вектор $\overrightarrow{EE_1}$ и точки A, B, C. Постройте точки, в которые они перейдут при параллельном переносе на данный вектор.

3). Постройте фигуру, в которую перейдет куб $A\dots D_1$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CC_1}$.

VI. Задание на дом.

1. Выучить теорию: определение параллельного переноса, теорему о параллельном переносе (п. 11 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите условия, при которых существует параллельный перенос, переводящий один отрезок на другой.

Решение. Отрезки должны лежать на одной прямой или на параллельных прямых и иметь равные длины.

2). Дан треугольник ABC. Постройте фигуру, в которую перейдет этот треугольник при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AM}$, где M – середина BC.

3). Докажите, что противоположные грани параллелепипеда $A\dots D_1$ равны.

Решение. Возьмем любую пару противоположных граней, например, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ и зададим параллельный перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{AA_1}$. Тогда параллелограмм $ABCD$ перейдет в переллелограмм $A_1B_1C_1D_1$. Поскольку по доказанной теореме параллельный перенос является движением, параллелограммы равны. Аналогично доказывается, что грань AA_1B_1B равна грани DD_1C_1C, так как переходит в нее при параллельном переносе, определяемым вектором $\overrightarrow{AD}$; грань AA_1D_1D переходит при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ в грань B_1BC_1C, значит, они тоже равны.

3*. Докажите, что в параллелепипеде $A\dots D_1$ равны углы: а) AD_1D_1 и BC_1C; б) CBD_1 и A_1D_1B; в) ADC и $A_1B_1C_1$.

Решение. а) По доказанному в предыдущей задаче грани AA_1D_1D и B_1BC_1C равны, углы AD_1D_1 и BC_1C равны, как углы с соответственные углы равных фигур. Эти углы можно рассматривать также как соответственные при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$; б) A_1BCD – параллелограмм, D_1B – его диагональ, следовательно, $\angle D_1BC=\angle A_1D_1B$; в) $\angle ADC=\angle A_1D_1C_1=\angle A_1B_1C_1$, $ABCD$ при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AA_1}$ переходит в равный параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$.

п. 12. Параллельное проектирование (уроки 26, 27)

Цель – знакомство учащихся с параллельным проектированием и его основными свойствами. Учащиеся должны представлять себе как изображаются основные плоские и пространственные фигуры в параллельной проекции.

Урок 26

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если …
2. Две плоскости называются параллельными, если …
3. Для того, чтобы прямая, не лежащая в плоскости, была параллельна этой плоскости, достаточно …
4. Два вектора называются коллинеарными, если …
5. Параллельным переносом называется …

Вариант 2

1. Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если …
2. Прямая и плоскость называются параллельными, если …
3. Для того, чтобы две плоскости были параллельны, достаточно …
4. Три ненулевых вектора называются компланарными, если …
5. Параллельный перенос является …

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал – определение и свойства параллельного проектирования.

Как известно, в стереометрии изучаются пространственные фигуры. Когда же мы изображаем их на чертеже, то получаем плоскую фигуру. Каким же образом следует изображать пространственную фигуру на плоскости?

Одним из самых удобных способов изображения пространственных фигур является параллельное проектирование. Оно наглядно, легко выполнимо и заключается в следующем.

Пусть π - некоторая плоскость, l - пересекающая ее прямая (рис. 35). Определим понятие параллельного проектирования на плоскость π в направлении прямой l.

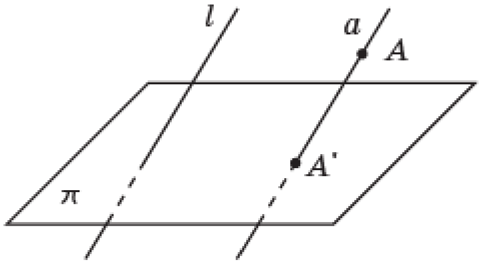


Рис. 35

Пусть *A* - точка в пространстве. Если *A* не принадлежит прямой *l*, то проведем через нее прямую, параллельную прямой *l*. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π называется проекцией точки *A* на плоскость π в направлении прямой *l*. Обозначим ее *A*'. Если точка *A* принадлежит прямой *l*, то проекцией на плоскость π считается точка пересечения прямой *l* с плоскостью π.

Таким образом, каждой точке *A* пространства сопоставляется ее проекция *A*' на плоскость π. Это соответствие называется параллельным проектированием на плоскость π в направлении прямой *l*.

Если Ф - некоторая фигура в пространстве, то проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Ф', которая называется параллельной проекцией фигуры Ф на плоскость π в направлении прямой *l*. Говорят также, что фигура Ф' получена из фигуры Ф параллельным проектированием.

Примеры параллельных проекций дают, например, тени предметов под воздействием пучка параллельных солнечных лучей.

Рассмотрим свойства параллельного проектирования.

1. Если прямая параллельна или совпадает с прямой *l*, то ее проекцией в направлении этой прямой является точка. Если прямая не параллельна и не совпадает с прямой *l*, то ее проекцией является прямая.

2. Проекция отрезка при параллельном проектировании есть точка или отрезок, в зависимости от того лежит он на прямой, параллельной или совпадающей с прямой *l*, или нет. Отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, сохраняется. В частности, середина отрезка при параллельном проектировании переходит в середину соответствующего отрезка.

3. Если две параллельные прямые не параллельны прямой *l*, то их проекциями в направлении *l* могут быть параллельные прямые или одна прямая.

Для каждого свойства дается краткая запись условия и доказательства (п. 12 учебника).

IV. Закрепление нового материала.

1. Сколько точек может получиться при параллельном проектировании трех точек.

Решение. В общем случае три точки. Если точки не принадлежат одной прямой, но две из них определяют прямую, параллельную направлению проектирования, то получится две точки. Если все точки принадлежат одной прямой, параллельной направлению проектирования, то получится одна точка.

2. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух пересекающихся прямых? Изобразите эти ситуации.

Ответ. Параллельными проекциями двух пересекающихся прямых могут служить: а) одна прямая, если плоскость прямых параллельна направлению проектирования (прямой l). Эта прямая будет линией пересечения плоскости прямых и плоскости π; б) в противном случае проекцией двух пересекающихся прямых будут две пересекающиеся прямые.

3*. Какие фигуры могут служить параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых? Изобразите эти ситуации.

Ответ. Параллельными проекциями двух скрещивающихся прямых могут служить: а) точка и прямая, если одна из скрещивающихся прямых параллельна прямой l; б) две пересекающиеся прямые, если ни одна из скрещивающихся прямых не параллельна прямой l; в) две параллельные прямые, когда через скрещивающиеся прямые проводим параллельные плоскости, которые оказываются параллельными прямой l.

Урок 27

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения параллельного проектирования, параллельной проекции фигуры.

№ 2. – Свойство 1 параллельного проектирования. Формулировка, доказательство.

№ 3. – Свойство 2 параллельного проектирования. Формулировка, доказательство.

№ 4. – Свойство 3 параллельного проектирования. Формулировка, доказательство.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Можно ли по параллельной проекции точки на плоскость определить положение точки в пространстве?

Ответ. Нет.

2). В каком случае положение прямой в пространстве определяется заданием ее параллельной проекции на плоскость?

Ответ. Если прямая параллельна направлению проектирования.

3). Сохраняются ли при параллельном проектировании углы?

Ответ. Вообще говоря, нет.

II. Задание классу.

1. В пространстве задана прямая. В каком случае ее параллельная проекция параллельна данной прямой?

Ответ. Если прямая параллельна плоскости проектирования.

2. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой? Сделайте чертеж.

Ответ. Прямые должны скрещиваться и одна из них быть параллельной направлению проектирования.

3*. Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

Решение. $m||n$, m', n' – соответственно их параллельные проекции, тогда $m'||n'$. Возьмем точки M_1, M_2 на прямой m и точки N_1 и N_2 на прямой n. Их соответствующие параллельные проекции обозначим M_1', M_2', N_1' и N_2', причем M_1', M_2' принадлежат прямой m', а точки N_1', N_2' принадлежат прямой n'. Требуется доказать, что $M_1M_2:N_1N_2 = M_1'M_2':N_1'N_2'$.

III. Домашнее индивидуальное задание. - Сообщение на тему "О жизни и творчестве Н. И. Лобачевского".

Задание на дом

1. Выучить определение параллельного проектирования, уметь формулировать и доказывать свойства параллельного проектирования (п. 12 учебника).

2. Решить задачи.

1). Докажите, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых.

2). Перечислите свойства ромба, прямоугольника, квадрата, трапеции, которые остаются верными при параллельном проектировании.

3). Из одной точки выходят три луча, не лежащие в одной плоскости. Какой фигурой может быть проекция этих лучей?

Решение. Если один из лучей параллелен направлению проектирования, то параллельной проекцией будет два луча с общей вершиной. В остальных случаях параллельной проекцией будет три луча с общей вершиной.

3*. Отрезок $CD=m$ пересекает плоскость π параллельного проектирования в точке O, $C'D'$ – его параллельная проекция на эту плоскость. Известно, что $C'O:D'O=a:b$. Найдите CO и DO.

Решение. Треугольники COC' и DOD' подобны (по углам: $\angle COC' = \angle DOD'$, как вертикальные, $\angle DD'O=\angle CC'O$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых CC', DD' и секущей $C'D'$). Отсюда следует, что $CO:DO=C'O:D'O$ или, обозначив $CO=x$, $DO=m\text{-}x$, имеем $x:(m\text{-}x)=a:b$, откуда $x=\frac{ma}{a+b}$, $m\text{-}x=\frac{mb}{a+b}$ или $CO=\frac{ma}{a+b}$, $DO=\frac{mb}{a+b}$.

п. 13. Параллельные проекции плоских фигур (уроки 28, 29)

Цель - закрепить свойства параллельного проектирования и подготовить необходимый материал для следующих уроков по изображению пространственных фигур на плоскости. Учащиеся должны усвоить, что если плоская фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования, то ее проекцией на эту плоскость будет фигура, равная исходной. В частности, в этом случае сохраняются величины углов и отрезков. В общем же случае при параллельном проектировании величины углов и отрезков не сохраняются. Учащиеся должны представлять себе, что является проекцией многоугольника и что является проекцией круга.

Урок 28

I. Самостоятельная работа.

Проводится, как и математические диктанты, на листочках под копирку.

Вариант 1

1. Всегда ли параллельной проекцией точки является точка?

Ответ. Да.

2. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая?

Ответ. Параллельной проекцией двух параллельных прямых является одна прямая, если плоскость этих прямых параллельна направлению проектирования, но сами прямые не параллельны ему.

3. Сохраняются ли при параллельном проектировании длины отрезков?

Ответ. Вообще говоря, нет.

4*. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой?

Ответ. Прямые должны пересекаться, и при этом одна из них должна быть параллельна направлению проектирования.

Вариант 2

1. В каком случае параллельной проекцией прямой будет точка?

Ответ. Параллельной проекцией прямой будет точка, если прямая параллельна направлению проектирования.

2. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки?

Ответ. Параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки, если прямые параллельны направлению проектирования.

3. Сохраняются ли при параллельном проектировании величины углов?

Ответ. Вообще говоря, нет.

4*. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой?

Ответ. В этом случае плоскость, определяемая этими прямой и точкой, должна быть параллельна направлению проектирования.

II. Проверка самостоятельной работы.

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал.

При изображении пространственных фигур на плоскости особенно важно уметь правильно изображать плоские фигуры, поскольку они входят в поверхность основных пространственных фигур. Например, плоские многоугольники являются гранями многогранников, круги - основаниями цилиндров и конусов. Причем изображение зависит от положения фигуры относительно плоскости проектирования.

Вопрос: “Если отрезок параллелен плоскости проектирования, как связана его длина с длиной проекции на этй плоскость? Почему?” Ответ: “Они равны, так как четырехугольник *ABB’A’*, где *AB* - данный отрезок, а *A’B’* – его соответствующая параллельная проекция, является параллелограммом (по определению, его противоположные стороны параллельны). Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. Если плоская фигура *F* лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция *F'* на эту плоскость будет равна фигуре *F*.

Действительно, определим преобразование фигуры *F* в фигуру *F'*, сопоставляя точкам фигуры *F* их проекции. Тогда, если *A* и *B* - точки фигуры *F*, и *A'*, *B'* - их проекции, то *ABB'A'* - параллелограмм (рис. 36).

Следовательно, *A'B'=AB*. Таким образом, это преобразование сохраняет расстояние между точками и, значит, фигуры *F* и *F'* равны.

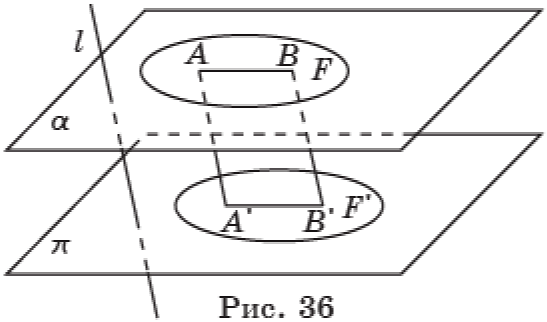
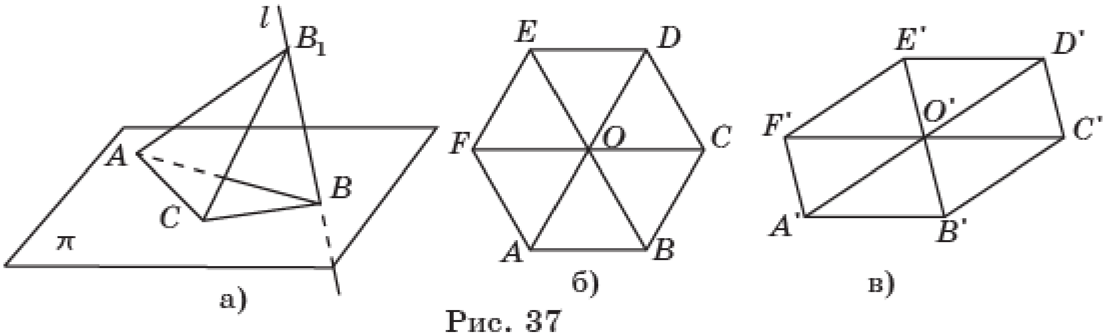


Рис. 36

Если фигура F лежит в плоскости, не параллельной плоскости проектирования π, то ее проекция F', вообще говоря, не равна фигуре F.

Простейшей плоской фигурой является треугольник. Параллельной проекцией треугольника, как следует из свойств параллельного проектирования, является треугольник или отрезок. При этом, если плоскость треугольника параллельна плоскости проектирования, то, как мы выяснили, его проекцией будет треугольник, равный исходному. Покажем, что в общем случае треугольник любой формы может служит параллельной проекцией равностороннего треугольника.

Действительно, пусть дан произвольный треугольник ABC в плоскости π (рис. 37, а).



а) б) в)

Рис. 37

Построим на одной из его сторон. например, AC равносторонний треугольник AB_1C так, чтобы точка B_1 не принадлежала плоскости π. Обозначим через l прямую, проходящую через точки B_1 и B. Тогда ясно, что треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника AB_1C на плоскость π в направлении прямой l.

Рассмотрим теперь проекции нескольких наиболее часто встречающихся многоугольников. Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией многоугольника является или многоугольник с тем же числом сторон, или отрезок.

Причем, поскольку при параллельном проектировании длины отрезков и углы, вообще говоря, не сохраняются, то проекцией равностороннего треугольника может быть треугольник с разной длиной сторон, проекцией прямоугольного треугольника может не быть прямоугольный треугольник. Аналогично, хотя проекцией параллелограмма является параллелограмм, проекцией прямоугольника может не быть прямоугольник, проекцией ромба может не быть ромб, проекцией правильного многоугольника является, вообще говоря, неправильный многоугольник. Однако, если в многоугольнике какие-нибудь две стороны параллельны, то их проекции также будут параллельны. Кроме этого, отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или параллельных прямых, сохраняется.

Построим параллельную проекцию правильного шестиугольника *ABCDEF* с центром в точке *O* (рис. 37, б). Выберем какой-нибудь треугольник, например, *AOB*. Его проекцией может быть произвольный треугольник *A'O'B'* на плоскости π (рис. 37, в). Далее отложим *O'D'=A'O'* и *O'E=B'O'*. Теперь из точек *A'* и *D'* проведем прямые, параллельные прямой *B'O'*; из точек *B'* и *E'* проведем прямые, параллельные прямой *A'O'*. Точки пересечения соответствующих прямых обозначим *F'* и *C'*. Шестиугольник *A'B'C'D'E'F'* и будет искомой проекцией правильного шестиугольника *ABCDEF*.

IV. Закрепление нового материала.

1. Постройте параллельную проекцию равностороннего треугольника. При каком условии равносторонний треугольник проектируется: а) в равносторонний треугольник; б) в равнобедренный треугольник.

Ответ. а) Равносторонний треугольник проектируется в равносторонний треугольник, если его плоскость параллельна плоскости проектирования; б) равносторонний треугольник проектируется в равнобедренный (или равносторонний) треугольник, если одна из его сторон параллельна плоскости проектирования, и направление проектирования составляет с прямой, на которой лежит эта сторона, прямой угол.

2. Плоскость параллелограмма не параллельна направлению проектирования. Какой фигурой при этом является его проекция? Изобразите ее.

Ответ. В этом случае параллельной проекцией параллелограмма будет параллелограмм.

3*. При каком условии квадрат проектируется в ромб?

Ответ. Квадрат проектируется в ромб (или квадрат), если одна из его диагоналей параллельна плоскости проектирования, а направление проектирования составляет с этой диагональю прямой угол, но не параллельно второй диагонали.

Урок 29

I. Устная работа.

1. Может ли параллельная проекция треугольника быть отрезком?

Ответ. Да, может, если плоскость треугольника параллельна направлению проектирования).

2. Какой фигурой может быть параллельная проекция прямоугольника?

Ответ. Отрезком, параллелограммом.

3. Верно ли утверждение, что в треугольнике, плоскость которого не параллельна направлению проектирования: а) медианы проектируются в медианы треугольника-проекции; б) высоты - в высоты; в) биссектрисы - в биссектрисы?

Ответ. а) Да; б) нет; в) нет.

4. Верно ли утверждение, что проекцией ромба, если он не проектируется в отрезок, будет ромб?

Ответ. Нет, так как при параллельном проектировании равенство непараллельных отрезков, вообще говоря, не сохраняется.

5. Как определить диагональ куба, имея модели трех таких кубов и линейку?

Решение представлено на рисунке 38.

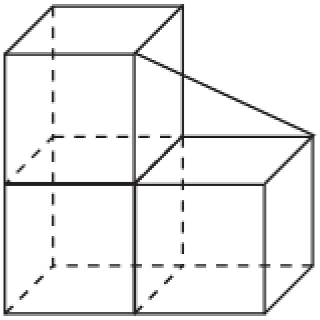


Рис. 38

II. Новый материал. Параллельная проекция круга.

Рассмотрим теперь вопрос о том, какая фигура является параллельной проекцией круга.

Пусть F - круг в пространстве, F'- его проекция на плоскость π в направлении прямой l. Если прямая l параллельна или лежит в плоскости круга, то его проекцией является отрезок, равный диаметру круга. Рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость круга (рис. 39).

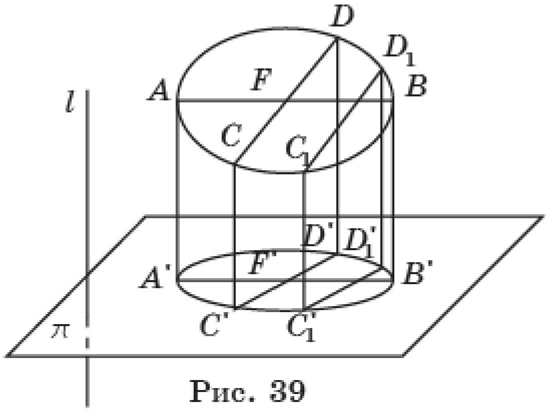


Рис. 39

Пусть AB - диаметр круга, параллельный плоскости π, и $A'B'$ его проекция на эту плоскость. Тогда $AB=A'B'$. Рассмотрим какой-нибудь другой диаметр CD круга и пусть $C'D'$ - его проекция. Обозначим отношение $C'D':CD$ через k. Так как при параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение длин параллельных отрезков, то для произвольной хорды C_1D_1, параллельной диаметру CD, ее проекция $C_1'D_1'$ будет параллельна $C'D'$, и отношение $C_1'D_1':C_1D_1$ будет равно k. Таким образом, проекция круга получается сжатием или растяжением какого-нибудь его диаметра в одно и то же число раз. Такая фигура на плоскости называется эллипсом. Например, на рисунке 40 изображен эллипс, полученный из круга сжатием в направлении диаметра CD в два раза.

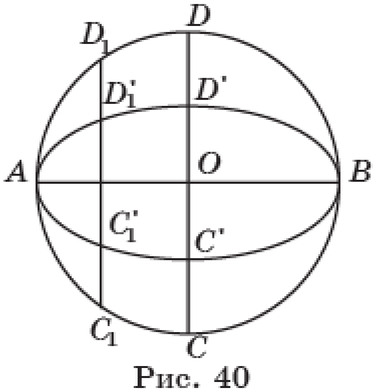


Рис. 40

III. Лабораторная работа.

Проводится по вариантам на листочках.

Вариант 1

Изобразите в параллельной проекции:

1. Квадрат.

2. Трапецию.

3. Круг (k=3).

4*. Предложите другой способ (один способ был предложен на уроке 28 во время объяснения нового материала) построения параллельной проекции правильного шестиугольника.

Вариант 2.

Изобразите в параллельной проекции:

1. Ромб.

2. Прямоугольник.

3. Круг (k=4).

4*. Задача 4* из первого варианта.

Замечание. В любой деятельности, в частности учебной, выделяют две стороны: внешнюю - предметную и внутреннюю - психологическую. Учение в любой области знания идет успешно, если первична внешняя деятельность, которая преобразуется во внутреннюю путем преобразования внешних действий предметной учебной деятельности во внутренние субъективные характеристики ученика, его сознание. Такой процесс психологи называют интериоризацией. Это очень важное положение, особенно для изучения стереометрии, курс которой начинается в 10 классе. Для решения этой серьезной проблемы мы, в частности, используем метод лабораторных работ.

В 50-60-е годы лабораторные работы систематически проводились при изучении школьного курса геометрии и были включены в обязательные программы. С приходом в школу новых программ по математике, новых учебников, для лабораторных работ просто не осталось места ни в курсе планиметрии, ни тем более в курсе стереометрии. Это неправильно, так как в обучении осталось все, ради чего они проводились. Отсутствие лабораторных работ, конечно, обедняет методы преподавания геометрии, В условиях, когда ослабевает интерес учащихся к математике, и, в частности, к стереометрии, нельзя пренебрегать ни одной возможностью, чтобы изменить это положение. Лабораторные работы могли бы сыграть в этом далеко не последнюю роль. С нашей точки зрения, этот метод не устарел, он актуален и в настоящее время, так как по-прежнему, актуально то, чему служили лабораторные работы: привлечению учащихся к математике, формированию интереса к ней, форма проведения лабораторных работ отвечает индивидуальным особенностям обучения многих учащихся, способствует активизации их математической деятельности.

В разработанном нами курсе стереометрии предусмотрено несколько лабораторных работ. Одну из них мы уже описали на уроках 7,8 - "Изготовление моделей многогранников из разверток и геометрического конструктора". Тема моделирования стереометрических тел будет в дальнейшем продолжена. Мы представим и другие лабораторные работы.

Задание на дом

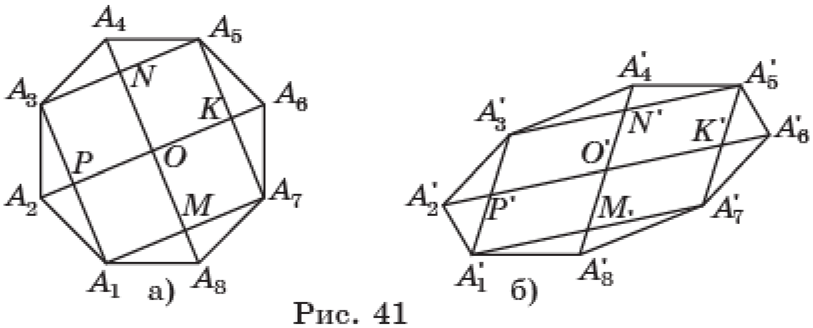
1.Выучить теорему о параллельной проекции фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проектирования. Знать построение параллельных проекций основных плоских фигур: треугольника, квадрата, ромба, прямоугольника, параллелограмма, трапеции, правильного шестиугольника, круга (п. 13 учебника).

2. Решить задачи.

1). Изобразите в параллельной проекции правильный шестиугольник *ABCDEF*, взяв в качестве исходной фигуры треугольник *AEC*.

2). Изобразите в параллельной проекции круг (k=4).

3*. Постройте параллельную проекцию правильного восьмиугольника (рис. 41, а).



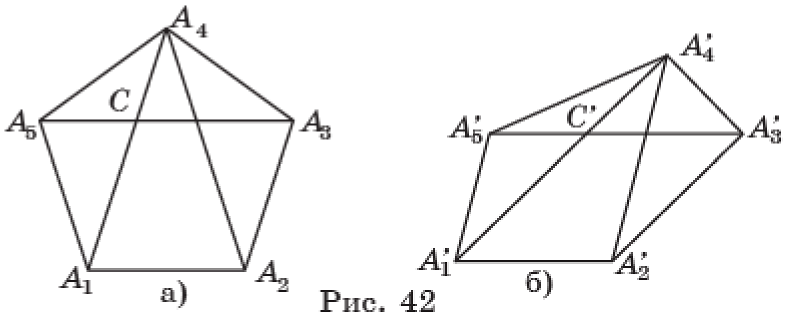
а) б)

Рис. 41

Решение. Сначала построим параллельную проекцию квадрата $A_1A_3A_5A_7$. Это будет параллелограмм $A_1'A_3'A_5'A_7'$ (рис. 41). Проведем через точку O', точку пересечения диагоналей параллелограмма, прямую, параллельную прямой $A_1'A_3'$. Она пересечет прямые $A_1'A_7'$ и $A_3'A_5'$ соответственно в точках M' и N'. Отложим на этой прямой отрезки $O'A_4' = O'A_8' =\sqrt{2O'N'}$, где$\sqrt{2O'N'}$ - гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника с длиной катета, равной $O'N'$. Аналогично получаем точки A_6' и A_2'. $OA_2' = OA_6' =\sqrt{2O'P'}$.

4*. Постройте параллельную проекцию правильного пятиугольника.

Решение. На рисунке 42, а изображен правильный пятиугольник $A_1...A_5$. C – точка пересечения диагоналей A_1A_4 и A_3A_5.



а) Рис. 42 б)

Строим параллельную проекцию треугольника $A_1A_2A_4$. Это треугольник $A_1'A_2'A_4'$ (рис. 42, б). Строим точку C', которая делит отрезок $A_1'A_4'$ в золотом отношении. Через точку C' проводим прямую, параллельную прямой $A_1'A_2'$. Через точки A_1', A_4' проводим прямые, параллельные соответственно прямым $A_2'A_4'$, $A_1'A_4'$ Находим точки A_6'. A_3' их пересечения с первой прямой. Пятиугольник $A_1'A_2'A_3'A_4'A_5'$ будет искомой параллельной проекцией правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

5**. Индивидуальные задания.

№ 1. - "Невозможные объекты" (сообщение по статье: Пенроуз Л., Пенроуз Р. Невозможные объекты //Квант.-1971.-№ 5.-С.26).

№ 2. - "Геометр и художник М. Эшер" (использовать статью: Табачников С. Вариации на тему Эшера //Квант.-1990.-№ 12.-С.2).

п. 14. Изображение пространственных фигур на плоскости (уроки 30, 31)

Цель. Изображение пространственных фигур на плоскости является одной из наиболее важных тем в стереометрии. Ученики должны знать основные положения, которыми нужно руководствоваться при изображении пространственных фигур на плоскости, уметь правильно изображать основные пространственные фигуры, в том числе, куб, прямоугольный параллелепипед, призму, пирамиду, цилиндр, конус и др.

Урок 30

I. Опрос учащихся.

Восьми ученикам даются индивидуальные задания (на карточках), которые они выполняют на своих местах.

Карточка 1

1. Верно ли утверждение: "Параллельная проекция прямой есть прямая?"

Ответ. Нет, так как прямая может проектироваться в точку, если она параллельна направлению проектирования.

2. Может ли проекция прямой быть параллельной самой прямой, данной в пространстве?

Ответ. Да, может, если данная прямая параллельна плоскости проектирования.

3. В какую фигуру может проектироваться ромб?

Ответ. Ромб может проектироваться в параллелограмм, в отрезок, если его плоскость параллельна направлению проектирования.

Карточка 2

1. Справедливо ли утверждение: "Параллельные прямые проектируются в параллельные прямые или в одну прямую?"

Ответ. Нет, так как параллельные прямые могут проектироваться в две точки, если они параллельны направлению проектирования.

2. При каком условии квадрат проектируется в квадрат?

Ответ. Квадрат проектируется в квадрат, если он лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

3. В какую фигуру может проектироваться трапеция?

Ответ. Трапеция может проектироваться в трапецию, в отрезок, если ее плоскость параллельна направлению проектирования.

Двое учащихся приглашаются за первую парту - опрос по теории.

№ 1.

- Дайте определение параллельного проектирования.

- Постройте параллельную проекцию прямоугольника.

№ 2.

- Сформулируйте основные свойства параллельного проектирования.

- Постройте параллельную проекцию параллелограмма.

II. Задание для класса.

1. Какая фигура может получиться при проектировании: а) прямой; б) треугольника? Изобразите соответствующие геометрические ситуации.

Ответ: а) Может получиться прямая или одна точка, если данная прямая, параллельна направлению проектирования; б) может получиться треугольник или отрезок, если плоскость треугольника параллельна направлению проектирования.

2. Постройте параллельную проекцию равнобедренной трапеции, у которой одно основание вдвое больше другого.

3*. При каком условии квадрат проектируется в прямоугольник? Ответ. Квадрат проектируется в прямоугольник, если одна из его

сторон параллельна плоскости проектирования, и направление проектирования составляет с прямой, на которой лежит эта сторона, прямой угол. При этом плоскость квадрата не параллельна плоскости проектирования.

К доске вызываем двух учеников. Первый решает классную задачу 2, второй - домашнюю задачу 1 (постройте параллельную проекцию правильного шестиугольника). Классную задачу 1 проверяем устно.

После решения классных задач, перед проверкой домашней задачи, ученики, выполнявшие индивидуальные задания на местах, сдают свои работы.

III. Новый материал.

Для изображения пространственных фигур на плоскости используют параллельную проекцию. Все рисунки пространственных фигур, рассмотренные нами ранее, были выполнены в параллельной проекции. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется плоскостью изображений, а сама проекция фигуры называется изображением.

Рассмотрим примеры изображений пространственных фигур. Изображение параллелепипеда строится, исходя из того, что все грани параллелограммы и, следовательно, изображаются параллелограммами.

Для большей наглядности невидимые ребра изображаются штриховой линией.

При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается параллельной одной из его граней. В этом случае две грани куба, параллельные плоскости изображений, изображаются равными квадратами. Остальные грани куба изображаются параллелограммами. Аналогичным образом изображается прямоугольный параллелепипед.

Для того, чтобы построить изображение призмы, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем из вершин многоугольника провести прямые, параллельные некоторой фиксированной прямой, и отложить на них равные отрезки. Соединяя концы этих отрезков, получим многоугольник, являющийся изображением второго основания призмы.

Для того, чтобы построить изображение пирамиды, достаточно построить многоугольник, изображающий ее основание. Затем выбрать какую-нибудь точку, которая будет изображать вершину пирамиды, и соединить ее с вершинами многоугольника. Полученные отрезки будут изображать боковые ребра пирамиды. Для большей наглядности невидимые боковые ребра изображаются штриховой линией.

IV. Закрепление нового материала.

1. Изображением какого многогранника является четырехугольник с проведенными в нем диагоналями?

Ответ. Тетраэдра. Уточнение - одна диагональ должна быть изображена штриховой линией.

2. Можно ли рисунок 43 принять за изображение куба?

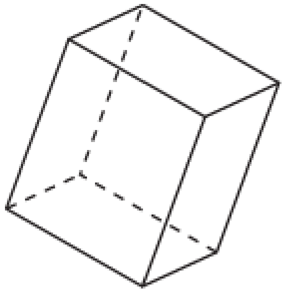


Рис. 43

Ответ. Да можно, куб расположен таким образом, что его грани не параллельны плоскости изображений.

3. Постройте изображение правильной шестиугольной призмы.

4*. Постройте изображение куба, две грани которого параллельны плоскости изображений.

Решение представлено, например, на рисунке 44, б, г, д, к, л, м).

V. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 31

I. Устная работа.

1. Приведите примеры геометрических фигур, расположенных в пространстве, которые проектируются: а) в прямую; б) в отрезок.

Ответ: а) прямая; пересекающиеся и параллельные прямые, плоскость которых параллельна направлению проектирования, но которые не параллельны направлению проектирования; б) отрезок, не параллельный направлению проектирования; плоские фигуры, расположенные в плоскостях, параллельных направлению проектирования.

2. На рисунке 44 показаны различные изображения одного и того же куба $A...D_1$, по-разному расположенного относительно плоскости изображений.

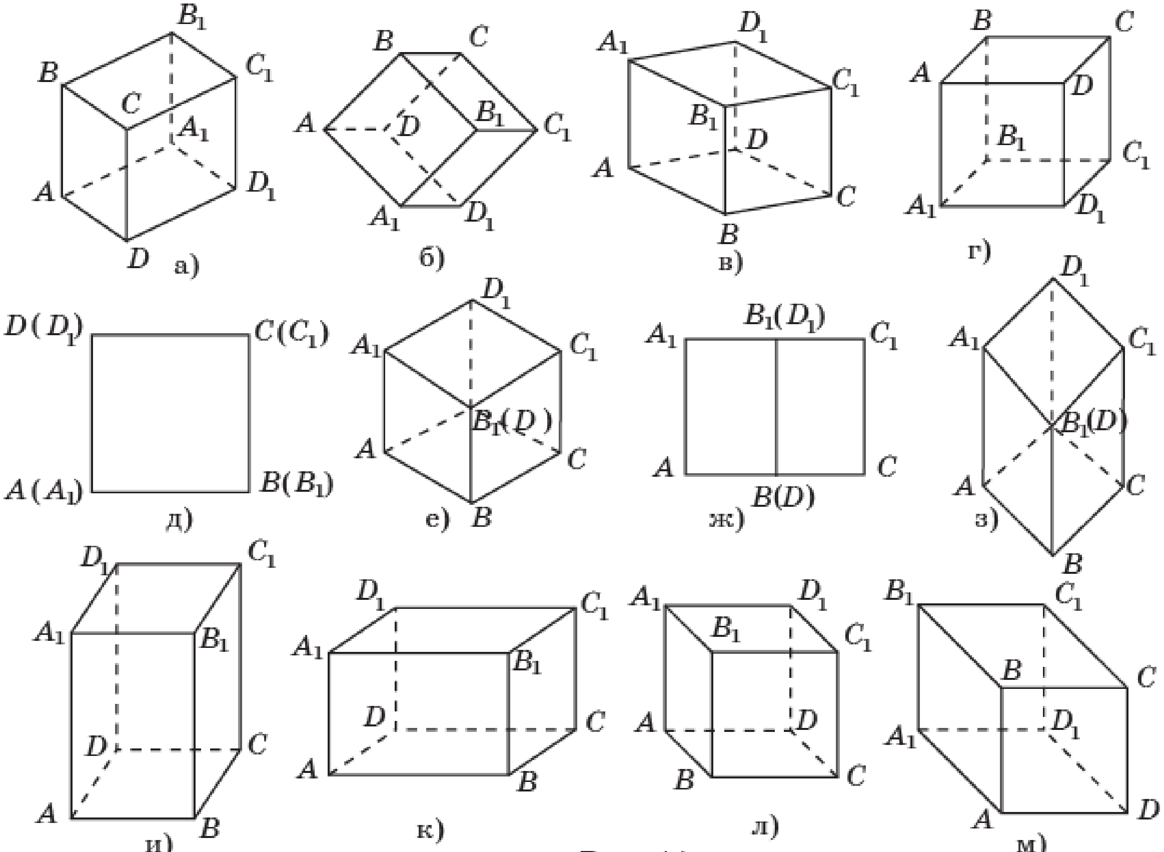


Рис. 44

Укажите изображения куба: а) две грани которого параллельны плоскости изображений; б) грани которого не параллельны плоскости изображений; в) для которых направление проектирования параллельно каким-нибудь ребрам куба или диагоналям его граней.

Ответ: а) рисунок 44, б, г, д, к, л, м; б) рисунок 44, а, в, е, ж, з, и; в) рисунок 44, д - изображение параллельно ребру куба AA_1; рисунок 44, е, ж, з - параллельно диагонали B_1D_1.

3. Как построить изображение ромба, имея только двухстороннюю линейку?

Решение показано на рисунке 45.

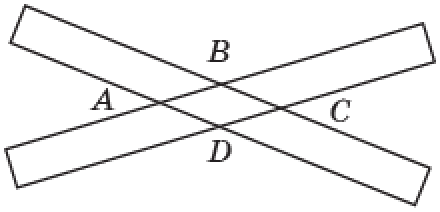


Рис. 45

4. Как построить две перпендикулярные прямые, имея только двухстороннюю линейку?

Решение. Провести в построенном ромбе *ABCD* в предыдущей задаче диагонали *AC* и *BD*. Прямая *AC* будет перпендикулярна прямой *BD*).

II. Домашние индивидуальные задания.

Обращаем внимание учащихся на удивительный факт: плоское изображение, подчиняясь определенным законам, способно передать впечатление о трехмерном предмете. Но при этом на плоскости можно изобразить и не существующие в действительности пространственные ситуации. Предлагаем учащимся изображения некоторых невозможных объектов (рис. 46). Для удобства мы делаем ксерокопии и раздаем по одной на каждую парту.

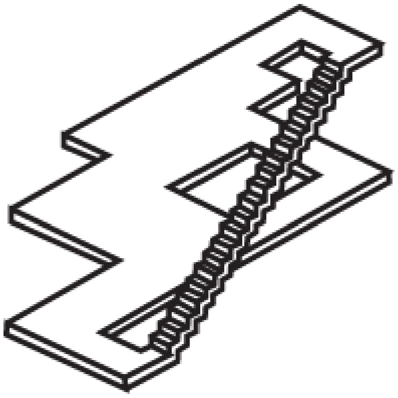


Рис. 46

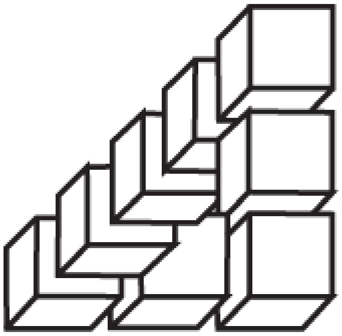


Рис. 47

Затем заслушиваем индивидуальное задание № 1. -"Невозможные объекты".

В современной живописи существует целое направление, которое называется импоссибилизм (*impossibility* - невозможность) - изображение невозможных фигур, парадоксов. Конечно, нужно познакомить учащихся с творчеством известного голландского художника М.Эшера (1898 – 1972).

Выступает ученик с индивидуальным заданием, посвященным творчеству Эшера (индивидуальное задание № 2). Доклад сопровождается демонстрацией всемирно известных гравюр художника таких, как "Бельведер", "Водопад", "Поднимаясь и опускаясь" (соответственно рисунки 47, 48, 49).

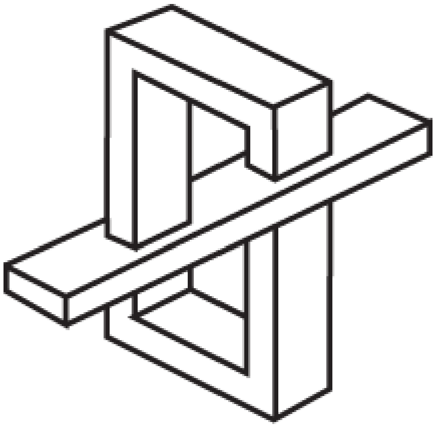


Рис. 48

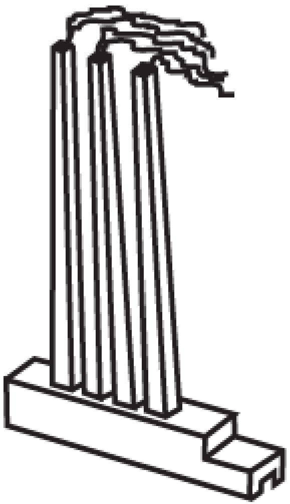


Рис. 49

Около 100 репродукций содержится в замечательной книге К.Левитина "Геометрическая рапсодия" (лучше взять 1-е изд., к которому приложен специальный альбом художника. - М.: Знание, 1976). Также репродукциями картин Эшера украшены многие обложки журнала "Квант" (например, 1979.-№ 3.-1-я с.обл.; 1990.-№ 12.-2-я с.обл.; 1977. -№ 3.-1-я с.обл. и мн.др.).

Также знакомим учащихся с творчеством современного шведского архитектора О. Рутерсварда и серией его художественных работ "Невозможные фигуры". Некоторые из них представлены на рисунке 46.

Задание на дом

1. Знать, как изображаются в параллельной проекции призмы, пирамиды.

2. Изобразить в параллельной проекции: а) правильную четырехугольную призму; б) правильную шестиугольную пирамиду.

3*. Муха движется по поверхности куба $A...D_1$ и проходит через все его вершины только один раз. Постройте путь наименьшей длины, если муха движется из вершины A в вершину D.

(Ответ. Это путь A-A_1-D_1-C_1-B_1-B-C-D).

п. 15. Сечения многогранников (уроки 32, 33)

Целью является закрепление ранее изученного материала относительно расположения прямых и плоскостей в пространстве, дальнейшее развитие пространственных представлений, выработка практических навыков в построении сечений многогранника плоскостью. Предлагаемые задачи имеют различный уровень трудности, и каждый ученик может выбрать уровень, приемлемый для себя.

Урок 32

I. Устная работа.

1. На плоскости изображений даны две точки. Изображениями каких геометрических фигур могут служить эти точки?

Ответ. Эти точки могут служить изображением: а) двух точек; б) двух прямых, параллельных направлению проектирования; в) прямой, параллельной направлению проектирования, и точки, не лежащей на ней.

2. При каком условии равносторонний треугольник проектируется: а) в отрезок; б) в равносторонний треугольник?

Ответ. Равносторонний треугольник проектируется: а) в отрезок, если его плоскость параллельна направлению проектирования; б) в равносторонний треугольник, если его плоскость параллельна плоскости проектирования.

3. Какое минимальное число цветов потребуется для окраски граней куба, чтобы соседние его грани были окрашены в разные цвета?

Ответ. Потребуется три цвета. Одинаковым цветом окрашиваются противоположные грани куба.

4. На рисунке 50 найдите развертки октаэдра. Укажите на них противоположные грани октаэдра.

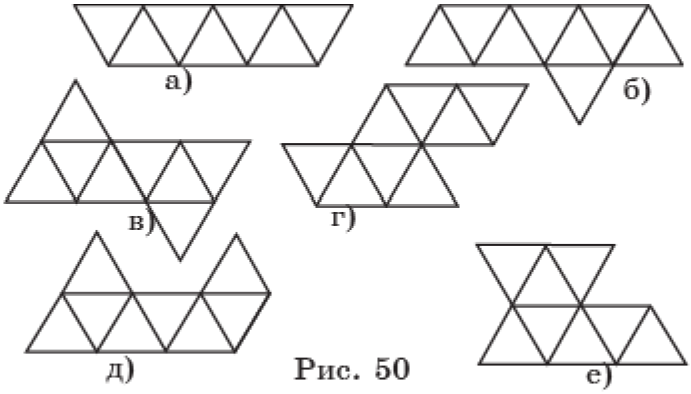


Рис. 50

Ответ. Развертка октаэдра изображена на рисунке 50, в,

II. Новый материал.

Прежде всего обсуждаем с учащимися вопрос о том, какой фигурой может быть пересечение многогранника и плоскости. На соответствующей модели демонстрируем, что пересечением многогранника и плоскости может быть пустое множество, точка (вершина многогранника), отрезок (ребро многогранника), грань многогранника, многоугольник, лежащий внутри многогранника. На этом последнем случае мы и останавливаемся более подробно.

Рассматриваем вопрос о построении сечений многогранника плоскостью на примере сечений куба.

Пусть дано изображение куба и три точки, принадлежащие ребрам этого куба, выходящим из одной вершины. Тогда для того, чтобы построить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, достаточно просто соединить эти точки отрезками. Полученный треугольник и будет искомым изображением сечения куба. Демонстрируем соответствующий рисунок.

Предположим теперь, что три точки, через которые проходит сечение куба, расположены таким образом, что две из них принадлежат ребрам, выходящим из одной вершины, а третья на ребре, параллельном одному из этих ребер. Предлагаем учащимся самостоятельно построить изображение сечения куба в этом случае, воспользовавшись тем, что линии пересечения параллельных граней куба плоскостью параллельны.

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам на прямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей через точки A', B' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (рис. 51).

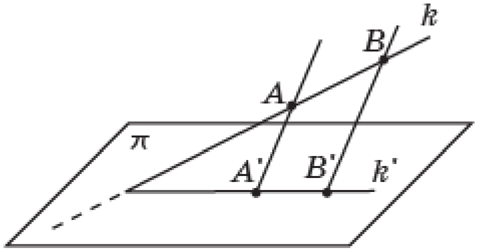
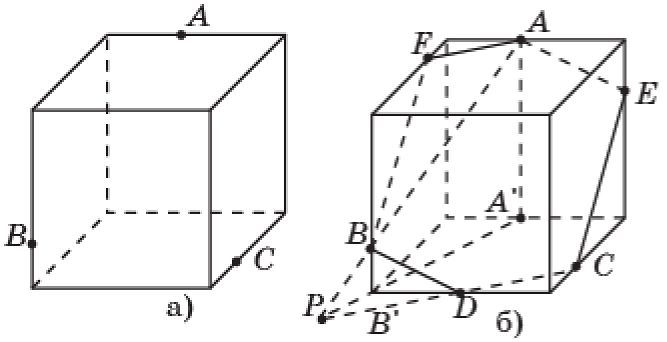


Рис. 51

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходящего через три точки, принадлежащие скрещивающимся ребрам этого куба (рис. 52, а).



а) б)

Рис. 52

Пусть A, B, C - три точки на скрещивающихся ребрах куба. Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции этих точек на основание куба в направлении ребра куба. Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она лежит в плоскости сечения и в плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 52, б).

III. Закрепление нового материала.

Вопросы.

- Может ли в сечении куба $A...D_1$ плоскостью получиться правильный треугольник? Равнобедренный треугольник?

Ответ. Да, может. Например, в сечении куба плоскостью, проходящей через его вершины A, B_1 и C получится равносторонний треугольник. Если плоскость проходит через вершины A, C и точку B_2, принадлежащую ребру BB_1, то в сечении куба плоскостью получится равнобедренный треугольник.

- Может ли в сечении куба $A...D_1$ плоскостью получиться квадрат? Прямоугольник?

Ответ. Да, может. В сечении куба плоскостью, параллельной какой-нибудь его грани, получится квадрат. Сечение куба плоскостью, проходящей через параллельные ребра, не принадлежащие одной грани, будет прямоугольником, который называется диагональным сечением куба. Диагональное сечение куба содержит две его диагонали.

Задачи.

1. Дан куб $A...D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

Решение показано на рисунке 53.

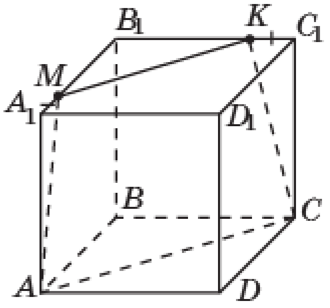


Рис. 53

Мы воспользовались свойством о том, что при пересечении двух параллельных плоскостей третьей, линии их пересечения с этой плоскостью параллельны: $MK \| AC$. $AKMC$ - равнобедренная трапеция, что нетрудно показать, рассмотрев равные прямоугольные треугольники AA_1M и CC_1K.

2*. Может ли в сечении куба $A...D_1$ плоскостью получиться неравнобедренная трапеция?

Ответ. Да, может, если, например, провести сечение через точки, принадлежащие ребрам куба AB, BC и A_1B_1, делящие данные отрезки в разных отношениях.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 33

I. Опрос учащихся.

Классу предлагаются следующие задачи:

1. Постройте сечение прямой треугольной призмы *A*...C_1 плоскостью, заданной тремя точками: $K \in CB$, $M \in A_1B_1$, $N \in AC$.

Решение показано на рисунке 54. *ML*||*KN, KLMPN* – искомое сечение.

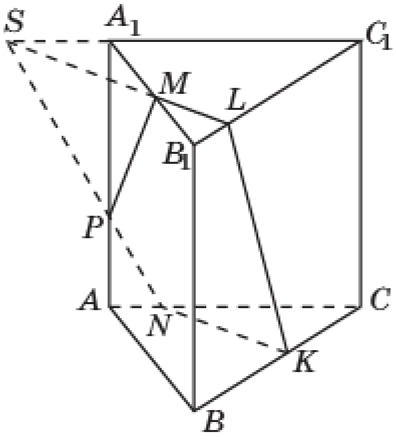


Рис. 54

2. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы *A*...F_1 плоскостью, проходящей через точки $P \in BB_1$, $Q \in FF_1$ и вершину *A*.

Решение представлено на рисунке 55. *AP*||*RS*; *PT*||*QR*; *AQ*||*TS*).

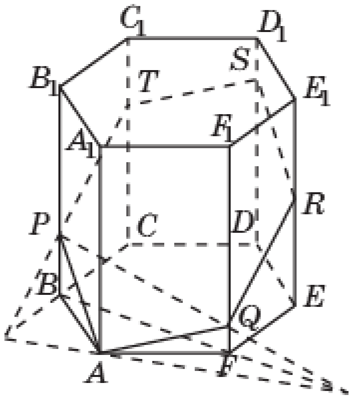


Рис. 55

3*. Постройте сечение прямой треугольной призмы *A*...C_1 плоскостью, заданной тремя точками: $K \in CB$, $M \in AA_1B_1B$, $N \in AA_1C_1C$.

Решение дано на рисунке 56, *KLPRS* – искомое сечение.

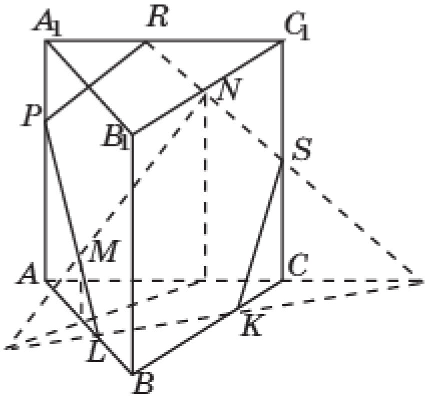


Рис. 56

К доске вызываем двоих учеников. Первый вместе с классом решает задачу 1. Второй воспроизводит на доске решение второй задачи из домашней работы. Дополнительные вопросы для них: "Почему для построения сечения задаются именно три точки?" и "Какой фигурой является сечение, изображенное на рисунке 57?"

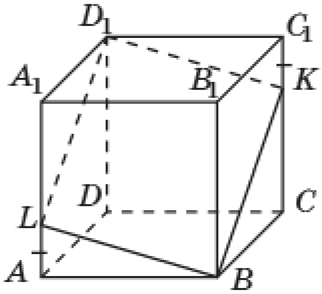


Рис. 57

Ответ к последнему вопросу. Сечением является параллелограмм, так как у него противоположные стороны параллельны. Вопрос к классу по этому же рисунку: "А может данное сечение быть ромбом?"

Ответ. Да, может, если точка K будет серединой ребра CC_1.

II. Лабораторная работа.

Вариант 1

1. Постройте сечение куба по трем точкам, расположенным так, как показано на рисунке 58, а.

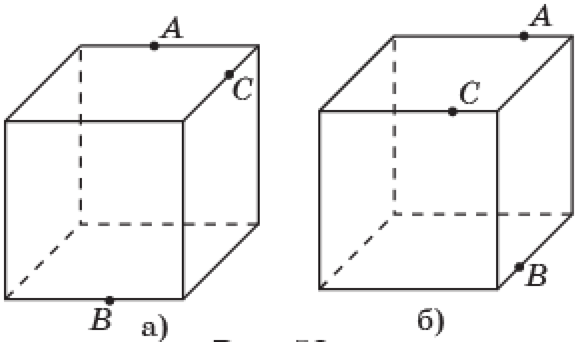


Рис. 58

2*. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки *A*, *B*, *C*, указанные на рисунке 59, а.

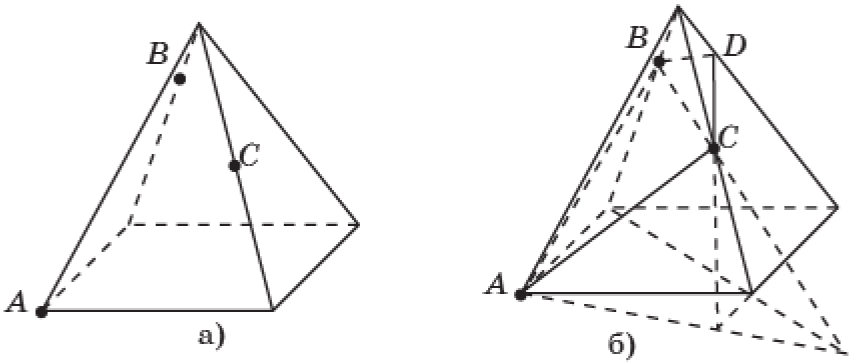


Рис. 59

Построение показано на рисунке 59, б, *ABDC* – искомое сечение.

Вариант 2

1. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, указанные на рисунке 58, б.

2*. Задача 2* из первого варианта.

II. Проверка правильности построения предложенных сечений. Проводится с подробным обсуждением с помощью кодоскопа.

III*. Решение задач повышенной трудности.

Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые лежат на скрещивающихся ребрах меньшего куба (рис. 60, а).

Решение представлено на рисунке 60, б. Сечение задано тремя точками *M*, *N* и *K*. $H_1H_2H_3H_4NH_5MH_6KH_7H_8H_9$ - искомое сечение.

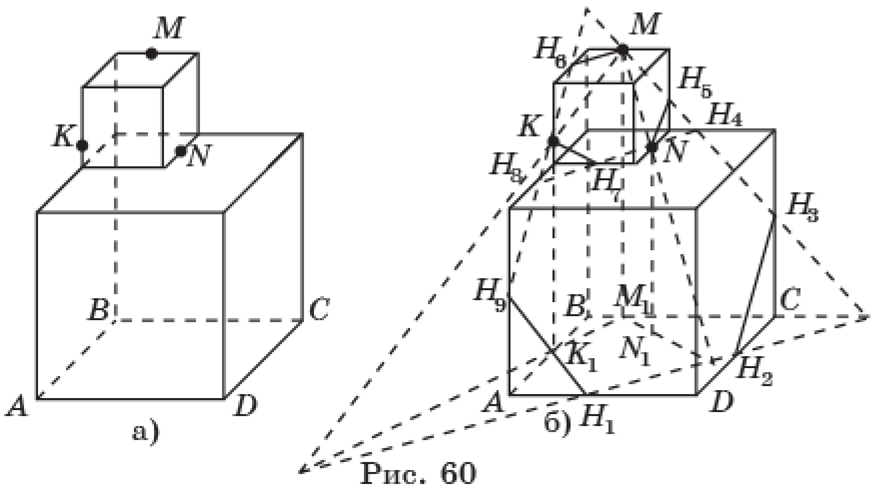


Рис. 60

Задание на дом

1. Разобрать представленную теорию (п. 15 учебника).

2. Решить задачи.

1) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, M, K, L, расположенные так, как показано на рисунке 61. При каких условиях получившийся треугольник будет равносторонним; равнобедренным; разносторонним?

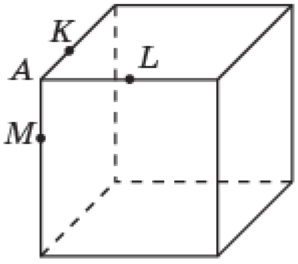


Рис. 61

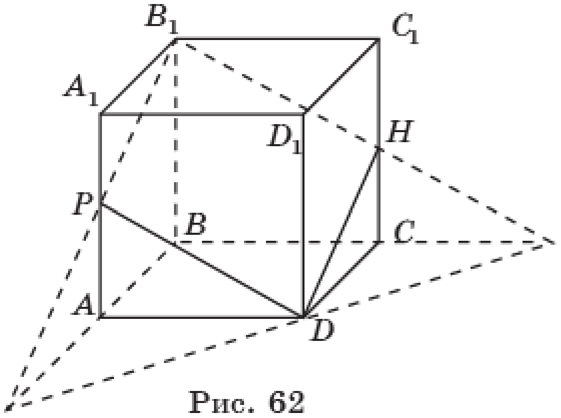


Рис. 62

Решение. Треугольник MKL будет искомым сечением. При $AK=AL=AM$ - треугольник будет равносторонним; при $AL=AM \neq AK$ - треугольник равнобедренный. Если отрезки AK, AL и AM имеют разную длину, то сечение - разносторонний треугольник.

2) Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

Решение показано на рисунке 62, B_1HDP – искомое сечение.

3) Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.

Решение представлено на рисунке 63. Стороны параллелограмма попарно параллельны срещивающимся ребрам тетраэдра.

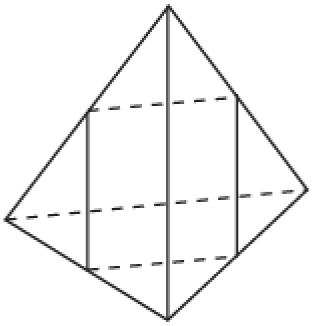


Рис. 63

4)* Найдите сечение куба плоскостью, имеющее наибольшую площадь.

Ответ. Правильный шестиугольник, центром которого является центр куба и плоскость которого перпендикулярна диагонали куба.

5**) Индивидуальное задание.

Подготовить сообщение об истории измерения углов между прямыми в пространстве. (Для подготовки этого выступления мы используем интересную книгу: Арманд Д. Как измерили Землю. - М.-Л.: Детская литература, 1941).

Урок 34

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. В параллелепипеде $A\ldots D_1$ найдите вектор, равный: а) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C_1B_1}$; б) $\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{DD_1}$; в) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

2. Изобразите параллельную проекцию куба $A\ldots D_1$, если: а) две грани куба параллельны плоскости проектирования; б) диагональ куба параллельна направлению проектирования.

3. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через одно из его ребер и центр одной из противолежащих граней. Найдите периметр сечения, если ребро куба равно a.

4*. Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией равнобедренного треугольника ABC, боковая сторона которого в два раза больше основания. Постройте изображение в этой проекции высоты треугольника ABC, проведенной из вершины основания.

Вариант 2

1. В параллелепипеде $A\ldots D_1$ найдите вектор, равный: а)$\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{A_1A}$; б) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{A_1D}$; в) $\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C}-\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1C_1}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

2. Изобразите параллельную проекцию куба $A\ldots D_1$, если: а) какое-нибудь ребро куба параллельно направлению проектирования; б) грани куба не параллельны плоскости проектирования.

3. В правильной 4-угольной призме $A\ldots D_1$ проведите сечение через середины ребер AB, AD и вершину C_1. Найдите периметр сечения, если все ребра призмы равны 1.

4*. Треугольник $A'B'C'$ является параллельной проекцией равнобедренного треугольника ABC, боковая сторона которого в два раза больше основания. Постройте изображение в этой проекции биссектрисы треугольника ABC, проведенной из вершины основания.

4.3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

п. 16. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых (уроки 35, 36)

Цель – сформировать понятие угла между прямыми и понятие перпендикулярности прямых в пространстве. Учащиеся должны знать соответствующие определения; уметь находить углы между прямыми в пространстве, в том числе, углы, которые образуют ребра многогранников; формулировать и доказывать теорему о перпендикулярности прямых в пространстве; знать некоторые практические способы приближенного измерения углов.

Урок 35

I. Анализ контрольной работы № 3.

II. Устная работа.

1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться семиугольник?

Ответ. Нет, не может. При сечении куба плоскостью могут получаться только *n*-угольники, где $3 \leq n \leq 6$, так как у куба 6 граней.

2. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный шестиугольник?

Ответ. Да, может. Обратимся к рисунку 64.

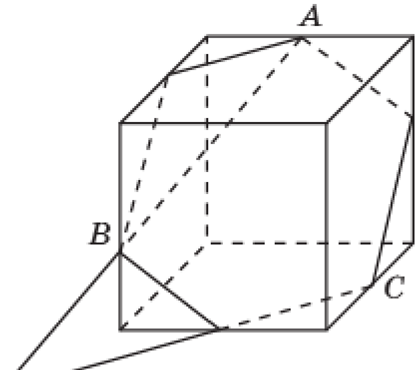


Рис. 64

Искомое сечение будет правильным шестиугольником, если точки *A*, *B*, *C* взять в серединах соответствующих ребер.

3. Может ли в сечении куба плоскостью получиться правильный пятиугольник?

Ответ. Нет, не может. Если в сечении получился пятиугольник, то плоскость пересекает пять граней куба, среди которых обязательно найдутся параллельные, которые она пересекает по параллельным прямым.

Таким образом, в получившемся пятиугольнике найдутся параллельные стороны, а у правильного пятиугольника, как известно, нет параллельных сторон.

4. Сколько у куба диагоналей и диагональных сечений?

Ответ. У куба 4 диагонали и 6 диагональных сечений (напомним, что мы назвали диагональным сечением куба сечение, которое проходит через параллельные ребра, не принадлежащие одной грани).

5. Какой угол образуют между собой пересекающиеся ребра куба?

Ответ. 90^o.

III. Новый материал.

Если две прямые в пространстве пересекаются, то они лежат в одной плоскости (следствие 3 из аксиом стереометрии – C_3) и поэтому для них определено понятие угла между прямыми.

Определение. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

Например, в кубе пересекающиеся ребра перпендикулярны, диагональ грани куба образует с ребрами этой грани углы 45^o.

Вопросы:

1. Какие два луча в пространстве можно считать сонаправленными?

2. Справедливо ли для пространства утверждение о том, что углы с сонаправленными сторонами равны?

После обсуждения ответов на данные вопросы рассматриваем теорему о равенстве углов с сонаправленными сторонами.

Теорема. Углы с сонаправленными сторонами равны.

Доказательство. Пусть лучи a_1, b_1 с вершиной в точке C_1 соответственно сонаправленны лучам a_2, b_2 с вершиной в точке C_2. Предположим, что лучи лежат в разных плоскостях γ_1, γ_2 (рис. 65).

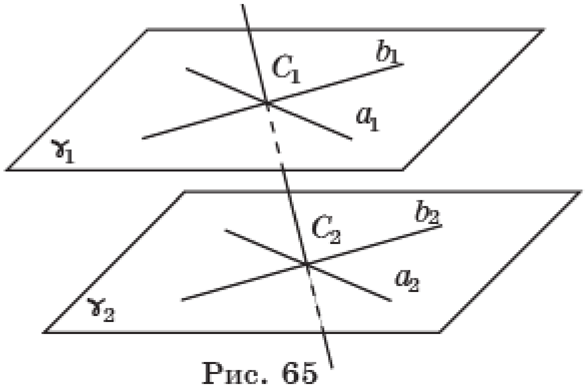


Рис. 65

Случай, когда лучи лежат в одной плоскости рассматривался в планиметрии. Заметим, что, по признаку параллельности, плоскости γ_1 и γ_2 параллельны. Параллельное проектирование в направлении прямой C_1C_2 на плоскость γ_2 переводит лучи a_1, b_1 в лучи a_2, b_2, соответственно. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны.

Следствие. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

Вопрос:

- Как теперь определить угол между скрещивающимися прямыми, если мы умеем определять угол между пересекающимися прямыми?

После ответа на этот вопрос вводим понятие угла между скрещивающимися прямыми.

Пусть a и b - скрещивающиеся прямые (рис. 66).

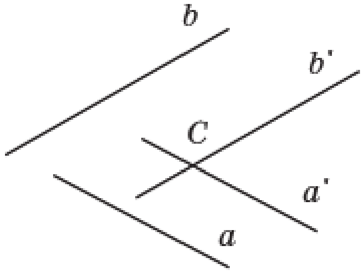


Рис. 66

Рассмотрим какую-нибудь точку C в пространстве и проведем через нее прямые a', b', параллельные прямым a и b соответственно. Угол между пересекающимися прямыми a', b' называется углом между скрещивающимися прямыми a и b.

Поскольку углы с параллельными сторонами равны, то это определение не зависит от выбора точки C. В частности, точка C может принадлежать прямой a или b. В этом случае в качестве прямой a' или b' следует взять саму прямую a или b соответственно.

Две скрещивающиеся прямые называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

Два отрезка будем называть перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.

Углом между двумя отрезками будем называть угол между прямыми, на которых лежат эти отрезки.

IV. Закрепление нового материала.

1. Найдите угол между пересекающимися диагоналями двух различных граней куба.

Ответ. Искомый угол равен 60°. Для его определения достаточно рассмотреть равносторонний треугольник, сторонами которого являются данные диагонали.

2. В правильной пирамиде, гранями которой являются правильные треугольники, найдите угол между высотами этих треугольников, проведенных к общему ребру.

Решение. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, где φ - искомый угол. Это легко видеть из рисунка 67: $AP \perp DC$; $BP \perp DC$; $\angle APB = \varphi$ - искомый. $PH \perp AB$; $AH=HB$. Из прямоугольного треугольника HPB имеем $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

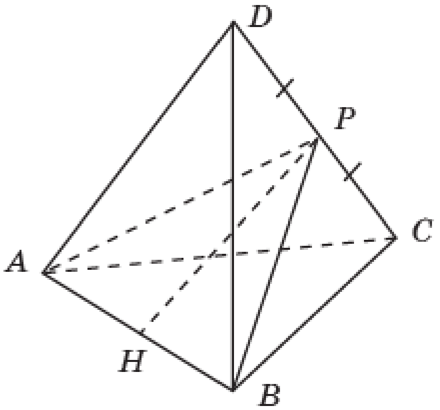


Рис. 67

3*. Используя свойства параллельного проектирования, покажите, что углы, образованные соответственно параллельными прямыми, равны.

Решение. Рассмотрим плоскости, в которых лежат данные углы. По признаку параллельности двух плоскостей, эти плоскости параллельны. Зададим параллельное проектирование одной из этих плоскостей на другую в направлении прямой, соединяющей вершины данных углов. При этом один угол перейдет в другой, из чего следует равенство углов.

Урок 36

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Углом в пространстве называется фигура …

2. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если …

3. Угол между пересекающимися ребрами куба равен …

4. Два луча в пространстве называются сонаправленными, если …

5. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, …

Вариант 2

1. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется …

2. Два отрезка в пространстве перпендикулярны, если …

3. Угол между диагональю грани куба и ребром, лежащим в этой грани равен …

4. Два луча в пространстве называются противоположно направленными, если …

5. Углы с сонаправленными сторонами …

II. Проверка математического диктанта.

III. Решение задач.

1. В правильной треугольной призме, боковыми гранями которой являются квадраты, найдите угол между пересекающимися диагоналями боковых граней.

Решение. Обозначим искомый угол φ и обратимся к рисунку 68.

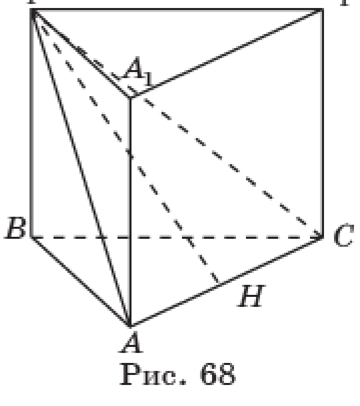


Рис. 68

$\angle AB_1C = \varphi$, $B_1H \perp AC$, $AH = HC$. Рассматриваем прямоугольный треугольник HB_1C: $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{HC}{B_1C}$, $HC = \frac{a}{2}$; $B_1C = a\sqrt{2}$, где a - длина ребра призмы. Таким образом, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Покажите, что через точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение. Возьмем точку, не принадлежащую прямой, и через эту точку и данную прямую проведем плоскость (следствие 2 из аксиом - C_2). В этой плоскости через данную на прямой точку можно провести прямую, перпендикулярную данной.

IV. Индивидуальное задание. – Сообщение на тему “Исторические сведения об измерении углов”. (Задание 5** из домашней работы к п. 15).

В сообщении мы обычно останавливаемся на представлении одного из первых угломерных инструментов - астролябии, которая была изобретена Гиппархом (180-125 гг. до н. э.) и усовершенствована впоследствии немецким ученым Региомонтаном (1436-1476).

Другим инструментом для измерения углов был квадрант, представляющий собой $\frac{1}{4}$ часть астролябии (см. рисунки в учебнике). Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно больших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся и в настоящее время для выполнения геодезических работ является теодолит, с устройством которого мы знакомим учащихся.

V. Практическая работа.

Существует также много способов приближенного измерения углов. Рассматриваем некоторые из них.

Ширина ногтя указательного пальца приближенно равна 1 см, а расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки 60 см, поэтому угол, под которым виден ноготь, приближенно равен 1°. Это следует из решения несложной геометрической задачи, в которой нужно найти угол φ при вершине равнобедренного треугольника, у которого основание (ширина ногтя) равно 1 см, а высота (расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки) равно 60 см.

Задачи для учащихся:

1. Измерьте ширину своего ногтя указательного пальца и расстояние от глаза до ногтя вытянутой руки. Рассчитайте угол, под которым виден ноготь.

2. Среди окружающих предметов найдите те, которые видны под углом в 1^0.

3. Измерьте углы, под которыми видны какие-нибудь окружающие вас предметы.

Представляем учащимся статью "Живой угломер" из популярной известной книги Я. И. Перельмана "Занимательная геометрия". Если учащиеся еще не знакомы с работами этого выдающегося математика-педагога, то можно представить несколько книг, например, "Живая математика", "Занимательная алгебра", "Занимательная арифметика" и др.

Задание на дом

1. Выучить: определение перпендикулярных в пространстве прямых; формулировку и доказательство теоремы об углах с сонаправленными сторонами (п. 16 учебника).

2. Решить задачи.

1). Сколько прямых, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную на ней точку?

Ответ. Бесконечно много.

2). Прямые a и b параллельны. Прямые a и c пересекаются под углом 45°. Укажите взаимное расположение прямых b и c (в общем случае) и угол между ними.

Ответ. 45°.

3). Концы отрезка AB принадлежат двум плоскостям α и β, которые пересекаются по прямой MN. В плоскости β проведена прямая BC, параллельная прямой MN. Прямая BC образует с прямой AB угол в 30°. Найдите углы между прямыми AB и MN.

Ответ. 30°.

4). Дан куб $A...D_1$. Найдите углы, образуемые: а) радиусами OK и O_1K_1 окружностей, вписанных в грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, проведенными в точки касания с ребрами DC и A_1D_1; б) прямыми BD и O_1K_1.

Ответ. а) 90°; б) 45°.

3*. Измерьте ширину двух пальцев руки и рассчитайте угол, под которым они видны на вытянутой руке.

п. 17. Перпендикулярность прямой и плоскости
(уроки 37, 38, 39)

Цель - рассмотреть одно из основных соотношений между прямыми и плоскостями - соотношение перпендикулярности. Учащиеся должны знать определения перпендикулярности прямой и плоскости, уметь формулировать и доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости, использовать его при решении задач.

Урок 37

I. Опрос учащихся.

Двое учащихся приглашаются за первую парту - опрос по теории. Задание для первого: формулировка и доказательство теоремы, заданной на дом. Для второго: определение перпендикулярных прямых; через точку на прямой провести перпендикулярную ей прямую, сколько таких прямых можно провести?

Четырем учащимся даются индивидуальные задания на листочках по карточкам, которые они выполняют на своих местах, содержание одинаковое, а именно:

Карточка

1). В кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и DB_1.

Ответ. 60°.

2). Через точку, не принадлежащую прямой, проведите перпендикулярную ей прямую. Сколько таких прямых можно провести?

Ответ. Проводим плоскость, проходящую через данную точку и прямую, и в ней проводим требуемую прямую. Можно провести только одну такую прямую.

3). Даны плоскость и параллельная ей прямая. Сколько прямых, перпендикулярных этой прямой, можно провести в данной плоскости?

Ответ. Ни одной.

II. Задание для класса.

1. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через три точки: E принадлежащей ребру A_1D_1, F - ребру AD и G - ребру DC. Какой фигурой является сечение?

Ответ. Сечением будет трапеция $EFGH$, H принадлежит ребру куба D_1C_1, и $EH \| FG$.

2. Точки K и M - середины соответственно ребер AB и CD правильного тетраэдра $ABCD$. Докажите, что $KM \perp AB$ и $KM \perp CD$. Найдите KM, если ребро тетраэдра равно 1.

Решение. Треугольник AMB - равнобедренный ($AM=BM$, как медианы в равных равносторонних треугольниках). KM - медиана равнобедренного треугольника, проведенная из вершины к основанию, следовательно $KM\perp AB$. Аналогично, рассмотрев равнобедренный треугольник CKD, получим $KM\perp CD$. $KM=\sqrt{MB^2-KB^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3*. Прямые a_1, b_1 являются проекциями прямых a, b. Перпендикулярны ли прямые a_1, b_1, если a и b перпендикулярны?

Ответ. Вообще говоря, нет.

К доске вызываются два ученика. Первый вместе с классом начинает решать задачу 1, второй - самостоятельно задачу 2. После решения первой задачи разбираем решение второй, и класс проверяет работу ученика, делавшего эту задачу.

Когда обе задачи разобраны, учащиеся, выполнявшие индивидуальные задания, должны сдать свои работы.

III. Новый материал.

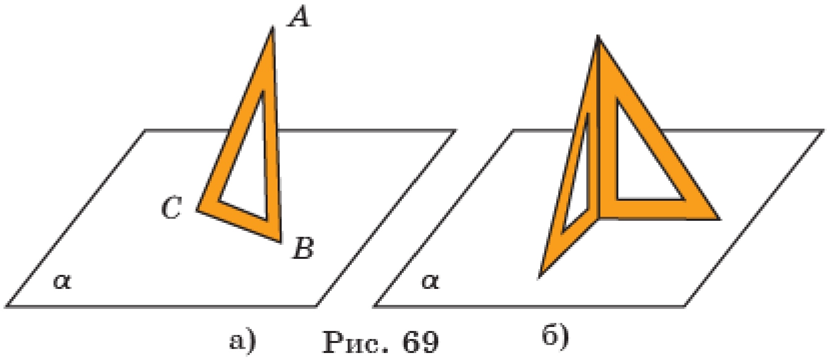
При изучении параллельности в пространстве сначала была определена параллельность двух прямых, затем прямой и плоскости и двух плоскостей. Отношение перпендикулярности рассматриваем в той же последовательности. На предыдущих уроках была определена перпендикулярность двух прямых в пространстве. Теперь нужно определить перпендикулярность прямой и плоскости. Можно предложить учащимся на модели продемонстрировать ситуацию, при которой прямая перпендикулярна плоскости. Это упражнение обычно не вызывает никаких затруднений, ребята интуитивно понимают, какое положение занимает в пространстве прямая, перпендикулярная некоторой плоскости. Далее обсуждается вопрос о том, как расположена прямая, перпендикулярная плоскости по отношению к прямым, лежащим в плоскости и дается определение.

Определение. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Вопросы:

- Будет ли прямая, перпендикулярная какой-нибудь прямой плоскости, перпендикулярна этой плоскости?

- Ответ. Нет, не будет. В качестве примера можно взять угольник и расположить его относительно плоскости стола или доски таким образом, как показано на рисунке 69, а: $AC\perp CB$, но AC не перпендикулярна плоскости α.



а) Рис. 69 б)

- Теперь пусть прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости. Будет ли она перпендикулярна плоскости?

- Ответ. Похоже, что будет, демонстрируем два угольника, которые располагаем, как показано на рисунке 69, б.

Переходим к доказательству теоремы, которая определяет достаточное условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема III. (Признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна и самой плоскости.

После доказательства теоремы замечаем, что параллельное проектирование в направлении прямой, перпендикулярной плоскости называется ортогональным проектированием. Ясно, что оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования.

IV. Закрепление нового материала.

1. Докажите, что перпендикулярные прямая и плоскость пересекаются.

Решение следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости.

2. Докажите, что в кубе $A...D_1$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости грани $ABCD$.

3. Докажите, что если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти прямые пересекаются.

Решение. Пусть две пересекающиеся прямые a_1 и a_2 плоскости α соответственно параллельны прямым b_1 и b_2 плоскости β. Предположим, что b_1 и b_2 параллельны. Тогда, по условию, $a_1 \parallel b_1$. Кроме того, $a_2 \parallel b_2$ и $b_2 \parallel b_1$. Следовательно, $a_2 \parallel b_1$. Таким образом, имеем две пересекающиеся прямые, a_1 и a_2, параллельные прямой b_1, что противоречит аксиоме параллельных.

4*. Прямая *a* пересекает плоскость α и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в данной плоскости прямые, перпендикулярные *a*?

Ответ. Да, существуют, см. рисунок 69, а.

Урок 38

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определение перпендикулярности прямой и плоскости. Формулировка признака перпендикулярности прямой и плоскости.

№ 2. – Доказательство признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). В кубе $A \ldots D_1$ докажите перпендикулярность BD_1 и AC.

Решение. AC перпендикулярна плоскости BDD_1, так как AC перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости BD и OO_1, где точки O и O_1 – центры граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости AC перпендикулярна плоскости BDD_1 и, следовательно, $AC \perp BD_1$.

2). В правильном тетраэдре $ABCD$ проведите плоскость, перпендикулярную ребру AB.

Ответ. Искомая плоскость CMD, где точка M – середина ребра AB.

II. Задание классу.

1. Докажите, что если боковое ребро параллелепипеда перпендикулярно его основаниям, то параллелепипед прямой.

Решение. Из условия задачи следует, что данное боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Так как все боковые ребра параллелепипеда параллельны, все они перпендикулярны плоскости основания (см. урок 37). Следовательно, все боковые грани параллелепипеда являются прямоугольниками, и параллелепипед – прямой.

2. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде сторона основания перпендикулярна скрещивающемуся с ней ребру.

Решение. Пусть $SABC$. Докажем, что $AB \perp SC$. Проведем $BH \perp SC$. Тогда $AH \perp SC$ (это следует из равенства боковых ASC и BSC, AH и BH – соответствующие высоты). Таким образом, SC перпендикулярна плоскости AHB (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда следует, что $AB \perp SC$.

3. Докажите, что если прямая a перпендикулярна плоскости α, и прямая b параллельна прямой a, то прямая b также перпендикулярна плоскости α.

Решение. Обозначим точки пересечения прямых a и b с плоскостью α через A и B соответственно (рис. 70).

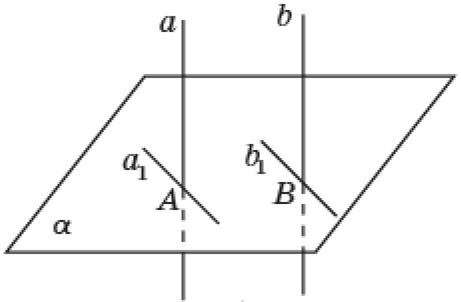


Рис. 70

Через точку B в плоскости α проведем произвольную прямую b_1 и покажем, что она перпендикулярна прямой b. Для этого рассмотрим прямую a_1, проходящую через точку A и параллельную b_1. Тогда $\angle(a,a_1) = \angle(b,b_1)$, как углы с соответственно параллельными сторонами. Но $\angle(a,a_1) = 90^\circ$, так как прямая a перпендикулярна плоскости α. Следовательно, $\angle(b,b_1) = 90^\circ$, т. е. прямые b и b_1 перпендикулярны. Поскольку прямая b_1 была взята произвольным образом, из этого следует, что прямая b перпендикулярна плоскости α.

4*. Может ли ортогональная проекция квадрата быть прямоугольником?

Ответ. Да, может, если у него одна сторона параллельна плоскости проектирования, а смежная с ней не параллельна этой плоскости.

III. Устная работа.

1). Поставьте на стол карандаш и проверьте с помощью чертежного треугольника, что он перпендикулярен плоскости стола. Какой геометрический факт при этом используется?

Ответ. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

2). Как нужно установить на крестовине срубленную елку, чтобы она была перпендикулярна к плоскости пола?

Ответ. Поставить елку перпендикулярно двум сторонам крестовины.

3). Как проверить с помощью чертежного треугольника, что стержень поршня цилиндра перпендикулярен к поверхности поршня?

Ответ. Нужно дважды приложить одну из сторон треугольника к поршню, чтобы вторая сторона занимала при этом разные положения. Используется признак перпендикулярности прямой и плоскости.

4). Сколько прямых и каким образом нужно начертить на поверхности четырехугольной деревянной балки, чтобы, направив по ним пилу, получить плоскую поверхность распила, перпендикулярную к ребру балки?

Ответ. Две прямые, перпендикулярные ребру балки, проходящие через одну его точку и лежащие в разных боковых гранях балки.

5). При каком взаимном расположении двух прямых через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой?

Ответ. В случае, если прямые перпендикулярны.

6). Определите вид треугольника, если через одну из его сторон можно провести плоскость, перпендикулярную другой стороне.

Ответ. Прямоугольный.

IV. Задачи на построение.

1. Через данную точку A пространства, не принадлежащую данной прямой a, проведите плоскость α, перпендикулярную этой прямой.

Построение. Через точку A и прямую a проводим плоскость β (следствие 2 из аксиом стереометрии – C_2). В этой плоскости через точку A проводим прямую AO, перпендикулярную прямой a, $O \in a$. Затем через прямую a проводим плоскостьγ, отличную от β. В плоскости γ через точку O проводим прямую OC, перпендикулярную a. Через две пересекающиеся прямые AO и OC проводим плоскость α (C_3). α – искомая плоскость, так как $a \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

2. Через точку A, принадлежащую плоскости α, проведите прямую a, перпендикулярную α.

Построение. Проведем в плоскости α через точку A две перпендикулярные прямые m и n. Далее через прямую m проведем произвольную плоскость β и в ней через точку A проведем прямую b, перпендикулярную прямой m. Через пересекающиеся прямые b и n проведем плоскость γ (C_3). Прямая $m \perp \gamma$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). В плоскости γ через точку A проведем прямую a, перпендикулярную прямой n. a – искомая прямая, так как $a \perp n$, $a \perp m$, значит, $a \perp \alpha$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

Урок 39

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если …
2. Если прямая перпендикулярна двум сторонам треугольника, то …
3. Достаточным условием перпендикулярности прямой и плоскости является …
4. Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно плоскости основания, так как …
5. Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если …

Вариант 2

1. Отрезок называется перпендикулярным плоскости, если …
2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости заключается в том, что …
3. Ортогональным проектированием называется …
4. Боковое ребро прямой призмы перпендикулярно плоскости основания, так как …
5. Две скрещивающиеся прямые называются перпендикулярными, если …

II. Проверка математического диктанта.

III. Геометрические места точек в пространстве.

Представляем учащимся следующие геометрические места точек (ГМТ) в пространстве:

1. ГМТ в пространстве, равноудаленных от трех данных точек *A*, *B*, *C*, не принадлежащих одной прямой.

Сначала рассматриваем аналогичную ситуацию на плоскости и приходим к выводу, что точка *O* - центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, равноудалена от данных точек. Искомым ГМТ в пространстве будет перпендикуляр к плоскости треугольника *ABC*, проведенный через точку *O*.

2. ГМТ в пространстве, равноудаленных от двух данных точек *A*, *B*.

Аналогом этой ситуации на плоскости является серединный перпендикуляр отрезка *AB*. Искомым ГМТ в пространстве будет плоскость, проходящая через середину отрезка *AB* и перпендикулярная к нему.

IV. Работа со стереочертежами.

Эта работа проводится по пособию Владимирского Г.А. Стереоскопические чертежи по геометрии. - М.: Учпедгиз, 1963. (Работаем с чертежами 8-15, с. 20-27).

Материал предлагаемого альбома позволяет значительно расширить число пространственных ситуаций, анализируемых с учащимися. Стереочертежи дают возможность рассмотреть ситуацию с различных точек зрения, в различных ракурсах, в движении, что очень важно на первых этапах ознакомления учащихся с пространственными образами.

Задание на дом

1. Выучить определения перпендикулярности прямой и плоскости, формулировку и доказательство теоремы III - признака перпендикулярности прямой и плоскости (п. 17 учебника).

2. Решить задачи.

1). Прямая AB пересекает плоскость α. В плоскости α расположен треугольник CDE; AB перпендикулярна CD и AB перпендикулярна DE. Каково взаимное расположение прямых AB и CE?

Решение. Из условия задачи следует, что AB перпендикулярна плоскости α, значит, AB перпендикулярна CE.

2). Два прямоугольных треугольника ABC и DBC, плоскости которых не совпадают, имеют общий катет, а через два других катета AC и CD проведена плоскость α. а). Докажите, что общий катет перпендикулярен любой прямой c плоскости α, проведенной через точку C. б). Можно ли опустить условие о несовпадении плоскостей данных треугольников? в). Можно ли опустить условие о том, что c проходит через точку C?

Решение. а). Из условия задачи следует, что прямая BC перпендикулярна плоскости ACD, названной α (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Следовательно, BC перпендикулярна любой прямой плоскости α. б). Нельзя, так как тогда BC должна быть перпендикулярна любой прямой плоскости α, что невозможно ($BC \subset$ α). в). Можно, BC перпендикулярна любой прямой плоскости α, пересекающейся или скрещивающейся с ней.

3). Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны a, b, c.

Ответ. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

4). Через данную точку A, принадлежащую прямой a, проведите плоскость α, перпендикулярную этой прямой.

Решение.Через данную прямую *a* проведем две плоскости β и γ. В каждой из них построим соответствующие прямые *b* и *c*, каждая из которых проходит через данную точку *A* и перпендикулярна прямой *a*. Через две пересекающиеся прямые *b* и *c* проведем плоскость α (C_3). А – искомая плоскость, так как перпендикулярна прямой *a* (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

5). Через данную точку *A*, не принадлежащую плоскости α, проведите прямую *a*, перпендикулярную α.

Решение. Возьмем точку *O*, принадлежащую плоскости α и проведем прямую *c*, перпендикулярную α (задача 2 из IV этапа урока 38). Если *A* принадлежит *c*, то задача решена. Если нет, через *A* и прямую *c* проведем плоскость δ (C_2) и в ней через точку *A* проведем прямую *a*, параллельную прямой *c*, *a* – искомая прямая.

3*. Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b*. Проведите прямую, пересекающую эти прямые и перпендикулярную им.

Решение. Через прямую *a* проведем плоскость α, параллельную прямой *b* (см. дом. задачу 4) к п. 7). Возьмем две точки *C* и *D* на прямой *b* и проведем через них перпендикулярные прямые *CH* и *DG*, точки *H* и *G* принадлежат плоскости α (рис. 71).

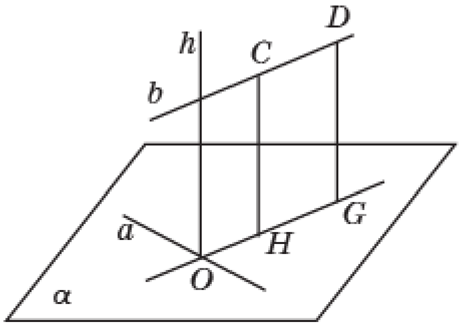


Рис. 71

Точка *O* – точка пересечения прямых *a* и *GH*. В плоскости прямоугольника *CDGH* через точку *O* проведем прямую *h*, перпендикулярную *GH* (или параллельную *CH*). *h* – искомая прямая, так как $h \perp b$, $h \perp a$ ($h \perp \alpha$, $h \perp a$).

п. 18. Перпендикуляр и наклонная (уроки 40, 41, 42)

Цель – ввести понятия перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость, высоты призмы, высоты пирамиды, наклонной к плоскости, проекции наклонной к плоскости; сформулировать и доказать теорему о трех перпендикулярах и показать ее применение при решении задач.

Урок 40

I. Устная работа.

1. В правильном тетраэдре *ABCD* через ребро *AB* и точку *H* – середину ребра *CD* проведена плоскость. Будет ли она перпендикулярна ребру *CD*?

Ответ. Да.

2. Если прямая перпендикулярна плоскости, то может ли она быть параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

Ответ. Не может.

3. Если прямая параллельна плоскости, то может ли она быть перпендикулярной к какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости?

Ответ. Может, например, скрещивающейся прямой, лежащей в данной плоскости и угол с которой равен 90^o.

4. Верно ли, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная: а) его диаметру; б) двум его диаметрам, перпендикулярна плоскости круга?

Ответ. а) Нет; б) да.

5. Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная: а) радиусу; б) двум радиусам, перпендикулярна плоскости круга?

Ответ. а) Нет; б) нет, так как два радиуса круга могут образовывать один диаметр.

6. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

Ответ. Плоскость, проходящая через середину отрезка, концами которого являются данные точки, и перпендикулярная этому отрезку.

7. Найдите геометрическое место точек, которые принадлежат прямым, проходящим через данную точку и перпендикулярным к данной прямой.

Ответ. Плоскость, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку.

II. Новый материал.

Рассмотрим точку *A*, не принадлежащую плоскости α (рис. 72).

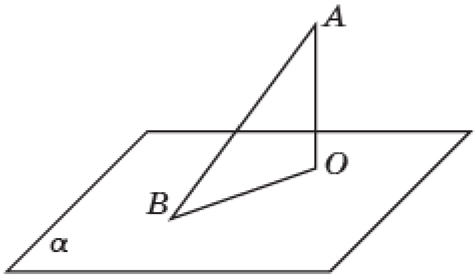


Рис. 72

Из нее проведем две прямые: AO, перпендикулярную α и AB, не перпендикулярную α. Точки A и B принадлежат плоскости α. Отрезок AO называется перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость α. Точка O называется основанием перпендикуляра. Отрезок AB называется наклонной, проведенной из точки A к плоскости α. Точка B называется основанием наклонной.

Вопрос.

- Какая фигура является ортогональной проекцией: а) перпендикуляра AO; б) наклонной AB на плоскость α?

- Ответ. а) Точка O – основание перпендикуляра; б) отрезок OB.

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также его длина называются высотой пирамиды.

Перпендикуляр, опущенный из точки основания призмы на плоскость другого ее основания, а также его длина называются высотой призмы.

Вопрос.

- Как вы думаете, что короче – перпендикуляр или наклонная, проведенные к плоскости из одной точки? Почему?

- Ответ. Короче перпендикуляр. Поясним учащимся это на рисунке 72: треугольник AOB – прямоугольный, AO – катет, AB – гипотенуза, следовательно, $AO < AB$.

Переходим к формулировке и доказательству теоремы о том, что перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

III. Закрепление нового материала.

1. В данном изображении куба $A \ldots D_1$ проведите перпендикуляр из вершины A_1 на плоскость ABC_1.

Решение. Искомым перпендикуляром будет отрезок A_1H, где H – точка пересечения диагоналей грани AA_1D_1D. Действительно, $A_1H \perp AD$ и $A_1H \perp AB$ (AB перпендикулярна плоскости грани AA_1D_1D). Итак, отрезок A_1H перпендикулярен плоскости ABC_1 (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

2. Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите проекцию отрезка AC, если AC = 37 см, AB = 35 см.

Решение. $BC=\sqrt{37^2-35^2}=12$ (см).

3. Отрезки двух наклонных, проведенных из одной точки к плоскости, равны 15 и 20 см. Проекция одного из этих отрезков равна 16 см. Найдите проекцию другого отрезка.

Решение. Пусть наклонные $AB=15$ см и $AC=20$ см, AO – перпендикуляр к данной плоскости, $OC=16$ см. Тогда $OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{AB^2-(AC^2-OC^2)}=9$ (см).

4*. Постройте ортогональную проекцию куба.

Решение. На рисунке 73, а изображена ортогональная проекция куба на плоскость, параллельную грани $ABCD$. На рисунке 73, б изображена ортогональная проекция куба в общем виде.

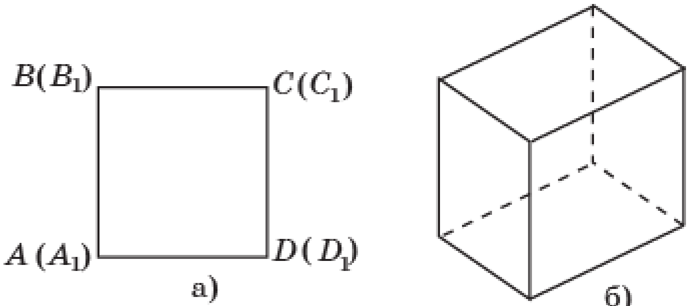


Рис. 73

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 41

I. Задание классу.

1. Докажите, что равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют равные ортогональные проекции на эту плоскость.

2. Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания. (Напомним, что правильной пирамидой мы назвали пирамиду, у которой основанием является правильный многоугольник, и все боковые ребра которой равны).

3*. Точка *M* равноудалена от всех точек окружности. Верно ли утверждение, что она принадлежит перпендикуляру к плоскости окружности, проведенном через ее центр?

II. Устная работа.

1). Какая прямая называется перпендикулярной плоскости?

2). Верно ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная его диаметру, перпендикулярна плоскости круга?

3). Как определить высоту пирамиды; призмы?

4). Можно ли в сечении куба плоскостью получить прямоугольный треугольник?

5). Можно ли в сечении куба плоскостью получить правильный восьмиугольник?

6). Как вы думаете, если наклонные к плоскости проведены из одной точки и равны, то будут ли равны их ортогональные проекции на эту плоскость?

7). Из двух различных точек, не принадлежащих плоскости, проведены к ней две равные наклонные. Верно ли утверждение, что их ортогональные проекции тоже равны? Почему?

III. Новый материал – теорема о трех перпендикулярах.

Рассмотрим с учащимися следующую задачу: «Точка *A* не принадлежит плоскости α, прямая *a* лежит в плоскости α. Сравните длину перпендикуляров, опущенных из точки *A* на данную плоскость и данную прямую. Могут ли они быть равными?».

Решение. Проведем $AO\perp\alpha$ и $AH\perp\alpha$. Из прямоугольного треугольника *AOH* следует, что гипотенуза *AH* больше катета *AO*. Если *AO*=*AH*, то точки *O* и *H* совпадают, т. е. прямая *a* проходит через основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. Итак, длина перпендикуляра от точки, не принадлежащей плоскости до плоскости меньше либо равна длине перпендикуляра от этой точки до прямой, лежащей в плоскости.

Вопросы.

- Пусть точки *O* и *H* не совпадают. Что можно сказать о взаимном расположениии прямой *a* и плоскости *AOH*?

- Ответ. Они перпендикулярны, так как *a* перпендикулярна двум прямым, лежащим в плоскости *AOH* (*AO*, *AH*).

- Даны точка *A*, не принадлежащая плоскости α, и прямая *a*, лежащая в плоскости α. Из точки *A* опущен на данную плоскость перпендикуляр *AO*, из точки *O* в плоскости α опущен перпендикуляр *OH* на прямую *a*. Что можно сказать о взаимном расположении наклонной *AH* и прямой *a*?

- Ответ. Они перпендикулярны, так как *a* перпендикулярна плоскости *AOH* (*a* перпендикулярна двум ее прямым *AO* и *OH*), значит, $a \perp AH$.

Далее формулируем и доказываем теорему о трех перпендикулярах (“Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной”).

IV. Закрепление нового материала.

1. Используя теорему о трех перпендикулярах, докажите, что в кубе $A \ldots D_1$ $AC_1 \perp BD$.

2. Сформулируйте утверждение, обратное теореме о трех перпендикулярах. Верно ли оно?

Ответ. «Если прямая, лежащая в плоскости перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ортогональной проекции данной наклонной на данную плоскость». Утверждение верно.

3*. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро - b. Найдите высоту пирамиды.

Ответ. Высота пирамиды равна $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Урок 42

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения перпендикуляра, наклонной к плоскости, проведенными из точки, не принадлежащей плоскости. Формулировка и доказательство теоремы о сравнении их длин.

№ 2. – Формулировка и доказательство теоремы о трех перпендикулярах.

№ 3. – Формулировка и доказательство утверждения, обратного теореме о трех перпендикулярах.

№ 4. – Сравнение длин наклонных, проведенных к плоскости из одной точки и их проекций.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Из точки A к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках B и C. Найдите отрезок AC, если $AB = 6$ см, $\angle BAC = 60^o$.

Ответ. 12 см.

2). В кубе $A\ldots D_1$ проведите из точки D_1 перпендикуляр на плоскость ACB_1.

Решение. Треугольник ACB_1 – равносторонний, D_1ACB_1 - правильный тетраэдр. Задача сводится к нахождению высоты D_1H, где H – центр треугольника ACB_1. Для того, чтобы найти H, нужно провести, например, B_1O, где O – середина AC и разделить отрезок B_1O в отношении 2:1, тогда B_1H:HO=2:1.

II. Задание для класса.

1. Докажите, что в правильной пирамиде высота проходит через центр основания.

2. В плоскости α проведите прямую, перпендикулярную наклонной AB, где точка B принадлежит данной плоскости.

Решение. Из точки A опускаем на плоскость α перпендикуляр AO. Проводим OB. Любая прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная OB, будет перпендикулярна наклонной AB (по теореме о трех перпендикулярах).

3*. Останется ли справедливой теорема о трех перпендикулярах, если в ее формулировке слова “лежащая в плоскости” заменить словами “параллельная плоскости”?

Решение. Пусть дана наклонная AB и перпендикуляр AO к плоскости α, прямая a параллельна плоскости α. и $a \perp OB$. Докажем, что в этом случае $a \perp AB$. Для этого через данную прямую a проведем плоскость α_1, параллельную плоскости α. Тогда наклонная AB и перпендикуляр AO к плоскости α пересекут плоскость α_1 соответственно в точках B_1 и O_1, причем $O_1B_1 \| OB$ (плоскость AOB пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым). Тогда $a \perp O_1B_1$ и, значит, $a \perp AB_1$ (по теореме о трех перпендикулярах, O_1B_1 – проекция наклонной AB_1 на плоскость α_1). Таким образом, $a \perp AB$.

III. Устная работа.

1). Верно ли утверждение: "Если из двух различных точек, не принадлежащих плоскости, проведены к ней две равные наклонные, то их проекции тоже равны"?

Ответ. Нет.

2). Сформулируйте утверждение, обратное утверждению первой задачи. Верно ли оно?

Ответ. "Две наклонные, проведенные к плоскости из двух различных точек, не принадлежащих ей и имеющие равные проекции, равны". Нет.

3). Из точки M, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонная. Как в плоскости α провести прямую, перпендикулярную наклонной?

Ответ. В плоскости α нужно провести прямую, перпендикулярную ортогональной проекции данной наклонной на данную плоскость (теорема о трех перпендикулярах).

4). Дан квадрат $ABCD$. Из некоторой точки M к его плоскости проведен перпендикуляр MH. Точка H соединена с точкой B. Какое положение должна занимать точка H в плоскости квадрата, чтобы угол ABH был: а) острым; б) тупым; в) прямым?

Ответ. а) Точка H лежит внутри квадрата $ABCD$; б) точка H лежит вне квадрата $ABCD$; в) точка H совпадает с точкой B.

5). Дан квадрат $ABCD$. AK - отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата; точка K соединена с вершинами B и C. Докажите, что треугольник KBC - прямоугольный.

Ответ. Треугольник KBC - прямоугольный, так как $KB \perp BC$ (теорема о трех перпендикулярах).

6). Дан треугольник ABC. Из точки A проведен перпендикуляр DA к его плоскости. Из точки D проведен перпендикуляр к прямой BC. Какие условия должны быть выполнены, чтобы этот перпендикуляр: а) пересекал отрезок BC в его внутренней точке; б) проходил через один из его концов; в) пересекал его продолжение?

Ответ. а) Углы *B* и *C* треугольника *ABC* - острые; б) угол *B* или угол *C* - прямой; в) угол *B* или угол *C* - тупой.

IV. Самостоятельная работа на повторение.

Вариант 1

Дан куб *A…*D_1, с ребром 2. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро CC_1 и точку *K* – середину ребра A_1D_1.

Ответ. $2\sqrt{5}$.

Вариант 2

Дан куб *A…*D_1, с ребром 4. Найдите площадь сечения, проходящего через ребро *AB* и точку *M* – середину ребра CC_1.

Ответ. $8\sqrt{5}$.

Задание на дом

1. Выучить: определения перпендикуляра и наклонной к плоскости; высоты призмы, пирамиды; теорему о сравнении наклонной и перпендикуляра, проведенных из одной точки к одной плоскости; теорему о трех перпендикулярах (п. 18 учебника).

2. Решить задачи.

1). Из точки *A* к данной плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, пересекающие плоскость соответственно в точках *B* и *C*. Найдите отрезок *AB*, если $AC = 2\sqrt{10}$см, $BC = 3AB$.

Решение. Из условия задачи следует, что $AC^2=AB^2+9AB^2$, откуда $AB=2$ см.

2). Отрезок *BC* длиной 12 см является проекцией отрезка *AC* на плоскость π. Точка *D* принадлежит отрезку *AC* и $AD:DC=2:3$. Найдите отрезок *AD* и его проекцию на плоскость π, если известно, что $AB=9$ см.

Решение. В треугольнике *ABC* проведем $DH\perp BC$, точка *H* принадлежит ортогональной проекции *BC*, *HB* – ортогональная проекция *AD* на плоскость π. $AC=\sqrt{9^2+12^2}=15$ (см). Таким образом, $AD=\frac{2}{5}AC=6$ (см), $HB=\frac{2}{5}BC=4{,}8$ (см).

3). Сторона ромба равна *a*, острый угол 60°. Через одну из сторон ромба проведена плоскость. Проекция другой стороны на эту плоскость равна *b*. Найдите проекции диагоналей.

Решение. Пусть дан ромб *ABCD* со стороной *a* и острым углом *A*, равным 60°. Тогда его диагонали $BC=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Сторона *AD* лежит в плоскости α (рис. 74).

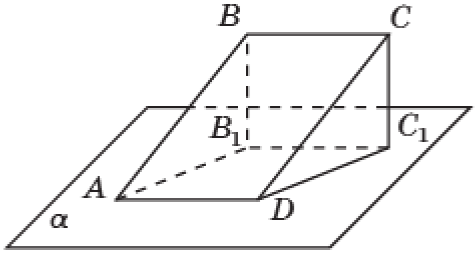


Рис. 74

BB_1 и CC_1 – перпендикуляры к данной плоскости, причем BB_1=CC_1, так как $BC\|\alpha$. Из прямоугольного треугольника ABB_1 сторона $BB_1=\sqrt{AB^2-AB_1{}^2}=\sqrt{a^2-b^2}$. Тогда из прямоугольных треугольников BB_1D и CC_1A найдем соответствующиеортогональные проекции диагоналей ромба, а именно, $BD_1=\sqrt{BD^2-BB_1{}^2}=b$; $C_1A=\sqrt{AC^2-CC_1{}^2}=\sqrt{2a^2+b^2}$.

3*. Повторить материал пунктов 16, 17, 18 учебника.

Урок 43
Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. В кубе $A...D_1$ вершина D соединена с серединой K диагонали AB_1 грани ABB_1A_1. Найдите угол между прямыми DM и AB_1.

2. Из вершины B квадрата $ABCD$ к его плоскости проведен перпендикуляр BM. Определите (относительно углов) виды треугольников ABM, BCM, ADM и CDM.

3. Из вершины K треугольника KLM проведен к его плоскости перпендикуляр KN. Из точки N опущен перпендикуляр на сторону ML. Найдите условие, при котором этот перпендикуляр пересечет продолжение стороны ML.

4. Из точки E, не принадлежащей плоскости π, проведены к ней две наклонные EF и EG, образующие равные углы с прямой FG, лежащей в плоскости π. Докажите, что ортогональные проекции этих наклонных на плоскость π равны.

5*. Докажите, что ортогональная проекция на данную плоскость π угла AOB, образованными двумя равными наклонными OA и OB к этой плоскости, больше угла между самими наклонными.

Вариант 2

1. В кубе $A...D_1$ вершина C_1 соединена с центром O грани $ABCD$. Найдите угол между прямыми C_1O и BD.

2. Из вершины C правильного шестиугольника $ABCDEF$ к его плоскости проведен перпендикуляр CK. Определите (относительно углов) виды треугольников BCK, CDK, DEK, EFK.

3. Из вершины G треугольника GHP проведен перпендикуляр GQ к плоскости треугольника. Из точки Q опущен перпендикуляр на сторону HP. Найдите условие, при котором этот перпендикуляр пройдет через одну из вершин H или P треугольника.

4. Из вершины угла к его плоскости проведена наклонная, которая составляет со сторонами угла равные углы. Докажите, что ортогональной проекцией этой наклонной является биссектриса данного угла.

5*. Докажите, что ортогональная проекция угла на плоскость, проходящую через одну из его сторон, меньше, равна или больше данного угла, смотря по тому, является ли данный угол соответственно острым, прямым или тупым

п. 19. Угол между прямой и плоскостью (уроки 44, 45)

Цель - познакомить учащихся с важным понятием угла между прямой и плоскостью. Учащиеся должны уметь находить углы между ребрами и гранями многогранников.

Урок 44

I. Проверка контрольной работы № 4.

II. Устная работа.

1. Дайте определение перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

2. Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в центре и перпендикулярная его радиусу, перпендикулярна плоскости круга? Ответ поясните.

3. К плоскости прямоугольника в точке пересечения диагоналей восстановлен перпендикуляр. Верно ли утверждение, что произвольная его точка будет равноудалена от вершин прямоугольника? Почему?

4. Найдите диагональ куба, ребро которого равно 1.

5. Найдите геометрическое место точек, одинаково удаленных от трех точек, не принадлежащих одной прямой.

III. Новый материал.

Сначала учащимся предлагается найти угол между диагональю AC_1 куба $A...D_1$ и диагональю AC его нижнего основания. Нетрудно видеть, что тангенс искомого угла будет равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Затем найти угол между ребром CC_1 и AC. Это прямой угол.

Далее следует вопрос о том, как определить углы между AC_1 и плоскостью грани $ABCD$, между CC_1 и той же плоскостью?

Считают, что прямая, перпендикулярная плоскости образует с этой плоскостью прямой угол. Углом между наклонной и плоскостью естественно считать угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. Даем соответствующее определение.

Теперь сравним угол между наклонной и плоскостью и угол между этой наклонной и произвольной прямой, лежащей в данной плоскости и отличной от ортогональной проекции наклонной. Обратимся к рисунку 75: AH – перпендикуляр, AB – наклонная к плоскости α, BH – ее ортогональная проекция на эту плоскость. Следовательно, углом между AB и α является угол ABH. Теперь в плоскости α через точку B проведем произвольную прямую c, отличную от BH. Отложим на c $BC=BH$ и докажем, что $\angle ABH < \angle ABC$. Действительно, в треугольниках ABH и ABC сторона AB – общая,

$BH=BC$ и $AH<AC$ (это следует из прямоугольного треугольника AHC, в котором AH - катет, AC - гипотенуза). Следовательно, $\angle ABH < \angle ABC$.

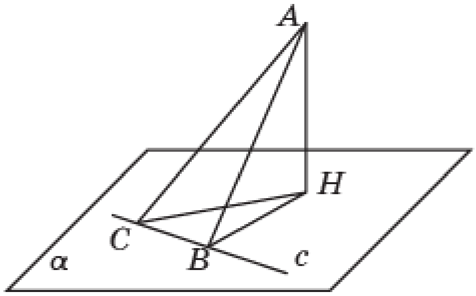


Рис. 75

Записываем формулировку и доказательство теоремы.

IV. Закрепление нового материала.

1. Найдите угол между диагональю AC_1 куба и плоскостью его грани $ABCD$, приняв ребро куба за 1.

Ответ. tg φ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, где φ - искомый угол.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро - b. Найдите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Ответ. cos φ = $\frac{a\sqrt{3}}{3b}$, где φ - искомый угол.

3. Докажите, что равные наклонные, проведенные к плоскости из точки, не принадлежащей плоскости, образуют с ней равные углы.

Решение. Пусть наклонные AB и AC равны, точки B и C принадлежат плоскости α, $AO \perp \alpha$. Тогда прямоугольные треугольники AOB и AOC равны (по гипотенузе и катету). Отсюда следует, что равны углы ABO и ACO.

Урок 45

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения: угла между прямыми в пространстве, между прямой и плоскостью.

№ 2. – Формулировка и доказательство теоремы об угле между прямой и плоскостью.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). В прямоугольном параллелепипеде $A \ldots D_1$ найдите углы между BD_1 и плоскостями граней: а) $ABCD$; б) AA_1B_1B, если $AB=a$, $BC=b$, $B B_1=c$.

Ответ. а) $\cos \angle D_1BD = \frac{BD}{DD_1} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$;

б) $\cos \angle ABD_1 = \frac{A_1B}{A_1D_1} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{b}$.

2). Докажите, что две параллельные наклонные прямые к одной плоскости образуют с ней равные углы.

3*). Сформулируйте утверждение, обратное утверждению предыдущей задачи 2. Верно ли оно?

Ответ. «Если наклонные прямые к одной плоскости образуют с ней равные углы, то они параллельны». Утверждение неверное.

II. Задание классу.

1. Под каким углом к плоскости нужно провести отрезок, чтобы его ортогональная проекция на эту плоскость была вдвое меньше самого отрезка?

Ответ. 60°.

2. Будут ли в пирамиде боковые ребра равны, если они образуют равные углы с плоскостью основания? Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

Решение. Из равенства углов наклона боковых ребер к плоскости основания пирамиды следует равенство боковых ребер пирамиды и то, что ортогональной проекцией вершины пирамиды будет центр окружности, описанной около основания. Это вытекает из равенства соответствующих прямоугольных треугольников, вершинами каждого из которых является вершина пирамиды, ортогональная проекция этой вершины на плоскость основания и одна из вершин основания (треугольники равны по катету и острому углу). Обратно утверждение: “Если в пирамиде равны боковые ребра, то они одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды”. Это верное утверждение. Его справедливость следует из равенства рассмотренных прямоугольных треугольников (только в этом случае они будут равны по гипотенузе и катету).

3. Дан треугольник *ABC* и точка *K*, которая не принадлежит его плоскости. *KE*, *KD*, *KF* – перпендикуляры, опущенные из точки *K* на стороны треугольника. Эти отрезки одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что точка *K* ортогонально проектируется в центр вписанной в треугольник окружности.

Решение. Опустим из точки *K* перпендикуляр *KO* на плоскость данного треугольника. Прямоугольные треугольники *KOD*, *KOE*, *KOF* равны (по катету и острому углу). Из равенства треугольников вытекает, что *OD*=*OE*=*OF*, следовательно, точка *O* – центр окружности, вписанной в треугольник, так как каждый из отрезков *OD*, *OE*, *OF* перпендикулярен соответствующей стороне треугольника *ABC* (это вытекает из утверждения, обратного теореме о трех перпендикулярах).

III. Устная работа.

1). С какими прямыми, лежащими в плоскости, наклонная образует углы, равные углу между этой наклонной и плоскостью?

Ответ. С прямыми, параллельными ортогональной проекции данной наклонной на данную плоскость.

2). Дан треугольник *ABC* и точка *D*, которая не принадлежит его плоскости. Наклонные *DA*, *DB*, *DC* составляют равные углы с плоскостью треугольника. Докажите, что ортогональной проекцией точки *D* на плоскость треугольника является центр описанной около треугольника окружности.

Ответ. Из равенства данных углов следует равенство наклонных и их проекций. Следовательно, точка, в которую проектируется точка *D*, одинаково удалена от всех вершин треугольника *ABC*, т.е. является центром, описанной около треугольника окружности.

3). Может ли ортогональная проекция отрезка на плоскость быть: а) меньше отрезка; б) равна отрезку; в) больше отрезка; г) точкой?

Ответ. а), б), г) Может; в) не может.

4). В кубе $A \ldots D_1$ за плоскость ортогональной проекции принята плоскость грани *ABCD*. Что будет проекцией: а) точки пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$; б) точки пересечения грани BB_1C_1C; в) грани $A_1B_1C_1D_1$; г) грани AA_1D_1D; д) ребра B_1C_1; е) ребра BB_1?

Ответ. а) Точка пересечения диагоналей грани *ABCD*; б) середина ребра *BC*; в) грань *ABCD*; г) ребро *AD*; д) ребро *BC*; е) вершина *B*.

5). Даны треугольник и точка, не принадлежащая его плоскости. Перпендикуляры, опущенные из точки на стороны треугольника, одинаково наклонены к плоскости треугольника. Докажите, что ортогональной проекцией данной точки на плоскость треугольника является центр вписанной в треугольник окружности.

Ответ. Из равенства углов наклона данных отрезков следует равенство самих отрезков и их проекций. Следовательно, точка, в которую проектируется данная точка, одинаково удалена от всех сторон треугольника, т.е. является центром окружности, вписанной в треугольник.

6). Может ли катет равнобедренного прямоугольного треугольника образовать с плоскостью, проходящей через гипотенузу, угол в 60^0? Какова наибольшая величина угла между катетом и этой плоскостью?

Ответ. Нет, наибольшая величина угла 45°.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определение угла между наклонной и плоскостью, формулировку и доказательство теоремы об угле между наклонной и плоскостью (п. 19 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и не содержащей его гранью.

Ответ. $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$, где φ – искомый угол.

2). 7). Только основание равнобедренного треугольника лежит в плоскости α. Какой из углов больше: угол наклона боковой стороны треугольника к плоскости α или угол наклона к плоскости α высоты треугольника, проведенной к его основанию?

Решение. Пусть основание AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α. Опустим из вершины C перпендикуляр CO на плоскость α и проведем высоту CD треугольника ABC. Рассмотрим прямоугольные треугольники AOC и DOC. Они имеют общий катет OC и $DO < AO$. Следовательно, $\angle OAC < \angle ODC$, т. е. угол наклона боковой стороны треугольника к плоскости α меньше угла наклона высоты треугольника к этой плоскости.

3). Одна из двух скрещивающихся прямых пересекает плоскость под углом 60°, а другая перпендикулярна этой плоскости. Найдите угол между данными скрещивающимися прямыми.

Ответ. 30°.

4). Через сторону квадрата проведена плоскость, составляющая с диагональю квадрата угол 30°. Найдите углы, которые образуют с плоскостью стороны квадрата, наклонные к ней.

Ответ. 45°.

3*. Докажите, что если проекция наклонной на данную плоскость образует равные углы с двумя непараллельными прямыми, лежащими в этой плоскости, то и сама наклонная образует с данными прямыми равные углы.

Решение. Пусть дана наклонная AB и перпендикуляр AO к плоскости α. Проведем прямые a и b в данной плоскости через точку B, причем углы между BO и a, BO и b равны (рис. 76).

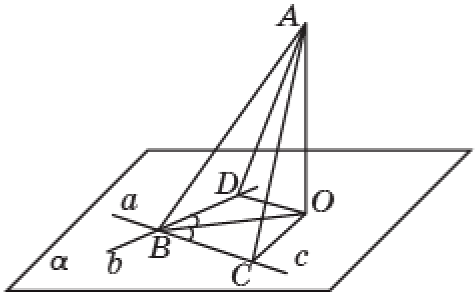


Рис. 76

Из точки O опустим перпендикуляры OC и OD соответственно на прямые a и b; $OC=OD$, так как BO – биссектриса угла DBC. Из теоремы о трех перпендикулярах следует, что $AC\perp a$ и $AD\perp b$, причем $AC=AD$ (это вытекает из равенства прямоугольных треугольников AOC и AOD – по катетам). Таким образом, прямоугольные треугольники ABC и ABD равны (по гипотенузе и катету), откуда следует, что $\angle ABC=\angle ABD$.

п. 20. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями (уроки 46, 47, 48)

Цель – сформировать понятия расстояния между точкой, не принадлежащей плоскости и этой плоскостью, между параллельными и скрещивающимися прямыми, между параллельными плоскостями.

Урок 46

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Углом между наклонной и плоскостью называется …
2. Углом между отрезком и плоскостью называется …
3. Равные наклонные, проведенные к плоскости, образуют с ней …
4. В кубе $A...D_1$ прямая AA_1 образует с плоскостью ABC угол …
5. В кубе $A...D_1$ прямая A_1D образует с плоскостью DCD_1 угол …

Вариант 2

1. Углом между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью называется …
2. Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из …
3. Две параллельные наклонные, проведенные к одной и той же плоскости, образуют с ней …
4. В кубе $A...D_1$ прямая AB образует с плоскостью BCC_1 угол …
5. В кубе $A...D_1$ прямая BC_1 образует с плоскостью ACD угол …

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал.

Вспоминаем из планиметрии, что расстояние между точками определялось длиной отрезка, концами которого являлись данные точки. Чтобы найти расстояние от точки, не принадлежащей прямой, до этой прямой, следовало опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую, длина которого и определяла расстояние между точкой и прямой. В пространстве расстояние между данными геометрическим фигурами определяется аналогично. Расстояние между двумя точками равно длине отрезка, который они определяют. Расстояние между точкой и прямой определяется длиной перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, проведенного в плоскости, которая определяется данными точкой и прямой.

Теперь определим расстояние между точкой, не принадлежащей плоскости и этой плоскостью. Естественно, этим расстоянием считать длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость.

Вопрос.

- Почему именно длину такого перпендикуляра разумно считать расстоянием от точки до плоскости, а не длину какой-либо наклонной, проведенной из этой точки к данной плоскости?

- Ответ. Из свойств наклонных и перпендикуляра, проведенных из одной точки к плоскости следует, что длина перпендикуляра наименьшая из всевозможных длин наклонных, проведенных из данной точки к данной плоскости.

Далее вспоминаем, как определялось расстояние между параллельными прямыми. Из произвольной точки одной прямой опускался перпендикуляр на другую. Его длина считалась расстоянием между данными прямыми. По аналогии можно ввести расстояние между параллельными плоскостями, как длину перпендикуляра из произвольной точки одной из плоскостей, опущенного на другую плоскость.

Вопрос.

- Зависит ли это расстояние от выбора точки?

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Расстояние между двумя параллельными плоскостями не зависит от выбора точки, из которой опускают перпендикуляр.

Доказательство. Пусть даны параллельные плоскости α и β, точки A_1, A_2 плоскости α и их ортогональные проекции B_1, B_2 на плоскость β. Тогда расстояние от точки A_1 до плоскости β равно A_1B_1, а расстояние от точки A_2 до плоскости β равно A_2B_2. Четырехугольник $A_1B_1B_2A_1$ - прямоугольник. Следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

IV. Закрепление нового материала.

1. Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α равно ортогональной проекции наклонной.

Ответ. 45°.

2. В кубе $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной A_1 и: а) ребром CD; б) диагональю BD; в) диагональю AC_1.

Ответ. а) $a\sqrt{2}$; б) $a\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. В единичном кубе найдите расстояние между параллельными гранями?

Ответ. Искомое расстояние равно ребру куба, т.е. 1.

Урок 47

I. Математический диктант.

Вариант 1

1. Расстоянием между двумя точками называется …

2. Расстоянием между прямой и не принадлежащей ей точкой называется …

3. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется …

4. Расстоянием между вершиной и основанием пирамиды является …

5. В кубе $A...D_1$ с ребром 1 найдите расстояние между вершиной C_1 и плоскостью диагонального сечения BDD_1B_1.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вариант 2

1. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется …

2. Расстоянием между плоскостью и не принадлежащей ей точкой называется …

3. Расстоянием между двумя точками в пространстве называется …

4. Расстоянием между основаниями призмы является …

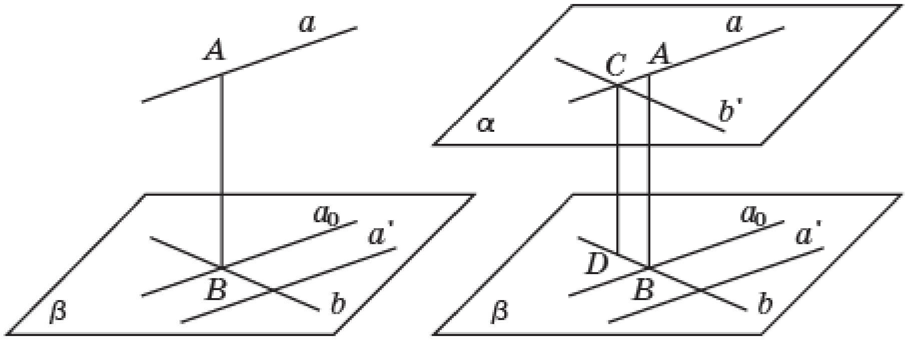
5. В кубе $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между вершиной B_1 и плоскостью диагонального сечения ACC_1A_1.

Ответ. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

II. Проверка математического диктанта.

III. Новый материал. – общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

Сначала вспоминаем решение задачи о построении плоскости, проходящей через одну из двух скрещивающихся прямых и параллельной другой прямой. На рисунке 77, а прямые a и b – скрещивающиеся. Прямая a параллельна плоскости β, $a'\|a$, $b\subset\beta$. Ортогональную проекцию прямой a на плоскость β назовем a_0. Заметим, что $a_0\|a$, следовательно, $a_0\|a'$. Значит, прямые a_0 и b лежат в плоскости β и пересекаются, пусть в точке B. Из точки B восстановим перпендикуляр к плоскости β. Он лежит в плоскости, которая определяется параллельными прямыми a и a_0, т. е. пересекает прямую a, пусть в точке *A*. *AB* – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых *a* и *b*.



а) Рис. 77 б)

Далее рассматриваем теорему об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Обращаем внимание учащихся на то, что теорема имеет две части, в ней нужно доказать, что: 1) общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым существует; 2) он единственен.

Первое доказывается построением. Для доказательства второго утверждения предположим, что существует еще один общий перпендикуляр *CD* скрещивающихся прямых *a* и *b* (рис. 77, б). Тогда через точку *C* проведем прямую $b' \| b$, значит, $CD \perp b'$. Через *a* и *b*' проходит плоскость α, причем $\alpha \| \beta$ (по признаку параллельности двух плоскостей). Следовательно, $AB \| CD$. Другими словами, прямые *a* и *b* лежат в одной плоскости, определяемой этими параллельными прямыми, что противоречит условию. Таким образом, предположение неверно, и существует единственный общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

IV. Закрепление нового материала.

1. Докажите, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через них.

Решение непосредственно следует из вышеприведенных рассуждений (*AB* – расстояние между параллельными плоскостями α и β – рисунок 77, б).

2. В кубе $A...D_1$ с ребром 1 найдите расстояние между скрещивающимися прямыми *AC* и B_1D_1 и их общий перпендикуляр.

Решение. Искомое расстояние равно 1. Общим перпендикуляром будет отрезок OO_1, где точки *O* и O_1 – центра граней соответственно *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$.

3*. Докажите, что длина общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым является кратчайшим расстоянием между точками этих прямых.

Решение. Вернемся к рисунку 77, б. Докажем, что $AB<CD$. Для этого рассмотрим ортогональную проекцию H точки C на плоскость β. Точка H должна принадлежать прямой a_0 (a_0 - ортогональная проекция прямой a на плоскость β). Тогда $AB=CH$, но $CH<CD$ (катет меньше гипотенузы, треугольник CHD прямоугольный). Итак, $AB<CD$, где CD – произвольный отрезок, концы которого принадлежат данным скрещивающимся прямым.

Урок 48

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Определения расстояний между точкой и прямой, двумя параллельными прямыми, двумя параллельными плоскостями.

№ 2. – Теорема о расстоянии между параллельными плоскостями.

№ 3. – Определение расстояния между скрещивающимися прямыми. Доказательство существования общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых.

№ 4. – Доказательство того, что существует единственный общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). В кубе $A...D_1$ с ребром b найдите расстояние между скрещивающимися прямыми BC и A_1C_1 и их общий перпендикуляр.

Решение. Это расстояние равно b, данные прямые лежат в параллельных плоскостях ABC и $A_1B_1C_1$, расстояние между которыми равно ребру данного куба. Общим перпендикуляром будет отрезок OO_1, где точки O и O_1 - центры граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.

2). Ребро правильного тетраэдра равно 1. Найдите расстояние между его скрещивающимися ребрами.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

II. Задание для класса.

1. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания a и боковым ребром b найдите расстояние между скрещивающимися ребрами.

Ответ. $\frac{\sqrt{3a^2-b^2}}{2}$.

2. Для куба $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися прямыми: а) AD и A_1C_1; б) AC_1 и DD_1; в) AD и A_1B_1.

Ответ. а) a; б) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) a.

3*. Найдите в единичном кубе $A...D_1$ расстояние между скрещивающимися прямыми AC и B_1D.

Решение. AC перпендикулярна плоскости B_1DD_1 (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости: $AC \perp OO_1$, где точки O и O_1 - центры граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$). Таким образом, AC перпендикулярна любой прямой плоскости B_1DD_1. Из точки O (середина AC и BD) в прямоугольном треугольнике B_1DB ($\angle B=90^\circ$) из точки O

опустим перпендикуляр OH на B_1D (рис. 78). OH – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых AC и B_1D. Найдем OH, используя подобие прямоугольных треугольников B_1DB и ODH (по углам), $B_1B:OH = B_1D:OD$, откуда $OH=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

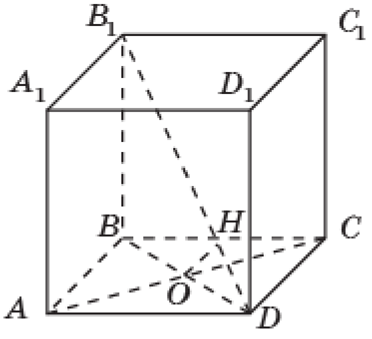


Рис. 78

III. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить: определения расстояний между точкой и плоскостью, между двумя параллельными плоскостями, двумя скрещивающимися прямыми. Знать формулировку и доказательство теорем о расстоянии между параллельными плоскостями и о существовании и единственности общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым (п. 20 учебника).

2. Решить задачи.

1). Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведена наклонная к этой плоскости. Определите угол между этой наклонной и плоскостью α, если расстояние от точки A до плоскости α в два раза меньше самой наклонной.

Ответ. 30^0.

2) Определите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых.

Ответ. Плоскость, параллельная данным прямым, проходящая между ними и отстоящая от каждой из них на расстояние $\frac{h}{2}$, где h – расстояние между данными прямыми.

3). Определите геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей.

Ответ. Плоскость, параллельная данным плоскостям, проходящая между ними и отстоящая от каждой из них на расстояние $\frac{h}{2}$, где h – расстояние между данными плоскостями.

4). Найдите расстояние от вершины A_1 единичного куба $A\ldots D_1$ до плоскости AB_1D_1.

Решение. Искомое расстояние равно высоте A_1H правильной треугольной пирамиды $A_1AB_1D_1$. Ее основанием является треугольник AB_1D_1 со стороной $\sqrt{2}$, боковые ребра равны 1, H – центр основания. Тогда $AH=\frac{2}{3}AO_1$, где точка O_1 – середина B_1D_1. Таким образом, $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$; $A_1H=\sqrt{AA_1{}^2-AH^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, расстояние от вершины A_1 до плоскости AB_1D_1 равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4). Для куба $A...D_1$ с ребром a найдите расстояние между скрещивающимися прямыми:; а) AC и B_1D_1; б) AC и DD_1; в) AC_1 и BD.

Ответ. а) a; б) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $a\frac{\sqrt{6}}{6}$.

5). В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, высота - h. Найдите боковое ребро пирамиды.

Ответ. $\sqrt{2(a^2-h^2)}$.

3*. Ребро куба $A...D_1$ равно a. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней.

Решение. Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и DC_1 (рис. 79).

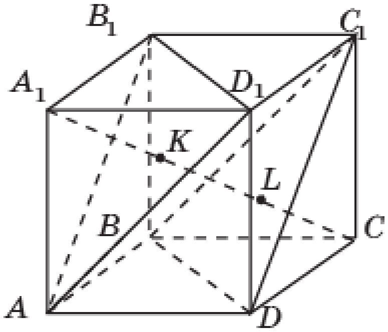


Рис. 79

Они лежат в параллельных плоскостях AD_1B_1 и BDC_1 (они параллельны по признаку параллельности плоскостей: $AD_1||BC_1$ и $AB_1||DC_1$). Искомое расстояние будет равно расстоянию между этими плоскостями. Проведем диагональ A_1C. Она пересечет плоскости соответственно в точках K и L. Причем A_1K – высота правильной треугольной пирамиды $A_1AB_1D_1$ (основание – равносторонний треугольник AB_1D_1), CL – высота правильной треугольной пирамиды $CBDC_1$ (основанием является равносторонний треугольник BDC_1). Точки K и L принадлежат AC, так как AL – высота правильной треугольной пирамиды $ABDC_1$, а CK – высота правильной треугольной пирамиды CAB_1D_1. $A_1K=CL=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, искомое расстояние $KL=AC-(A_1K+CL)$, $AC=\sqrt{3}$. Итак, $KL=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

п. 21. Двугранный угол (уроки 49, 50)

Цель – ввести понятие двуграного угла, линейного угла, угла между пересекающимися плоскостями; доказать, что величина двугранного угла не зависит от выбора его вершины.

Урок 49

I. Устная работа.

1). Прямая пересекает плоскость и не перпендикулярна этой плоскости. Существуют ли в этой плоскости прямые, перпендикулярные данной прямой?

Ответ. Да, существуют, все прямые, перпендикулярные ортогональной проекции данной прямой на данную плоскость, перпендикулярны этой прямой (теорема о трех перпендикулярах).

2). Диагональ параллелограмма лежит в плоскости α. Верно ли, что стороны параллелограмма образуют равные углы с плоскостью α?

Ответ. Равные углы образуют равные противоположные стороны.

3). Вопрос предыдущей задачи для ромба.

Ответ. Все стороны ромба образуют равные углы.

4). Две плоскости образуют с данной прямой равные углы. Как расположены плоскости относительно друг друга?

Ответ. Они параллельны.

5). Какую фигуру на плоскости образуют основания наклонных (точек пересечения с плоскостью), проведенных из одной точки и образующих с плоскостью равные углы?

Ответ. Окружность с центром в основании перпендикуляра, проведенного к плоскости из данной точки, и радиусом, равным ортогональной проекции одной из наклонных на данную плоскость.

6). Определите вид треугольника, если точка, одинаково удаленная от его сторон, принадлежит перпендикуляру к плоскости треугольника, проведенному через центр описанной около него окружности.

Ответ. Равносторонний, именно у него центры описанной и вписанной окружностей совпадают (по условию задачи точка должна принадлежать перпендикуляру к плоскости треугольника, проведенному через центр вписанной в него окружности).

II. Новый материал.

Вопрос.

- Что считается пространственными аналогами точки, луча, прямой, угла в пространстве?

- Ответ. Соответственно прямая, полуплоскость, плоскость, фигура, называемая двугранным углом. Представьте себе двугранный угол, попытайтесь его изобразить.

После обсуждения ответа на вопрос даем определение двугранного угла.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей граничной прямой, и одной из частей пространства, ограниченной этими полуплоскостями.

Рассматриваем элементы двугранного угла, а именно: полуплоскости называются гранями двугранного угла, а их общая граничная прямая – ребром двугранного угла.

Теперь перейдем к измерению двугранных углов. Пусть α и β - полуплоскости с общей граничной прямой c. Рассмотрим плоскость γ, перпендикулярную прямой c, и обозначим линии ее пересечения с полуплоскостями α и β через a и b соответственно. Угол между этими лучами называется линейным углом данного двугранного угла.

Вопрос.

- Каким образом выбиралась плоскость γ? Можно выбрать другую плоскость γ_1, перпендикулярную прямой c?

После обсуждения ответа на поставленный вопрос доказываем, что величина линейного угла не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, пусть γ_1, γ_2 - плоскости, перпендикулярные прямой c и пересекающие полуплоскости α и β по лучам a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно. Лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2 сонаправлены, так как они перпендикулярны одной и той же прямой c. Следовательно, углы, образованные этими лучами, равны.

Величиной двугранного угла называется величина его линейного угла.

Вопросы.

- Если линейный угол двугранного угла равен 90^o, как называется данный двугранный угол?

- Ответ. Двугранный угол называется прямым, если его линейный угол - прямой.

- Как определяется угол между пересекающимися прямыми?

- Ответ. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из образовавшихся при этом углов.

Проведем аналогию в пространстве. Двум пересекающимся прямым соответствуют две пересекающиеся плоскости. Таким образом:

Определение. Углом между двумя пересекающими плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных соответствующими полуплоскостями.

Вопрос.

- Как определить угол между соседними гранями многогранника?

- Ответ. Углом между двумя соседними гранями многогранника будем называть двугранный угол между соответствующими полуплоскостями.

III. Закрепление нового материала.

1. В кубе $A…D_1$ найдите число двугранных углов и определите их величину.

Решение. Число двугранных углов многогранника равно числу его ребер, для куба это число равно 12. Каждый двугранный угол куба равен 90°. В этом легко убедиться. Например, определим двугранный угол при ребре AA_1. Его линейным углом будет прямой угол BAD.

2. В кубе $A...D_1$ найдите угол наклона плоскости ABC_1 к плоскости ABC.

Решение. Линейным углом между данными плоскостями будет угол D_1AD, равный 45°. ($DA_1 \perp AB$ и $DA \perp AB$).

3. Треугольник ABC и параллелограмм $BCDE$ заданы таким образом, что AD - перпендикулярна плоскости параллелограмма, угол BCD - тупой. Можно ли считать угол ACD углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$? Постройте линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями так, чтобы одна его сторона проходила через точку A.

Решение. Угол ACD не является линейным углом при ребре BC (рис. 80). Линейным углом между плоскостями треугольника ABC и параллелограмма $BCDE$ будет угол AHD, где $DH \perp BC$, причем угол DCB - тупой, H не принадлежит BC.

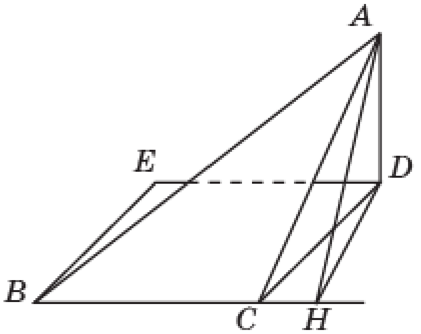


Рис. 80

Урок 50

I. Опрос учащихся.

Опрос по теории.

№ 1. – Теорема о расстоянии между параллельными плоскостями.

№ 2. – Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым.

№ 3. – Определения двугранного угла и его элементов, угла между пересекающимися плоскостями.

№ 4. Доказательство того, что величина двугранного угла не зависит от выбора его линейного угла.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Найдите угол между диагональю AC_1 единичного куба $A\dots D_1$ и плоскостью грани ABB_1A_1.

Решение. Соответствующим линейным углом является угол B_1AC_1; tg $\angle B_1AC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2). Дан куб $A\dots D_1$ с ребром a. Найдите угол между плоскостью AB_1D_1 и плоскостью диагонального сечения грани BDD_1B_1.

Решение. Линейным углом соответствующего двугранного угла при ребре B_1D_1 является угол AOO_1, где точки O, O_1 – центры граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Из прямоугольного треугольника AO_1O найдем tg $\angle AO_1O=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

II. Задание для класса.

1. Треугольник MAB и квадрат $ABCD$ заданы таким образом, что MB - перпендикуляр к плоскости квадрата. Какой угол можно считать углом между плоскостями AMD и $ABCD$?

Решение. Угол MAB, так как $BA\perp AD$ и MAB и $BA\perp MA$ (по теореме о трех перпендикулярах).

2. В кубе $A\dots D_1$ с ребром, равным 1, найдите угол между плоскостями AA_1C и плоскостью: а) ABB_1; б) ACD_1.

Решение. а) Линейным углом соответствующего двугранного угла при ребре AA_1 является угол CAB, равный 45°; б) линейным углом соответствующего двугранного угла при ребре AC является угол D_1OO_1, где точки O, O_1 – центры граней соответственно $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Треугольник AD_1C – равносторонний со стороной, равной $\sqrt{2}$. Таким образом, его высота $D_1O=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Из прямоугольного треугольника D_1OO_1 $c$os $\angle D_1OO_1=3\sqrt{6}$.

3. Найдите геометрическое место точек (ГМТ) в пространстве, одинаково удаленных от двух пересекающихся плоскостей.

Решение. На плоскости ГМТ, одинаково удаленных от двух пересекающихся прямых были две прямые, делящие соответствующие углы пополам или четыре соответствующие биссектрисы. По аналогии в пространстве искомым ГМТ будут две плоскости, делящие углы между данными плоскостями пополам. Аналогом биссектрисы является биссектральная (или биссекторная) полуплоскость, которая делит пополам соответствующий двугранный угол.

III. Устная работа.

1). Какие две прямые в пространстве называются перпендикулярными?

2). Какая фигура называется двугранным углом? Линейным углом двугранного угла?

3). Сколько двугранных углов имеет треугольная призма? Треугольная пирамида?

Ответ. У многогранника столько двугранных углов, сколько у него ребер. Таким образом, у треугольной призмы 9, а у треугольной пирамиды 6 двугранных углов.

4). Что можно сказать о взаимном расположении плоскости линейного угла некоторого двугранного угла и ребра этого двугранного угла?

Ответ. Они перпендикулярны.

5). Какой угол образует ребро двугранного угла с любой прямой, лежащей в плоскости его линейного угла?

Ответ. Угол равен 90^o.

6). Какой двугранный угол называется прямым?

7). Как определить угол между двумя плоскостями?

IV. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1. В правильной треугольной призме найдите угол между боковыми гранями.

Ответ. 60^o.

2. Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является параллелограмм?

Ответ. Нет.

3. Через сторону *BC* треугольника *ABC* проведена плоскость □ под углом 30^0 к плоскости треугольника. Высота *AD* треугольника *ABC* равна *a*. Найдите расстояние от вершины *A* треугольника до плоскости α.

Решение. Из точки *A* опустим на данную плоскость α перпендикуляр *AO*. Тогда угол *ADO* будет соответствующим линейным углом, равным по условию 30^0. Из прямоугольного треугольника *AOD* находим $AO=\frac{a}{2}$.

4*. Нарисуйте многогранник, ограниченный плоскостями, проходящими через все 12 ребер куба и образующими углы 45^0 с гранями куба, сходящимися в этих ребрах (ромбододекаэдр).

Решение представлено на рисунке 81.

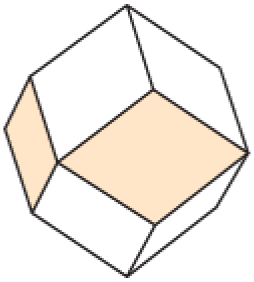


Рис. 81

Вариант 2

1. В кубе найдите угол между диагональными сечениями.

Ответ. 45^o.

2. Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является ромб?

Ответ. Да.

3. Через катет $BC=a$ равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* (угол *C* равен 90^o) проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол 30^o. Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости α.

Решение. Из точки *A* опустим на данную плоскость α перпендикуляр *AO*. Тогда угол *ACO* будет соответствующим линейным углом, равным по условию 30^o. Из прямоугольного треугольника *AOC* находим $AO=\frac{a}{2}$ ($AC=BC$).

4*. Задача 4* из первого варианта.

Задание на дом

1. Выучить определения двугранного угла и его элементов, угла между пересекающимися плоскостями; теорему о величине линейного угла (п. 21 учебника).

2. Решить задачи.

1). Через сторону *BC* треугольника *ABC* проведена плоскость под углом 30° к плоскости треугольника; угол *C* равен 150°, *AC*=6. Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости.

Решение. Из точки *A* опустим перпендикуляры *AO* на данную плоскость и *AH* на прямую *BC*. Поскольку угол *C* – тупой, *H* не принадлежит отрезку *BC*. Соответствующий линейный угол *AHO*, по условию задачи, равен 30°. В прямоугольном треугольнике *ACH* угол *ACH* равен 30°, значит, *AH*=3. Из прямоугольного треугольника *AOH* находим *AO*=1,5.

2). Дан квадрат *ABCD*, через вершину *D* параллельно диагонали *AC* проведена плоскость α, образующая с диагональю *BD* угол 60°. Чему равен угол между плоскостью квадрата и плоскостью α?

Решение. Опустим из вершины *B* квадрата *ABCD* перпендикуляр *BO* на плоскость α (рис. 82).

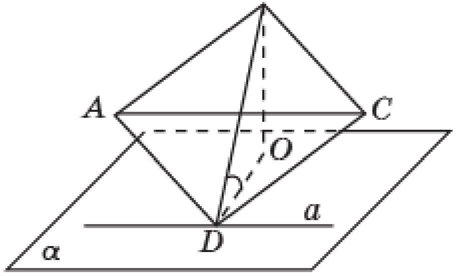


Рис. 82

Тогда, по условию задачи, $\angle BDO$ = 60°. Линейным углом двугранного угла плоскостей квадрата и α будет также угол *BDO*, так как $BD \perp a$, где *a* - линия пересечения данных плоскостей, причем $a \| AC$, *OD* - ортогональная проекция *BD* на плоскость α, $OD \perp a$ (утверждение, обратное теореме о трех перпендикулярах). Таким образом, искомый угол равен 60°.

3). Основанием высоты четырехугольной пирамиды является точка пересечения диагоналей основания пирамиды. Верно ли, что двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны, если основанием пирамиды является: а) квадрат; б) прямоугольник; в) равнобедренная трапеция?

Решение. Если данные двугранные углы равны, то вершина пирамиды должна проектироваться в центр окружности, вписанной в основание. Точка пересечения диагоналей является центром вписанной в него окружности, в прямоугольник нельзя вписать окружность, в равнобедренную трапецию можно вписать окружность при условии, что сумма ее оснований равна удвоенной боковой стороне, но даже в этом случае центр вписанной окружности не лежит в точке пересечения ее диагоналей. Таким образом, получаем ответ: а) да; б), в) нет.

4). Докажите, что если основанием высоты пирамиды является центр вписанной в основание окружности, то двугранные углы, образованные боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания, равны.

Решение. Из вершины S данной пирамиды опускаем высоту SO, где центр окружности, вписанной в основание. Опустим из точки перпендикуляры на стороны основания, все они равны, как радиусы вписанной в него окружности. Следовательно, равны прямоугольные треугольники (по катетам), катетами каждого из которых являются высота пирамиды и проведенные радиусы вписанной окружности. Из равенства треугольников следует равенство линейных углов искомых двугранных углов. Таким образом, равны и сами двугранные углы.

5). Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через сторону основания, если угол между этой плоскостью и плоскостью основания равен 30°.

Решение. Проведем в кубе $A \ldots D_1$ сечение $ABEF$ через ребро AB под углом 30° к плоскости ABC (рис. 83).

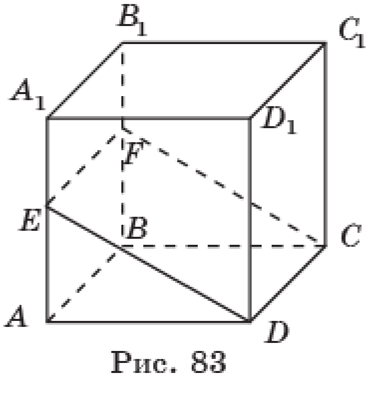


Рис. 83

Угол FAD – линейный угол двугранного угла с ребром AB. $ABEF$ – прямоугольник, $AB = a$, $AF = 1:\cos 30^{\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, площадь сечения равна $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

3*. Через биссектрису l, линейного угла двугранного угла проведена плоскость, пересекающая грани двугранного угла по лучам OK и OL. Докажите, что луч l является биссектрисой угла KOL.

Решение. Пусть дан двугранный угол с гранями α, β и линейным углом AOB (рис. 84), луч l является биссектрисой угла AOB.

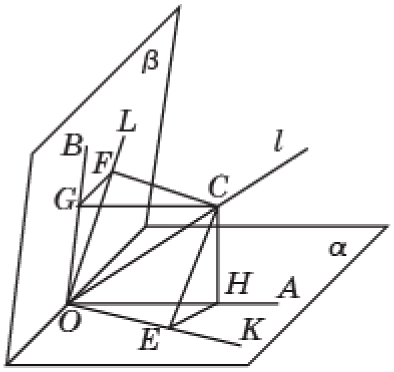


Рис. 84

Через l проведена плоскость δ, которая пересекает α и β соответственно по OK и OL. Возьмем на l точку C и опустим из нее перпендикуляры CH и CG соответственно на α и β, причем $H \in OA$, $G \in OB$. Из той же точки C опустим перпендикуляры CE, CF на соответственно OK, OL. Прямоугольные треугольники CEH и CFG равны по катету ($CH=CG$) и острому углу ($\angle CEH = \angle CFG$: $\angle CEH = \angle(\alpha,\delta)$, $\angle CFG = \angle(\beta,\delta)$, при этом $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$, таким образом, $\angle(\gamma,\delta) = 90^{\circ} - \angle(\alpha,\delta)$, $\angle(\gamma,\delta) = 90^{\circ} - \angle(\beta,\delta)$, откуда следует, что $\angle(\alpha,\delta) = \angle(\beta,\delta)$, т. е. $\angle CEH = \angle CFG$). Из равенства рассмотренных треугольников следует равенство: $CE=CF$, откуда следует, что l – биссектриса угла KOL.

п. 22. Перпендикулярность плоскостей (уроки 51, 52)

Цель – определить перпендикулярность двух плоскостей, доказать принак перпендикулярности двух плоскостей, показать его применение при решении задач.

Урок 51

I. Решение задач всем классом.

1. Докажите, что площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостями многоугольника и его проекции.

Решение. Рассмотрим сначала треугольник ABC, плоскость которого составляет угол φ с плоскостью проектирования π, и сторона AB параллельна плоскости π (рис. 85).

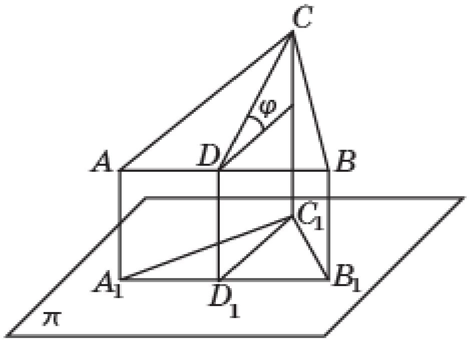


Рис. 85

Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ является ортогональной проекцией треугольника ABC на плоскость π. Тогда высота CD треугольника ABC спроектируется в высоту C_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$. При этом будут выполняться равенства $A_1B_1 = AB$, $C_1D_1 = CD \cdot \cos\varphi$. Поэтому площадь треугольника $A_1B_1C_1$ будет равна площади треугольника ABC умноженной на косинус угла φ.

Поскольку каждый многоугольник можно разбить на треугольники, у которых одна из сторон параллельна плоскости проектирования, то, применяя этот результат для треугольников и складывая их площади, получим требуемую формулу для площади многоугольника.

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 4 дм и 5 дм. Угол между ними 30°. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, если известно, что она пересекает все боковые ребра и образует с плоскостью основания угол в 45°.

Решение. Ортогональной проекций данного сечения будет параллелограмм, лежащий в основании параллелепипеда. Согласно предыдущей задаче, площадь основания равна площади сечения, умноженной на косинус 45°. Площадь основания равна $4\cdot 5\cdot \sin 30^{\circ}=10$ (дм^2). Таким образом, площадь сечения равна $10\sqrt{2}$ (дм^2).

3*. Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q.

Решение. Пусть в основании данной призмы лежит квадрат $ABCD$. Данное сечение проведено через точки E, F - середины его смежных сторон соответственно AB, BC. Тогда ортогональной проекцией данного сечения будет пятиугольник $AEFCD$, его площадь равно $\frac{7}{8}$ площади квадрата $ABCD$. Таким образом, $\frac{7}{8}\cdot a^2=Q\cdot \cos \varphi$, где a – сторона квадрата. Итак, $a=2\sqrt{\frac{2Q\cdot cos\,\phi}{7}}$.

II. Новый материал.

Вспоминаем определение угла между двумя плоскостями.

Вопросы.

- Может ли угол между двумя плоскостями равняться 90^0?
- Как в этом случае естественно назвать плоскости?

После обсуждения ответов на поставленные вопросы даем определение перпендикулярных плоскостей и переходим к рассмотрению теоремы IV – признака перпендикулярности двух плоскостей – достаточного условия перпендикулярности двух плоскостей.

Определение. Плоскости называются перпендикулярными, если они образуют прямой угол.

Теорема IV. (Признак перпендикулярности двух плоскостей). Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярную плоскости β (рис. 86). Покажем, что плоскости α и β перпендикулярны. В плоскости β через точку пересечения прямой a с плоскостью β проведем прямую b, перпендикулярную прямой c. Через прямые a и b проведем плоскость γ. Прямая c будет перпендикулярна плоскости γ, так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым a и b в этой плоскости. Угол, образованный прямыми a и b, прямой, так как прямая *a* перпендикулярна плоскости β. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны.

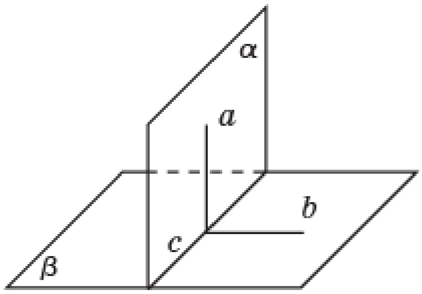


Рис. 86

III. Закрепление нового материала.

1. Докажите, что боковые грани прямой призмы перпендикулярны ее основаниям.

Решение. Каждая боковая грань проходит через боковое ребро, которое перпендикулярно каждому из оснований прямой призмы. Следовательно, по признаку перпендикулярности плоскостей боковая грань перпендикулярна каждому из оснований.

2. В кубе $A...D_1$ проведите диагональные сечения, проходящие через его боковые ребра, и докажите, что плоскости сечений перпендикулярны.

Решение. Плоскости диагональных сечений AA_1C_1C и BB_1D_1D куба $A...D_1$ пересекаются по прямой OO_1. Эти плоскости перпендикулярны, так как, например, плоскость BB_1D_1D содержит BD - перпендикуляр к плоскости AA_1C_1C ($BD \perp AC$ и $BD \perp OO_1$, т.е. по признаку перпендикулярности прямой и плоскости BD перпендикулярен плоскости AA_1C_1C). По признаку перпендикулярности двух плоскостей плоскости AA_1C_1 и BB_1D_1 перпендикулярны.

3. Дана прямая, пересекающая некоторую плоскость. Через прямую проведите плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Решение. Назовем данную прямую *a*, данную плоскость - α. Возьмем на прямой *a* произвольную точку *A* и опустим из нее перпендикуляр *h* на плоскость α. Через *a* и *h* проведем плоскость β. $\beta \perp \alpha$, по признаку перпендикулярности двух плоскостей.

4. Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.

Решение. Пусть $a \perp b$; $\alpha \cap \beta = c$; $a \subset \alpha$; $a \perp c$; $a \cap c = M$. В плоскости β проведем через точку *M* прямую $b \perp c$. В силу перпендикулярности двух плоскостей, $\angle(a,c)=90^0$. Таким образом, $a\perp c$ и $a\perp b$, т.е. $\alpha\perp\beta$, в силу признака перпендикулярности прямой и плоскости.

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Урок 52

I. Опрос учащихся.

Опрос по теореии.

№ 1. – Определения двугранного угла и его элементов.

№ 2. – Доказательство того, что величина двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

№ 3. – Определения угла между двумя пересекающимися плоскостями и перпендикулярных плоскостей.

№ 4. – Теорема IV. – Признак перпендикулярности двух плоскостей.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка

1). Докажите, что пересекающиеся грани прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны.

2). Докажите, что плоскости диагональных сечений AA_1C_1C и BB_1D_1D куба $A...D_1$ перпендикулярны.

II. Задание для класса.

1. Докажите, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной плоскости. Сколько таких плоскостей?

Решение. Для построения достаточно через данную точку провести прямую, перпендикулярную данной плоскости (см. задачи из дом. задания п. 17). Через данную прямую провести любую плоскость. По признаку перпендикулярности плоскостей она будет перпендикулярна данной плоскости. Таких плоскостей бесконечно много.

2. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны и из точки одной из них проведен перпендикуляр к другой плоскости, то он целиком лежит в первой плоскости.

Решение. Пусть плоскости α и β перпендикулярны (рис. 87) и пересекаются по прямой *c*.

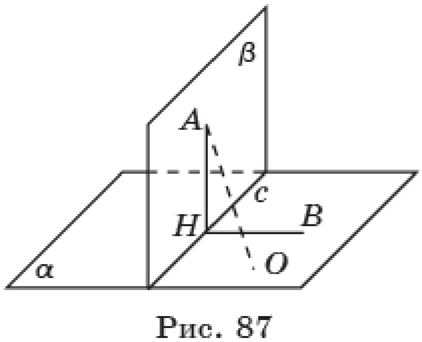


Рис. 87

Возьмем в β произвольную точку *A* и опустим из нее перпендикуляр *AO* на плоскость α. Предположим, что он не лежит в плоскости β. Тогда проведем в плоскости β *AH*⊥c и в плоскости α *HB*⊥*c*. Тогда угол *AHB* будет линейным углом прямого двугранного угла, т.е. прямым. Таким образом, *AH*⊥α (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), но тогда из точки *A* опущено два перпендикуляра на одну плоскость, чего быть не может. Наше предположение неверно и, следовательно, *AO* (совпадает с *AH*) целиком лежит в плоскости β.

3. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости, то линия пересечения первых двух плоскостей будет перпендикулярна третьей плоскости.

Решение. Пусть плоскости α и β перпендикулярны каждая плоскости γ и β∩γ=*m*. Возьмем на прямой *m* произвольную точку *A* и опустим из нее перпендикуляр *AO* на плоскость α. Тогда *AO* целиком лежит в плоскости β и *AO* целиком лежит в плоскости γ (см. предыдущую задачу 2), т. е. *AO* совпадает с прямой *m*. Значит, линия пересечения плоскостей β и γ перпендикулярна α.

III. Устная работа.

1). Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

Ответ. Нет, могут пересекаться.

2. Верно ли, что прямая и плоскость, перпендикулярные другой плоскости, параллельны между собой?

Ответ. Нет, прямая может лежать в плоскости.

3. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной плоскости, можно провести через данную прямую?

Ответ. Бесконечно много.

4. Плоскость α перпендикулярна плоскости β. Будет ли всякая прямая плоскости α перпендикулярна плоскости β?

Ответ. Нет.

5. Две плоскости перпендикулярны. Укажите возможные случаи взаимного расположения прямой, лежащей в одной из этих плоскостей, относительно прямой, лежащей в другой плоскости. (Проиллюстрируйте свой ответ на модели).

Ответ. Может пересекаться, быть параллельной или скрещивающейся.

6. Плоскость и прямая параллельны. Верно ли утверждение о том, что плоскость, перпендикулярная данной плоскости, перпендикулярна и данной прямой?

Ответ. Нет.

7. Плоскость α и прямая *a* параллельны. Будет ли верно утверждение о том, что плоскость β, перпендикулярная прямой *a*, перпендикулярна и данной плоскости α?

Ответ. Да, в данной плоскости α, проведем прямую a_1, параллельную данной прямой *a*. Прямая a_1, как и прямая *a*, будет перпендикулярна плоскости β. Следовательно, плоскости α и β перпендикулярны.

8. Верно ли, что плоскость, проходящая через наклонную к другой плоскости, не перпендикулярна этой плоскости?

Ответ. Нет.

IV. Самостоятельная работа.

Вариант 1

1. Через данную прямую, лежащую в плоскости π, проведите плоскость, перпендикулярную плоскости π.

2. Две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой *AB*. Прямая *CD* лежит в плоскости α, параллельна *AB* и находится на расстоянии 60 см от нее. Точка *E* принадлежит плоскости β и находится на расстоянии 91 см от *AB*. Найдите расстояние от точки *E* до прямой *CD*.

3*. Докажите, что прямая *a* и плоскость α, перпендикулярные одной и той же плоскости β, параллельны, если прямая *a* не лежит в плоскости α.

Вариант 2

1. Через наклонную к плоскости π проведите плоскость, перпендикулярную плоскости π.

2. Отрезок *MN* имеет концы на двух перпендикулярных плоскостях и составляет с ними равные углы. Докажите, что точки *M* и *N* одинаково удалены от линии пересечения данных плоскостей.

3*. Докажите, что две плоскости α и β параллельны, если они перпендикулярны плоскости γ и пересекают ее по параллельным прямым.

Ответы

Вариант 1

1. Через любую точку данной прямой проводим к данной плоскости перпендикуляр, через него проводим плоскость, которая и будет искомый.

2. 109 см.

3*. В этом случае в плоскости α можно провести прямую, которая будет параллельна *a* и перпендикулярна плоскости β. Итак, в плоскости α лежит прямая, перпендикулярная плоскости β. Следовательно, α⊥β.

Вариант 2

1. Через любую точку наклонной проводим прямую, перпендикулярную данной плоскости. Плоскость, проходящая через данную наклонную и проведенную прямую будет искомой.

2. Пусть $M\in\alpha$, $N\in\beta$, $\alpha\perp\beta$. Проведем из точки *M* перпендикуляр *MH* на плоскость β, *H* принадлежит линии пересечения плоскостей. $MH\perp HN$, $\angle MHN=90^0$ (линейный угол соответствующего двугранного угла. $\angle HMN=\angle HNM$ (по условию). Следовательно, прямоугольный треугольник *MHN* является равнобедренным и $MH=HN$, как его боковые стороны.

3*. Пусть $\alpha\cap\gamma=a$, $\beta\cap\gamma=b$, $a\|b$. Если бы плоскости α и β пересекались, то линия их пересечения, прямая *c*, была бы перпендикулярна плоскости γ, значит, прямые *a* и *b* пересекались бы в точке пересечения *c* и γ, чего быть не может, по условию $a\|b$. Следовательно, предположение неверно и α||β.

Задание на дом

1. Выучить: определение перпендикулярных плоскостей, формулировку и доказательство теоремы IV - Признака перпендикулярности двух плоскостей (п. 22 учебника).

2. Решить задачи.

1). Докажите, что в кубе $A...D_1$ плоскости сечений AB_1C_1D и A_1BCB_1 перпендикулярны.

2). Докажите, что если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она будет перпендикулярна и другой плоскости.

Решение. Во второй плоскости через точку пересечения проведенной прямой и линии пересечения плоскостей проведем прямую, перпендикулярную линии пересечения. Тогда угол между данной и проведенной прямыми будет равен 90° (как линейный угол прямого двугранного угла). Таким образом, данная прямая перпендикулярна двум прямым второй плоскости (линии пересечения плоскостей и проведенной прямой) и, значит, перпендикулярна второй плоскости (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

3). Равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* ($\angle C=90^0$) перегнули по высоте *CD* таким образом, что плоскости *ACD* и *BCD* образовали прямой угол. Нужно определить углы *ADB* и *ACB*.

Решение. $\angle ADB=90^0$ (рис. 88), так как он является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями *ACD* и *BCD* ($AD\perp CD$, $BD\perp CD$). $\angle ACB=60^o$, так как треугольник *ABC* - равносторонний. ($\Delta ACD=\Delta BCD=\Delta ADB$ - прямоугольные треугольники с равными катетами).

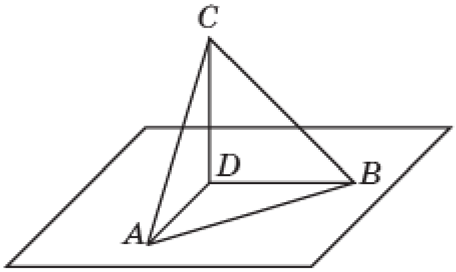


Рис. 88

Замечание. К последней задаче один ученик получает индивидуальное задание: "Изготовить соответствующую нитяную модель".

Предварительно на уроках мы показываем учащимся нитяные складывающиеся модели различных пространственных ситуаций, обращаем внимание и на то, как они сделаны. К данному уроку ребята уже привыкли, освоились с нитяными моделями, и в классе найдутся ученики, которые с удовольствием выполнят предложенное задание. Изготовление нитяных моделей преследует те же цели, что и всякое другое моделирование, а именно: способствует развитию пространственных представлений учащихся; развитию их конструкторских и рационализаторских способностей; формированию общего понятия математической модели; раскрытию приложений геометрии; воспитанию эстетических чувств и т.п.

Этот способ моделирования описан, например, в следующих работах: Колесник А.С. Простой способ изготовления объемных моделей //Математика в школе. -1980.-№ 1.-4-я с.обл.; Гончаренко Б. Г. Складные нитяные модели по стереометрии //Математика в школе.-1984.-№ 1.-3-я и 4-я с. обл. Этот способ моделирования хорошо известен в школе, по крайней мере с 50-х годов, времени большой популярности моделирования стереометрических фигур из различных материалов. В качестве примера можно привести книгу Маянского Е.И. Самодельные наглядные пособия по стереометрии. - Кострома: Книжное издательство, 1959, с. 68 (складные геометрические тела). В ней очень подробно описана вся техника изготовления таких моделей.

п. 23*. Центральное проектирование. Изображение пространственных фигур в центральной проекции

(Необязательный материал со звездочкой см. в параграфе 7)

Урок 53

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике один из катетов лежит в плоскости π, а другой образует с ней угол 45°. Найдите угол между гипотенузой данного треугольника и данной плоскостью.

2. Точка *K*, не принадлежащая плоскости равностороннего треугольника, удалена от каждой его вершины на расстояние $\sqrt{13}$см, а от каждой его стороны – на 2 см. Найдите расстояние от точки *K* до плоскости треугольника.

3. Угол между плоскостями двух равнобедренных треугольников *ABC* и *BCD*, имеющих общую боковую сторону *BC*, равен 90°. Найдите расстояние между точками *A* и *D*, если основание каждого треугольника равно a, а каждая боковая сторона равна b.

4. Внутри двугранного угла из точки *M*, принадлежащей его ребру, проведен к нему перпендикуляр, на котором отложен отрезок *MN*, в два раза больший своей ортогональной проекции на одну из граней двугранного угла. Найдите угол, который образует *MN* с другой гранью, если двугранный угол равен 100°.

5*. Через данную точку проведите прямую, параллельную данной плоскости и перпендикулярную данной прямой.

Вариант 2

1. Наклонная *AB* образует с плоскостью π угол 45^0, прямая *AC*, лежащая в этой плоскости, составляет угол 45° с ортогональной проекцией наклонной *AB* на плоскость π. Найдите угол *BAC*.

2. Дан ромб со стороной a и углом 45°. Точка *L* удалена от всех прямых, на которых лежат стороны ромба, на расстояние b. Найдите расстояние от точки *L* до плоскости ромба.

3. Угол между плоскостями двух равнобедренных треугольников *ABC* и *BCD*, имеющих общую боковую сторону *BC*, равен 120°. Расстояние между точками *A* и *D* равно m. Основание каждого треугольника равно a. Найдите боковые стороны треугольников.

4. Из точки *K*, расположенной внутри двугранного угла, проведен перпендикуляр *KL* на его ребро. Расстояние от точки *K* до одной из его

граней равно ортогональной проекции KL на эту грань. Этот же отрезок KL в два раза больше своей ортогональной проекции на другую грань. Найдите двугранный угол.

5*. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям.

4.4. МНОГОГРАННИКИ

п. 24. Многогранные углы (уроки 54, 55)

Цель – ввести понятие многогранного угла, показать его применение при решении задач.

Урок 54

I. Анализ контрольной работы № 5.

II. Новый материал.

Вспомним с учащимися элементы многогранника: вершины, ребра, грани, плоские и двугранные углы, и обратим внимание на фигуры при каждой вершине многогранника. Затем дадим определение многогранного угла.

Пусть в плоскости π дан многоугольник *M* и точка *S* вне этой плоскости (рис. 89).

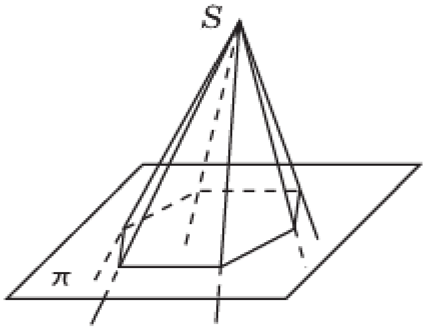


Рис. 89

Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке *S*, пересекающими данный многоугольник, называется многогранным углом. Точка *S* называется вершиной многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника - ребрами многогранного угла. Углы, образованные соседними ребрами, называются плоскими углами многогранного угла, а также гранями многогранного угла.

Многогранный угол обозначается буквами *SABC*..., указывающими его вершину *S* и вершины *A, B, C,* ... многоугольника.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются трехгранными, четырехгранными, пятигранными и т.д. Для плоских углов трехгранного угла имеет место неравенство, аналогичное неравенству треугольника.

Теорема. Всякий плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов.

Доказательство. Пусть в трехгранном угле *SABC* наибольший из плоских углов есть угол *ASC* (рис. 90).

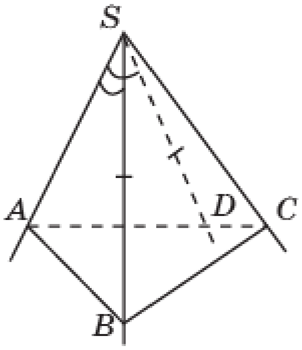


Рис. 90

Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leq \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$. Таким образом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

III. Закрепление нового материала.

1. Многогранный угол имеет n граней. Сколько у него: а) ребер; б) плоских углов; в) двугранных углов?

Ответ. а), б), в) n.

2. Найдите число многогранных углов 20-угольной призмы, определите их вид.

Решение. Число многогранных углов многогранника равно числу его вершин. У 20-угольной призмы 40 вершин, следовательно, 40 многогранных углов. Все они трехгранные.

3. В трехгранном угле все плоские углы прямые. На его ребрах от вершины S отложены отрезки $SA = 4$ см, $SB = 4$ см и $SC = 2\sqrt{6}$см. Через их концы проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения.

Решение. В сечении получился треугольник ABC, у которого стороны являются гипотенузами прямоугольных треугольников, соответственно ABS, BCS и ACS: $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 4\sqrt{2}$см; $BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$см; $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 2\sqrt{10}$см. Таким образом, треугольник ABC – равнобедренный. Его высота CD, опущенная на основание AB, равна $\sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot CD = 16$ (см^2).

Урок 55

I. Математический диктант

Вариант 1

1. Трехгранным углом называется …

2. Вершиной многогранного угла называется …

3. Плоскими углами многогранного угла называются …

4. Для плоских углов трехгранного угла *SABC* имеет место следующее неравенство …

5. Пятиугольная призма имеет такие многогранные углы …

Вариант 2

1. Многогранным углом называется …

2. Ребрами многогранного угла называются …

3. Гранями многогранного угла называются …

4. Всякий плоский угол трехгранного угла …

5. Шестиугольная пирамида имеет такие многогранные углы …

II. Проверка математического диктанта.

III. Устная работа.

1. Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

2. Определите виды многогранных углов у: а) четырехугольной призмы; б) пятиугольной пирамиды.

3. По скольким прямым попарно пересекаются плоскости граней: а) трехгранного; б) четырехгранного; в) пятигранного угла?

4. Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 30^o, 60^o, 20^o; б) 45^o, 45^o, 90^o; в) 30^o, 45^o, 60^o?

5. Два плоских угла трехгранного угла равны 70^o и 80^o. В каких границах находится третий плоский угол?

Ответы.

1. а) куб; б) октаэдр; в) икосаэдр.

2. а) Восемь 4-гранных углов; б) один 5-гранный угол и шесть 3-гранных.

3. а) 3; б) 4; в) 5.

4. а), б) Нет; в) да.

5. $10^o < \varphi < 150^o$, где φ – искомый угол.

IV. Решение задач.

1. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45^o; двугранный угол между ними прямой. Найдите третий плоский угол.

Решение. Пусть в трехгранном угле *SABC* углы *ASB* и *ASC* равны по 45°, двугранный угол при ребре *SA* равен 90°. Тогда $\angle SAB = \angle SAC = \angle BAC = 90^0$ (рис. 91).

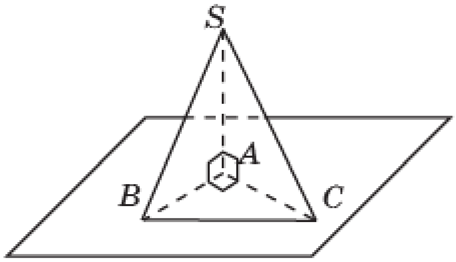


Рис. 91

Равнобедренные прямоугольные треугольники *SAB*, *SAC*, *BAC* равны (по катету). Из равенства треугольников следует, что *SA*=*SB*=*BC*, т. е. треугольник *SBC* – равносторонний. Следовательно, искомый угол *BSC* равен 60°.

2. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°. На одном из его ребер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен перпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпендикуляра.

Решение. В данном трехгранном угле *SABC* с вершиной *S* углы *ASB*, *BSC*, *ASC* равны по 60°, *SA*=3 см. Точки *B* и *C* выберем таким образом, чтобы *SB*=*SC*=3 см, тогда *SABC* – правильный тетраэдр с ребром 3 см. Проведем *SM* и *AM*, где *M* – середина *BC*. Искомый перпендикуляр *AH*, где *H* – центр грани *BSC*, $SH=\frac{2}{3}SM=\sqrt{3}$ см. Таким образом, из прямоугольного треугольника *ASH* найдем $AH=\sqrt{6}$ см.

3*. Докажите, что любой четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

Решение. Пусть α, α’, β, β’ – грани четырехгранного угла, причем α противоположна α’, β противоположна β’. Пусть при продолжении грани α и α’ пересекаются по прямой *a*, а грани β и β’ – по прямой *b* (прямые *a* и *b* проходят через вершину угла). Любая плоскость параллельная обеим прямым *a* и *b*, т. е. параллельная плоскости прямых *a* и *b*, будет пересекать четырехгранный угол по параллелограмму.

Задание на дом

1. Выучить: определения многогранного угла и его элементов, теорему о плоских углах трехгранного угла (п. 24 учебника).

2. Решить задачи.

1). Найдите число многогранных углов в: а) 4-угольной пирамиде; б) 7-угольной призме; в) 10-угольной усеченной пирамиде.

Ответ. а) 5; б) 14; в) 20.

2). Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 50°, 40°, 10°; б) 90°, 45°, 90°; в) 55°, 30°, 70°?

Ответ. а) Нет; б), в) да.

3). Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах от вершины S отложены равные отрезки SA, SB, SC. Найдите двугранный угол между плоскостью угла в 90^0 и плоскостью ABC.

Решение. В данном трехгранном угле $SABC$ с вершиной S углы ASB, BSC равны по 60°, угол ASC равен 90°, $SA=SB=SC=a$. Из условия задачи следует, что треугольники ASB, BSC – равносторонние, и $AB=BC$. Треугольники ASC и ABC – равные равнобедренные прямоугольные с основанием AC. Следовательно, $BH\perp AC$ и $SH\perp AC$, где точка H – середина AC и $BH=SH$. Искомый угол SHB. Положим $SA=SB=SC=a$, тогда $AC=a\sqrt{2}$, $BH=SH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Треугольник SHB – равнобедренный прямоугольный и угол SHB равен 90°.

4). Докажите, что всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

Решение. Это утверждение является следствием теоремы о трехгранном угле. Пусть в трехгранном угле $SABC$ с вершиной S угол ASC является наибольшим плоским углом. Согласно доказанной теореме, имеем: $\angle ASC<\angle ASB+\angle BSC$. Отсюда $\angle BSC>\angle ASC-\angle ASB$ и $\angle ASB>\angle ASC-\angle BSC$. Приняв во внимание, что $\angle ASC$ является наибольшим из плоских углов, получим $\angle ASC>\angle ASB-\angle BSC$ (если $\angle ASB>\angle BSC$) или $\angle ASC>\angle BSC-\angle ASB$ (если$\angle BSC>\angle ASB$). Таким образом, всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других плоских углов.

5). Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите величину двугранного угла между плоскостями плоских углов в 45°.

Решение. Проведем плоскость ABC, перпендикулярную ребру OA искомого двугранного угла, и пусть $OA = a$. Треугольники OAB и OAC равные равнобедренные прямоугольные треугольники. Следовательно, $AB = AC = a$, $OB = OC = a\sqrt{2}$. Так как $\angle BOC = 60°$, то $BC = OB = OC$, т.е. $BC = a\sqrt{2}$. Итак, в треугольнике BAC $AB = AC = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Значит, угол BAC, являющийся линейный углом искомого двугранного угла, прямой.

3*. Дополнительные задачи.

1). Докажите, что биссектральные плоскости всех трех двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Решение. Заметим, что биссектральная плоскость является геометрическим местом внутренних точек двугранного угла, равноудаленных от его граней. Поэтому линия пересечения двух биссектральных плоскостей будет состоять из точек, равноудаленных от всех трех граней. Следовательно, через нее будет проходить и третья биссектральная плоскость.

2). Докажите, что плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла и перпендикулярные этим граням, пересекаются по одной прямой.

Решение. Прямая пересечения двух из указанных плоскостей есть геометрическое место точек, равноудаленных от всех трех ребер трехгранного угла. Следовательно, через нее проходит и третья плоскость.

3). Докажите, что плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и через биссектрисы его противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

Решение. Отложим на всех трех ребрах от вершины O трехгранного угла равные отрезки OA, OB и OC. Получится треугольник ABC. Биссектрисы граней трехгранного угла делят стороны этого треугольника пополам. Рассматриваемые плоскости пересекают треугольник ABC по медианам, которые пересекаются в одной точке D. Таким образом, все три плоскости пересекаются по прямой OD.

п. 25*. Выпуклые многогранники

п. 26*. Теорема Эйлера

(См. параграф 7)

п. 27. Правильные многогранники (уроки 56, 57)

Цель данных уроков - более подробно познакомить учащихся с правильными многогранниками, научить изображать и изготавливать их модели.

Урок 56

I. Устная работа.

1). Какой многогранник называется призмой?

2). Какая призма называется прямой; правильной?

3). Существует ли призма, у которой только одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания?

Ответ. Нет не существует.

4). Существует ли призма, у которой боковое ребро перпендикулярно плоскости основания?

Ответ. Да, существует.

5). Какой многогранник называется пирамидой; правильной пирамидой; усеченной пирамидой?

6). Верно ли утверждение о том, что если все боковые ребра пирамиды равны между собой, то пирамида правильная?

Ответ. Нет.

7). Верно ли утверждение о том, что если все боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к основанию, то пирамида правильная?

Ответ. Нет.

8). Боковые ребра пирамиды образуют с основанием равные двугранные углы. Может ли в основании лежать: а) прямоугольник; б) ромб; в) квадрат; г) параллелограмм?

Ответ. а), г) Нет; б), в) да.

II. Новый материал.

Вспоминаем с учащимися правильные многогранники, демонстрируем модели правильных многогранников.

Определение. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

С некоторыми правильными многогранниками мы уже встречались. Это треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники. Этот многогранник называется также тетраэдром, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

Куб имеет шесть граней, и поэтому он также называется гексаэдром.

Рассмотрим другие возможные правильные многогранники, прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Один из них мы уже рассмотрели. Это тетраэдр. В каждой его вершине сходится по три грани.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 2, в. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется октаэдром.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 2, г. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется икосаэдром.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, кроме куба, не существует.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 2, д. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется додекаэдром.

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться правильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других правильных многогранников не существует, и таким образом, имеется только пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

III. Индивидуальное задание.

Историческая справка

Правильные многогранники с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражала красота, совершенство, гармония этих многогранников. Пифагорейцы считали эти многогранники божественными и использовали их в своих философских сочинениях о существе мира.

Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон. Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона. Правильным многогранникам посвящена последняя XIII книга знаменитых "Начал" Евклида.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многогранников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да Винчи (1452-1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Например, он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445-1514) "О божественной пропорции".

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер (1471-1528). В его известной гравюре "Меланхолия" на переднем плане изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Иоган Кеплер (1571-1630) в своей работе "Тайна мироздания" в 1597 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет солнечной системы. Геометрия солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем: "Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия". Такая модель Солнечной системы получила название "Космического кубка" Кеплера (см. рисунки в учебнике).

IV. Закрепление нового материала.

1. Покажите, что центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра, и центры граней правильного октаэдра - вершинами куба.

Такие два многогранника называются взаимно двойственными.

2. Ребро правильного октаэдра равно a. Определите расстояние между его противоположными вершинами.

Ответ. $a\sqrt{2}$.

3*. Покажите, что правильные додекаэдр и икосаэдр также являются взаимно двойственными многогранниками.

Урок 57

I. Опрос учащихся.

Двое учащихся приглашаются за первую парту - опрос по домашней работе. Им предлагаются следующие задания.

Для первого:

- Дайте определение правильного многогранника.

- Впишите в октаэдр куб.

- Сколько вершин, ребер и граней имеет правильный икосаэдр, и почему он так называется?

Для второго:

- Дайте определение правильного октаэдра.

- Впишите в куб тетраэдр.

- Сколько вершин, ребер и граней имеет правильный додекаэдр, и почему он так называется?

Четверым учащимся даются следующие индивидуальные задания (которые выполняются на местах по карточкам):

Карточка

1). Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

Ответ. Высота равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2). Будет ли правильная пирамида, представленная в предыдущей задаче, правильным многогранником? Почему?

3). Найдите в этой правильной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

Ответ. Искомый угол равен 45^0.

К доске приглашаются трое учащихся. Первый и второй решают соответственно задачи 1 и 2 из классной работы (представленной ниже), а третий воспроизводит решение одной из домашних задач.

Классу предлагаются следующие задания:

1. Ребро правильного тетраэдра равно 1. Найдите расстояние от вершины до противоположной грани.

Ответ. Высота правильного тетраэдра с ребром 1 равна $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Ребро правильного октаэдра равно a. Найдите расстояние между противоположными ребрами.

Ответ. Пусть дан правильный октаэдр $SABCDS'$, AS и $S'C$ - его противоположные ребра, расстояние между ними равно a.

3*. Докажите, что сумма двугранных углов правильных тетраэдра и октаэдра равна 180°.

Класс работает вместе с первым учеником, потом проверяет работу третьего и второго учащихся.

Все индивидуальные задания сдаются.

II. Устная работа.

1). Почему гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники?

Ответ. Гранями правильного многогранника не могут быть правильные шестиугольники, потому что из них нельзя сложить даже трехгранный угол (углы правильного шестиугольника равны 120°, а сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360°).

2). Представьте многогранник - бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли она правильным многогранником? Почему?

Ответ. Бипирамида, составленная из правильных тетраэдров не будет правильным многогранником, так как у нее имеются вершины двух типов: две, в которых сходится по три ребра, и три, в которых сходится по четыре ребра.

3). Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов, рисунок 92) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин и ребер?

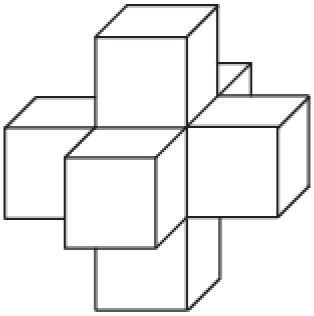


Рис. 92

Ответ. Пространственный крест не является правильным многогранником прежде всего потому, что не является выпуклой фигурой. Его поверхность ограничивают 30 квадратов, он имеет 32 вершины и 60 ребер.

Заметим, что пространственный крест является хорошим примером невыпуклого многогранника, у которого все грани - выпуклые многоугольники.

4). Какой многогранник является двойственным правильному тетраэдру?

Ответ. Правильный тетраэдр двойственен самому себе.

5). Какие из представленных на рисунке 93 фигур можно считать развертками октаэдра?

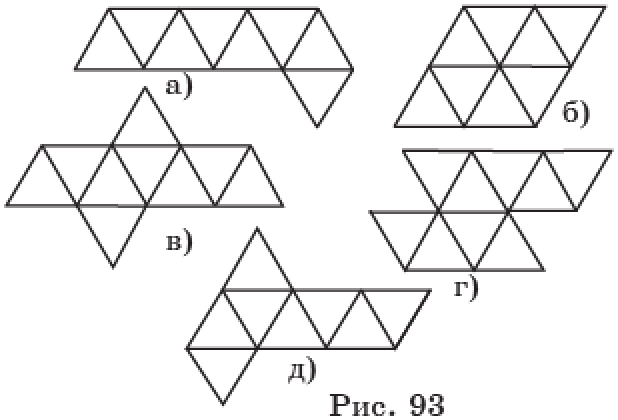


Рис. 93

Ответ. Развертками октаэдра являются фигуры, представленные на рисунках 93, в, д.

6). В правильном тетраэдре попарно соединены середины всех его шести ребер. Какое при этом получится тело?

Ответ. При этом получится правильный октаэдр.

III. Самостоятельная работа.

1. В кубе $A...D_1$ из вершины D_1 проведены диагонали граней, примыкающих к ней, и их концы соединены. Какая при этом получится фигура?

Ответ. D_1AB_1C - правильный тетраэдр, вписанный в куб $A...D_1$.

2. Ребро куба равно a. Вычислите площадь полной поверхности, вписанного в него правильного октаэдра.

Ответ. Ребро вписанного октаэдра равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, площадь его грани равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$, и площадь полной поверхности равна $a^2\sqrt{3}$.

3*. Докажите, что в правильном октаэдре противоположные ребра параллельны.

Ответ. В октаэдре $SABCDS'$, ребро $SC||AS'$ (четырехугольник $SAS'C$ - квадрат).

IV. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Выучить определение правильного многогранника, знать названия правильных многогранников и представленные их свойства (п. 27 учебника).

2. Решить задачи.

1). Впишите в октаэдр куб. Вычислите поверхность куба, если ребро октаэдра равно a.

Решение. Обозначим через x ребро данного куба, тогда $a=\frac{x\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=a\sqrt{2}$. Следовательно, искомая площадь равна $12a^2$.

2). Изготовьте из развертки модель правильного додекаэдра.

Напомним, что изготовление моделей многогранников из разверток мы рассматривали с учащимися на уроках 7, 8.

3). Дан куб $A...D_1$, ребро которого равно 1. Найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и скрещивающейся с ней диагональю AC нижнего основания.

Решение. $AC\perp BD$ и $AC\perp OO_1$, следовательно, AC перпендикулярна плоскости BD_1D, т.е. любая прямая, проведенная в плоскости BD_1D через точку O, будет перпендикулярна AC. Проведем $OK\perp BD_1$. Отрезок OK будет общим перпендикуляром скрещивающихся прямых AC и BD_1. Следовательно, его длина будет искомым расстоянием. Из подобия прямоугольных треугольников BD_1D и BOK следует, что $D_1D:BD_1=OK:BO$; $DD_1=1$; $BD_1=\sqrt{3}$; $BO=\frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $OK=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

4). Найдите двугранный угол правильного тетраэдра.

Ответ. Назовем двугранный угол правильного тетраэдра φ, тогда $\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3*. Постройте сечение правильного икосаэдра, проходящее черезребра KL и MN (рис. 94, а).

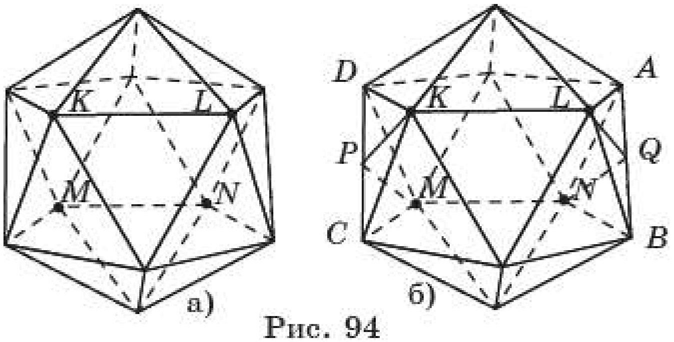


Рис. 94

Ответ. Искомым сечением будет изображенный на рисунке 94, б шестиугольник *KLQNMP*, где *P* и *Q* - середины ребер икосаэдра соответственно *AB* и *CD*.

4**. Индивидуальное задание - "История правильных многогранников". (Литература: Глейзер Г.И. История математики в школе. IX-X классы. - М.: Просвещение, 1983, с.171).

Урок 58
Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Можно ли составить трехгранный угол с плоскими углами: а) 40°, 70°, 100°; б) 150°, 120°, 90°?

2. Два плоских угла трехгранного угла равны по 60°, а третий равен 90^0. Найдите угол между плоскостью прямого угла и противоположным ребром трехгранного угла.

3. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб, а одно боковое ребро образует с прилежащими сторонами основания параллелепипеда равные углы. Докажите, что вершина параллелепипеда, принадлежащая этому ребру, ортогонально проектируется в точку диагонали основания.

4. Найдите расстояние между центрами двух соседних граней правильного октаэдра, если его ребро равно 1.

5*. Докажите, что любое сечение трехгранного угла с плоскими углами по 90^0, пересекающее все его ребра, является остроугольным треугольником.

Вариант 2

1. Можно ли составить трехгранный угол с плоскими углами: а) 80°, 100°, 130°; б) 60°, 120°, 180°?

2. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите двугранный угол, образованный плоскостями равных плоских углов.

3. Основанием пирамиды является прямоугольник, а одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники.

4. Найдите расстояние между противоположными параллельными гранями октаэдра, если его ребро равно 1.

5*. Докажите, что двугранный угол между смежными гранями любой правильной 4-угольной пирамиды является тупым.

Обобщающее повтороение (уроки 59 – 68)

§ 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННОГО И НАУЧНО-ПОПУЛЯРНОГО МАТЕРИАЛА

Опыт работы школы показывает, что наряду с интересом к вопросам истории и приложений математики, учащиеся старших классов живо интересуются современными проблемами в различных областях знания, в том числе, и математики. Этому, в частности, во многом способствует развитие средств массовой информации, появление большого количества научно-популярной литературы и научно-популярных телевизионных и радио передач, интернета и т.п. Желание узнать о новых идеях, направлениях развития математики вполне естественно для молодого человека - выпускника школы, необходимо для ориентации в современном мире, правильного представления о процессах, происходящих в природе и обществе, осознания собственной роли в движении общества вперед.

Возникает важная методическая проблема: как, в каком объеме и на каком уровне знакомить учащихся старших классов с современными проблемами математики. Термин "современная математика" не имеет четкого определения. В своей работе мы отнесли его к современному периоду развития математики. В развитии математики условно выделяют пять основных периодов:

1. Древний - Египет, Вавилон, Греция.
2. Средневековье.
3. Эпоха возрождения - XV-XVI вв.
4. Период классической математики - XVII-XIX вв.
5. Период современной математики – XX - XXI вв.

Вопрос о том, в какой степени школьная математика должна отражать современные достижения науки является одним из трудных вопросов преподавания. Причем они практически не затрагивались и не обсуждались в курсах методики преподавания математики, однако дискутируются в кругах ученых-математиков. Особенно широко эти вопросы обсуждались в середине 60-х годов, когда началась реформа математического образования в Западной Европе, а чуть позже, в начале 70-х годов, и в нашей стране. В 1966 г. в Москве проходил Международный конгресс математиков, на котором выступил известный бельгийский математик Жорж Папи. В своем докладе "Геометрия в современном преподавании математики" он обосновал необходимость введения элементов современной математики в школьный курс ([7], из списка литературы в конце настоящего параграфа).

По исследуемой проблеме заслуживают внимания статьи двух крупных математиков Р. Тома и Ж. А. Дьедонне ([9], [3]). В них авторы обосновывают необходимость введения элементов современной математики в соответствующие школьные курсы.

В начале 70-х годов прошлого века в нашей стране началась реформа математического образования. Ее вдохновителем был академик А. Н. Колмогоров. В одной из своих статей, посвященных школьному образованию ([6]), он заметил, что введение общих понятий множества, отображения, группы, упрощает изложение школьной математики. Новое содержание курса математики должно "убедительно показать, что "современная математика" позволяет строить математические модели реальных ситуаций и процессов, изучаемых в применениях, не только не хуже, но логически последовательнее и проще, чем традиционная". Свои идеи Колмогоров воплотил в школьных учебниках: Геометрия 6-8.- М.;1982; Алгебра и начала анализа" /10-11 кл.: Под ред. А.Н.Колмогорова.

В работе Б. В. Гнеденко "Математика и математическое образование в современном мире" ([2]), освещены различные аспекты математического образования, в частности то, как современная математика должна быть отражена в ее преподавании в школе. Прежде всего, современность, по мнению автора, выражается в умении установить связи между традиционным содержанием школьной математики - достаточно формальным и абстрактным, и современными проблемами техники и открытиями науки. При этом знание современных направлений математики должно обогащать курс и при этом помогать ребятам решать традиционные классические задачи, которые, по-прежнему, должны составлять обязательное ядро математического образования.

Еще одна работа, на которой мы остановимся, статья В. Г. Болтянского "Теория познания и проблемы школьного математического образования"([1]). В ней автор четко говорит о своем отношении к структуре школьных программ по математике, а именно: основное содержание школьного курса должны составлять понятия и факты прошлых исторических периодов, они "откристаллизованы в процессе исторического развития науки и очищены от второстепенных деталей". Именно поэтому фактам, относящимся к современному историческому периоду, сырым и не устоявшимся, не место в школьном учебнике. Но, с другой стороны, некоторые понятия современной математики, современная символика, изложение, новые методы решения задач обязательно должны быть включены в школьный курс математики.

Следует сказать, что внедрение "современной математики" в массовую школу во многом не дало ожидаемых результатов. В последние годы наметился даже некоторый отход к прежнему традиционному содержанию математического образования. Нам представляется, что во многом это связано с тем, что школа в то время не была дифференцированной, а введение элементов современной математики, безусловно, требует дифференцированного подхода. В наибольшей степени это можно осуществить в математических классах. Однако и в гуманитарных классах учащихся можно познакомить с некоторыми современными направлениями развития геометрии и крупными учеными геометрами, с основными современными понятиями и их трактовкой, с некоторыми идеями решения математических проблем на научно-популярном уровне. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Понятие выпуклости.

В курсе стереометрии учащимся предлагаются только выпуклые многогранники - выпуклые призмы и пирамиды, выпуклые правильные многогранники. При этом само понятие выпуклости не объясняется, хотя оно является одним из фундаментальных понятий математики. С учащимися естественно-научного и прикладного профиля можно рассмотреть это понятие. Появилось оно относительно недавно. Основы теории выпуклых многогранников были заложены в конце XIX века в работах математиков Г. Бруна и Г. Минковского. Глубокие результаты в этой области получены нашими отечественными современными математиками А. Д. Александровым и А. В. Погореловым. Теория выпуклых многогранников имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и широкое практическое приложение: в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, в бурно развивающихся в последние десятилетия областях прикладной математики, например, линейном программировании, теории оптимального управления, математических методах в экономике. Рассмотрим некоторые вопросы методики изучения понятия выпуклости с учащимися старших классов.

Учащиеся интуитивно понимают, какая фигура (например, какой плоский многоугольник или многогранник), является выпуклой, а какая невыпуклой. Во всяком случае, учащиеся отличают выпуклую призму от невыпуклой призмы. При этом можно зафиксировать с учащимися одно характерное свойство выпуклых фигур, в частности, выпуклых многогранников: выпуклый многогранник лежит по одну сторону от каждой своей грани. Затем предложить учащимся определить, являются ли выпуклыми или невыпуклыми многогранники с одной "дырой", с двумя "дырами" (или окнами), изображенные соответственно на рисунках 95, а,б.

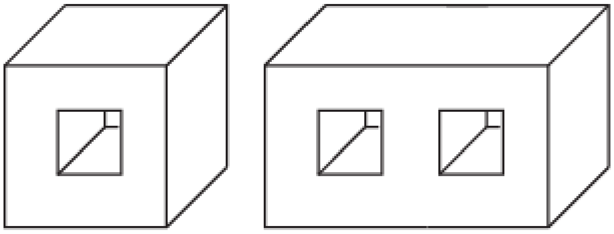


Рис. 95

Как правило, учащиеся отвечают, что это выпуклые многогранники или вообще затрудняются ответить на вопрос. Вот тут, опираясь на наглядные представления учащихся об известных, не вызывающих сомнения в своей выпуклости многогранниках, можно дать общее определение выпуклой фигуры.

Фигура Ф называется *выпуклой*, если для любых ее точек A и B отрезок AB целиком содержится в Ф.

Затем можно записать то же самое с помощью символов.

Ф - выпуклая точки A и $B \in$ Ф, $[AB] \subset$ Ф.

Теперь учащимся можно предложить попробовать воспользоваться этим определением для выяснения выпуклости сначала нескольких плоских, а потом пространственных фигур.

Вопросы учащимся:

1. Может ли треугольник быть невыпуклой фигурой?
2. Какой многоугольник называется выпуклым?
3. Что можно сказать о пересечении и объединении выпуклых фигур?

Доказательство того, что пересечение выпуклых фигур является выпуклой фигурой, будет полезным упражнением для учащихся. Оно имеет простое решение, но при этом учащиеся овладевают методами, нетрадиционными для школьного курса математики.

Решение. Пусть фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$ - выпуклые (рис.96). Рассмотрим фигуру $Ф=Ф_1 \cap Ф_2$. Если точки A и B принадлежат Ф, то A, B принадлежат $Ф_1$. Следовательно, отрезок AB лежит в $Ф_1$. Аналогично, так как точки A, B принадлежат $Ф_2$, то отрезок AB лежит в $Ф_2$. Таким образом, отрезок AB содержится как в фигуре $Ф_1$, так и в фигуре $Ф_2$. Поэтому, он содержится и в их пересечении. Следовательно, Ф - выпуклая фигура.

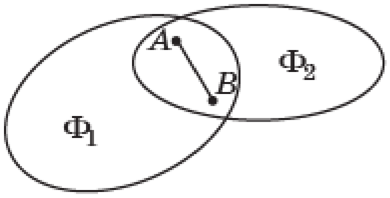


Рис. 96

Воспользовавшись определением выпуклой фигуры, учащиеся теперь без труда выясняют, что многогранники с одной и двумя "дырами" являются невыпуклыми. Вообще многогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. любые две его точки соединимы в нем отрезком.

Далее, по усмотрению учителя, можно рассмотреть свойства выпуклых многогранников. Мы в своей работе предлагаем учащимся некоторые из них (см. параграф 7):

I. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

П. Если многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то он выпуклый.

Ш. Каждая грань выпуклого многогранника является выпуклым многоугольником.

IV. Плоскость, проходящая через внутреннюю точку выпуклого многогранника, пересекает его по выпуклому многоугольнику.

Все эти свойства весьма наглядны, первые два являются соответственно необходимым и достаточным условиями выпуклого многогранника. Кроме этого, сами доказательства не сложны и являются хорошим примером нестандартных задач с принятыми в математике методами решения.

Еще несколько примеров нестандартных задач, которые мы предлагаем учащимся.

1. Является ли пересечение двух выпуклых многогранников выпуклым многогранником?

Ответ. Нет не является. Например, на рисунке 97 изображены два куба, пересечением которых является точка.

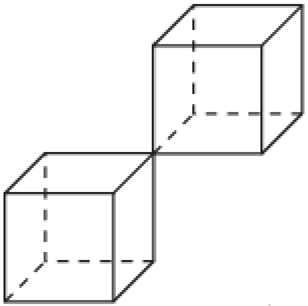


Рис. 97

2. Может ли выпуклый многогранник иметь 15 плоских углов?

Решение. Число плоских углов выпуклого многогранника всегда четно, так как равно $2P$, где P - число ребер данного многогранника. Таким образом, выпуклый многогранник не может иметь 15 плоских углов.

3. Существуют ли, отличные от куба, выпуклые многогранники, все грани которых квадраты? Тот же вопрос для невыпуклых многогранников?

Решение. Таких выпуклых многогранников, кроме куба, не существует, так как в вершине не может сходится больше трех квадратов. В случае невыпуклого многогранника это возможно. В качестве примера можно взять многогранник - "трехмерный крест" (рис. 98), который состоит из семи одинаковых кубов.

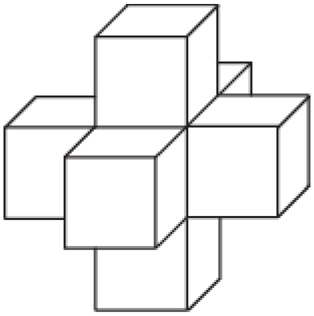


Рис. 98

Одним из основных методов представления элементов современной математики является работа с научно-популярной литературой. Для этого мы разработали систему индивидуальных заданий для учащихся. Перед изучением каждой темы ребятам предлагается подробный перечень всех индивидуальных заданий, и каждый выбирает себе задание в соответствии со своими интересами и вкусами. В список научно-популярной литературы нами обязательно включается физико-математический журнал "Квант". Объясняется это следующими причинами. На его примере можно познакомить школьников с особенностями работы с научно-популярной литературой. Журнал имеет интересную содержательную подборку по многим темам школьного курса стереометрии. "Квант" легкодоступен учащимся и учителям, в каждом кабинете математики, как правило, имеются его комплекты за все годы (начиная с 1970).

Работу с журналом мы проводим обычно в несколько этапов, а именно:

1 этап. Общее знакомство учащихся с историей журнала, историей его названия, основными рубриками.

П этап. Учащимся предлагается статья по определенной теме и дается подробный план ее изучения в виде конкретных вопросов, ответы на которые содержатся в тексте статьи.

Ш этап. Сообщение по конкретной статье, но учащийся уже сам должен выбрать главный и второстепенный материал, самостоятельно составить план своего выступления.

IV этап. Учащемуся предлагается сделать подборку статей по определенной тематике и составить их краткую аннотацию.

Самым важным, пожалуй, является П этап, который выполняется каждым учеником во время подготовки своего первого индивидуального задания по журналу. Например, по теме, связанной с выпуклыми фигурами, о которой мы говорили, учащимся предлагается индивидуальное задание по статье Савина А. Кое-что о выпуклости (Квант.-1979. - № 1. - С.42). Учащемуся, который выбрал это индивидуальное задание, предлагаются следующие вопросы:

1). Какой смысл имеет понятие выпуклости в математике?

2). Является ли куб выпуклой фигурой?

3). Всегда ли треугольник является выпуклой фигурой? А четырехугольник?

4). Является ли пересечение двух или даже нескольких выпуклых фигур выпуклой фигурой?

5). Какая прямая по отношению к плоской фигуре называется опорной?

6). Аналогично, какая плоскость по отношению к выпуклой пространственной фигуре называется опорной?

7). В чем заключается теорема Э. Хелли для трехмерного пространства?

Ниже приведена полная система индивидуальных заданий по журналу "Квант".

Перейдем теперь к следующему примеру.

Пример 2. Изучение поверхностей.

При изучении поверхностей, площадей поверхностей появляется прекрасная возможность, не тратя много лишнего времени, представить учащимся такой современный раздел математики, как топология. По мнению академика А. Д. Александрова, "топология вызывает часто у людей, с ней не знакомых, представление о чем-то чрезвычайно трудном и абстрактном. Однако в ее обосновании лежит, по-существу, описание математическим языком наглядных пространственных представлений. В этом смысле топология есть часть общей геометрии и потому основанные на ней методы должны рассматриваться как геометрические, хотя и абстрактные" (Выпуклые многогранники. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950, с. 9).

В топологии рассматриваются поверхности и их свойства, с простейшими из которых можно познакомить учащихся. Например, со свойством поверхности выпуклых (и некоторых невыпуклых) многогранников, которое известно как теорема Эйлера: В - Р + Г = 2 , где В - число вершин, Р - ребер, Г - граней данного многогранника.

Это сам по себе необычный, неожиданный, красивый математический факт, кроме того, имеющий несколько изящных топологических доказательств, вполне доступных учащимся (и не только математических классов). Например, в одном доказательстве прибегают к такому характерному для топологии приему: поверхность многогранника представляют сделанной из тонкого эластичного материала, вырезают одну грань и оставшуюся поверхность "растягивают" на плоскости. При этом грани и ребра, конечно, деформируются, но их число, а следовательно, и соотношение Эйлера, не изменяется. При другом доказательстве поверхность многогранника "натягивают" на сферу. Тогда на сфере образуется некоторый граф, имеющий одинаковое число вершин и ребер с поверхностью многогранника.

Соотношение Эйлера - пример топологического свойства поверхности выпуклого многогранника, так как топологическими свойствами фигур называются свойства, которые не изменяются при различных деформациях, исключающих склеивания и разрывы. Именно поэтому историки математики назвали теорему Эйлера, доказанную ученым в 1752 году, первой теоремой топологии. Заметим, что термин "топология" появился позже, в 1847 году, в произведении "Предварительные исследования по топологии" геттингенского математика и физика Иоганна Бенедикта Листинга (1808-1882). Этот термин, ныне общепринятый, применялся до 20-х годов нашего века, довольно, редко.

В заключение приведем систему индивидуальных заданий для учащихся по журналу "Квант" при изучении всего курса стереометрии. Информацию представим в виде следующей таблицы:

Таблица 5.

Тема	Тема урока	Индивидуальное задание	Год	№	С.
Начальные разделы стереометрии	Аксиомы стереометрии. Следствия из аксиом.	Смилга В. Как начиналась геометрия. Земляков А. Введение в в стереометрию или "Аксиоматические игры".	1992 1985		1 4
Параллельность прямых в пространстве	Параллельные прямые в пространстве Параллельность прямой и плоскости. Изображения пространственных фигур на плоскости.	Александров П. Николай Иванович Лобачевский. Соловьев Ю. Николай Иванович Лобачевский. Лобачевский Н.И. Геометрические исследования параллельных линий. Болтянский В.Г. Загадка "Аксиомы параллельных". Сабитов И.Х. Так ли прост евклидов мир? Фукс Д.Б. Перспектива. Театр теней (Калейдоскоп Кванта). Шарыгин И.Ф. Чертеж в стереометрических задачах. Климанов А.И. Стереоскопические чертежи.	1976 1992 1992 1976 1984 1984 1991 1984	1 2	4 7 5

Перпендикулярность прямых и плоскостей	Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей. Скрещивающиеся прямые.	Кучеров В. Геометрические аналогии. Габович И. Вспомогательные отрезки и углы. Либерзон М.Р. Вспомогательный куб. Виро О.Я., Дроботухина Ю.В. Сплетение скрещивающихся прямых.	1981 1981 1986 1988	10 9 5 3	44 46 46 12
Декартовы координаты, и векторы в пространстве	Введение декартовых координат. Преобразования фигур в пространстве. Векторы в пространстве.	Дорофеева А.В. Рене Декарт и его "Геометрия." Котова А. Жизнь Декарта Шувалов Э. Координатный метод. Повороты и пересечения многогранников. Чехлов В. Эти "коварные" векторы. Ивлев Б.М. Векторы в геометрических задачах. Соловьев Ю.П., Сосинский А.Б. Геометрия скользящих векторов.	1987 1996 1977 1977 1980 1985 1985	9 3 11 11 12 10 8	15 2 82 44 40 21 9
Уравнение плоскости	Уравнение плоскости. Повторение.	Назаретов А. Плоскость в пространстве. Беве Л. Любая карта на плоскости может быть раскрашена в четыре цвета.	1982 1977		38 60

Многогранники	Многогранные углы.	Ивлев Б.М. Двугранные и трехгранные углы.	1984	12	23
	Определение многогранника.	Савин А.П. Кое-что о выпуклости.	1979	1	42
	Выпуклые многогранники.	Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер.	1983	10	17
	Построение сечений.		1983	11	17
	Пирамида.	Вавилов В. Сечения многогранников.	1979	1	36
		Габович И.Г. Основные углы в правильной пирамиде.	1986	1	49
	Правильные многогранники.	Матизен В.Э., Дубровский В.Н. Из геометрии тетраэдра.	1988	9	66
		Березин В.Н. Правильные многогранники.	1973	5	26
		Правильные многогранники (калейдоскоп Кванта)	1988	11-12	48
		Савченко В. Полуправильные многогранники.	1976	1	12

Кроме журнала "Квант" при работе с учащимися, при подготовке индивидуальных заданий использовалась научно-популярная литература из следующих известных серий: 1). Библиотечка математического кружка. 2). Библиотечка физико-математической школы. 3). Популярные лекции по математике. 4). Мир знаний. 5). Библиотечка "Квант".

§ 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ НЕОБЯЗАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

п. 23*. Центральное проектирование. Изображение пространственных фигур в центральной проекции (два урока)

Наряду с параллельным проектированием, применяемым в геометрии для изображения пространственных фигур, большое значение имеет, так называемое, центральное проектирование, используемое в живописи, фотографии и т.д. Восприятие человеком окружающих предметов посредством зрения осуществляется по законам центрального проектирования. Цель данных уроков - познакомить учащихся с понятием центрального проектирования и его свойствами.

Урок 1

I. Новый материал.

Пусть $\boldsymbol{\pi}$ некоторая плоскость, S - не принадлежащая ей точка - центр проектирования. Через точку A пространства проведем прямую a, соединяющую эту точку с точкой S. Точка пересечения этой прямой с плоскостью р называется центральной проекцией точки A на плоскость р. Обозначим ее A'. Соответствие, при котором точкам A пространства сопоставляются их центральные проекции A', называется центральным проектированием или иначе перспективой (рис. 99).

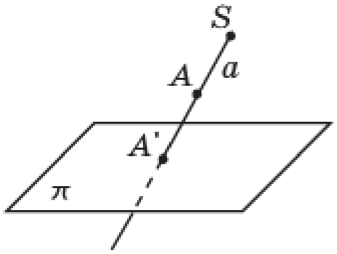


Рис. 99

Заметим, что не для каждой точки пространства определена ее центральная проекция. В случае, если прямая a параллельна плоскости , точка A не имеет проекции на эту плоскость.

Если Ф - фигура в пространстве, то проекции ее точек на плоскость π образуют фигуру Ф', которая называется центральной проекцией фигуры Ф на плоскость $\boldsymbol{\pi}$. Говорят также, что фигура Ф' является перспективой фигуры Ф.

Далее рассматриваются случаи центрального проектирования, когда: а) плоскость проектирования расположена между фигурой Ф и центром проектирования *S* (рис. 100);

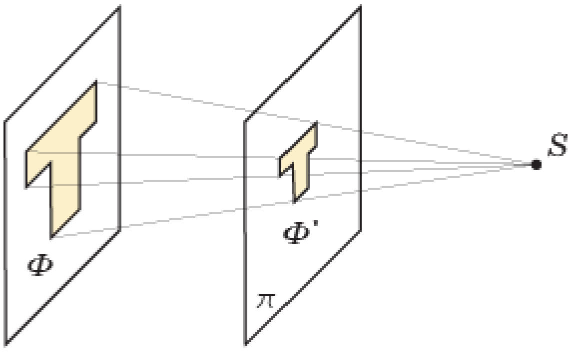


Рис. 100

б) центр проектирования расположен между фигурой Ф и плоскостью проектирования (рис. 101), такое перевернутое изображение получается на пленке фотоаппарата, объектив которого помещен в центр проектирования;

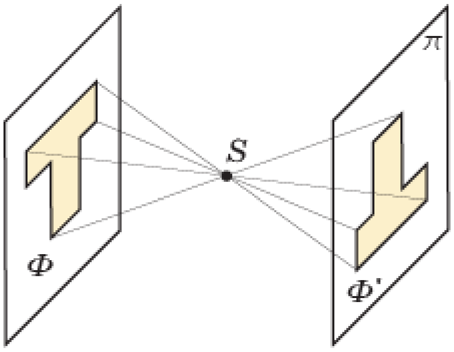


Рис. 101

в) когда фигура Ф расположена между плоскостью проектирования и центром проектирования (рис. 102), примеры таких проекций дают тени предметов от близко расположенного точечного источника света. Такие проекции получаются на экране при показе кинофильмов, диафильмов и т. д.

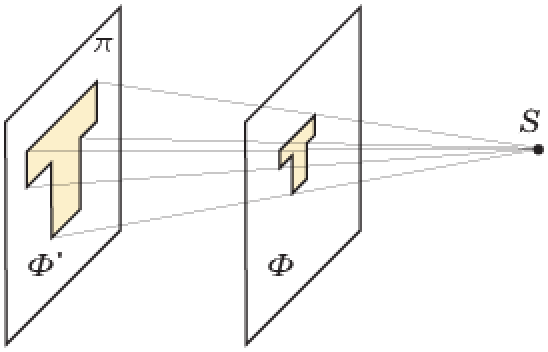


Рис. 102

Далее доказываем теорему о том, что если плоская фигура *F* расположена на плоскости α, параллельной плоскости проектирования π, то ее центральной проекцией будет фигура *F'*, подобная *F*, причем коэффициент подобия *k* будет равен отношению расстояний от центра *S* до плоскостей π и α (рис. 103).

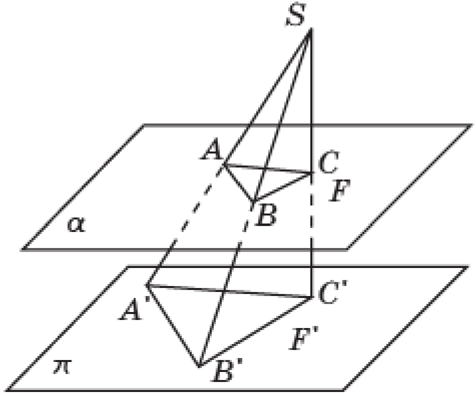


Рис. 103

Определим преобразование фигуры *F* в фигуру *F*', сопоставляя точкам фигуры *F* их проекции. Через центр *S* проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Так как плоскости α и π параллельны, то эта прямая будет перпендикулярна и плоскости α. Точкам пересечения этой прямой с плоскостями α и π обозначим *C* и *C*' соответственно. Для точек *A* и *B* фигуры *F* на плоскости α рассмотрим их проекции *A*', *B*' и треугольники *ABS*, *A*'*B*'*S* и *ACS*, *A*'*C*'*S*. Они подобны, и коэффициент подобия *k* равен отношению *SC'*:*SC*. Таким образом, определенное преобразование фигуры *F* в фигуру *F*' изменяет расстояние между точками в одно и то же число раз. Следовательно, фигуры *F* и *F*' подобны.

Прежде чем перейти непосредственно к изображению пространственных фигур в центральной проекции, рассматриваем вопрос о том, куда при центральном проектировании переходит прямая.

Пусть прямая a пересекает плоскость проектирования π, и центр проектирования S не принадлежит прямой a. Найдем проекцию этой прямой на плоскость π. Для этого через прямую a и центр проектирования S проведем плоскость α и линию ее пересечения с плоскостью π обозначим a' (рис. 104).

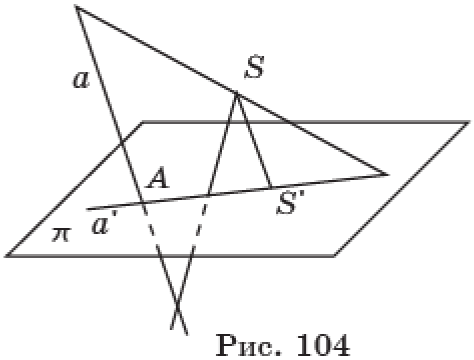


Рис. 104

В плоскости α через точку S проведем прямую s, параллельную a, и точку ее пересечения с прямой a'обозначим S'. Легко видеть, что прямая a' без точки S' и является искомой проекцией прямой a на плоскость π.

Рассмотрим вопрос о том, куда при центральном проектировании переходят параллельные прямые. Как мы знаем, при параллельном проектировании параллельные прямые переходят или в параллельные прямые, или в одну прямую, или в две точки, в зависимости от расположения этих прямых. Оказывается, что при центральном проектировании параллельные прямые могут переходить и в пересекающиеся прямые.

Пусть прямые a и b параллельны и пересекают плоскость π, а центр проектирования не лежит в плоскости этих прямых (рис. 105).

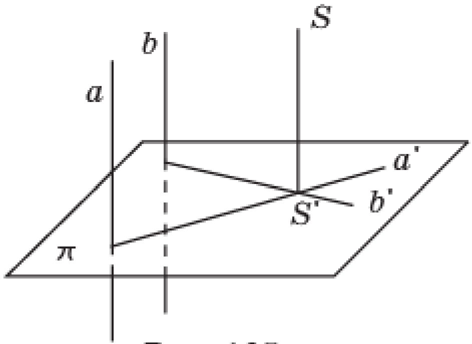


Рис. 105

Тогда, выполняя предыдущие построения для прямых a и b, получим, что их проекциями будут пересекающиеся прямые a' и b', за исключением общей точки S'. Впечатление, что параллельные прямые пересекаются, возникает, когда мы смотрим на уходящую вдаль дорогу, железнодорожные рельсы, провода и т. д.

Теперь, используя рассмотренные свойства, можно перейти к изображению простейших пространственных фигур в центральной проекции. Например, на рисунке 106 изображен куб в центральной проекции на плоскость, параллельную грани ABB_1A_1.

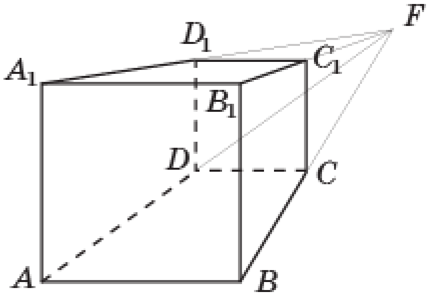


Рис. 106

II. Закрепление нового материала.

1. Пусть прямая a пересекает плоскость π и не проходит через точку S. Покажите на рисунке 104 куда при центральном проектировании переходит часть прямой a, расположенная ниже плоскости π? Куда переходит часть прямой a, расположенная выше плоскости π?

Ответ. Часть прямой a, расположенная выше плоскости π переходит в отрезок AS'(рис. 104); выше плоскости π - в прямую a без отрезка AS'.

2. Покажите, что если прямые a и b параллельны плоскости проектирования π, и центр проектирования S не принадлежит плоскости этих прямых, то их проекциями являются параллельные прямые.

3. Нарисуйте центральную проекцию куба на плоскость, параллельную ребру BB_1, но не параллельную его граням.

Решение показано на рисунке 107.

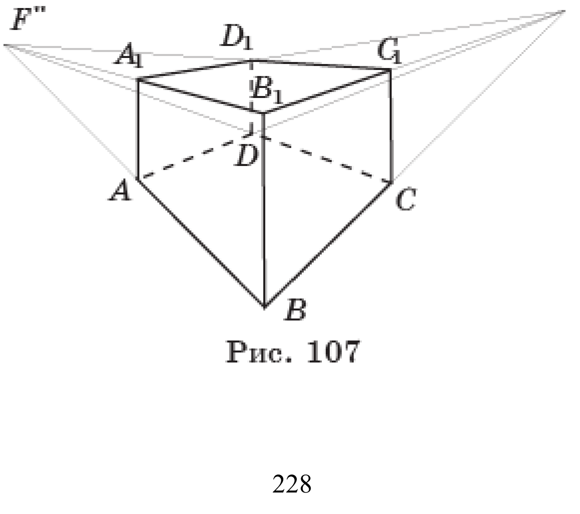


Рис. 107

4*. Нарисуйте центральную проекцию куба, аналогичную изображенной на рисунке 108 так, чтобы точка F лежала внутри изображения грани ABB_1A_1.

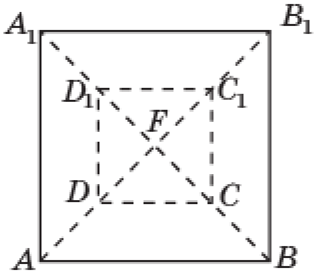


Рис. 108

Урок 2

I. Опрос учащихся.

Индивидуальные задания по карточкам.

Карточка 1

1. Что называется центральной проекцией точки пространства?

2. При каких условиях центральное проектирование дает не перевернутое изображение?

3. Для всех ли точек пространства определена центральная проекция? Ответ поясните?

4. Какой фигурой является сечение n-угольной пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию?

Карточка 2

1. Что называется центральным проектированием?

2. При каких условиях центральное проектирование дает перевернутое изображение?

3. Для каких точек пространства не определена центральная проекция на плоскость π с центром проектирования S?

4. Какой фигурой является сечение конуса плоскостью, параллельной ее основанию?

II. Задание классу.

1. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде найдите угол наклона боковой грани к плоскости основания.

Ответ. tg φ=$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$, где φ - искомый угол.

2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 дм и 1 дм. Боковое ребро - 2 дм. Найдите высоту.

Решение. Пусть дана правильная усеченная пирамида с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$, их центры - O, O_1. Рассматриваем прямоугольную трапецию, например OO_1C_1C. У нее $O_1C=\frac{\sqrt{3}}{3}$см; $OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см; CC_1=2 см. Тогда OO_1=1 см.

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ проведите сечение, проходящее через три точки: $M\in (ADB)$, $N\in (BDC)$, $K\in (ABC)$.

Решение показано на рисунке 109.

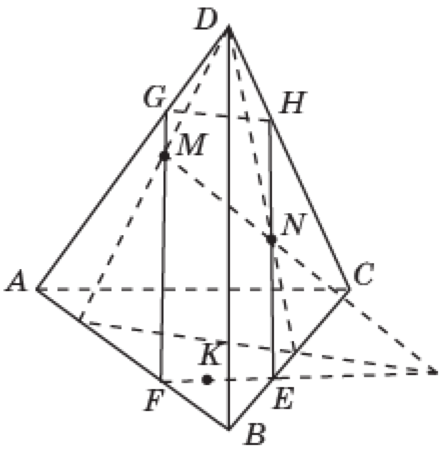


Рис. 109

III. Устная работа.

1). Что называется центральной проекцией точки на плоскость? Что называется центральным проектированием?

2). У всех ли точек пространства существует центральная проекция?

Ответ. Нет, не у всех, например у точек, принадлежащих прямой, проходящей через центр проектирования и параллельной плоскости проектирования.

3). Укажите геометрическое место точек, для которых не существует центральных проекций на плоскость проектирования π с центром проектирования S.

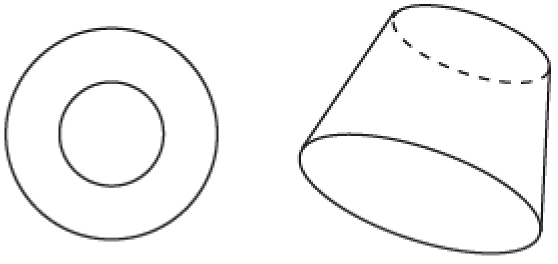
Ответ. Этим геометрическим местом точек будет плоскость, параллельная плоскости π и проходящая через точку S.

4). В каком случае центральное проектирование дает перевернутое изображение фигуры?

Ответ. В случае, если центр проектирования расположен между фигурой и плоскостью проектирования.

5). В какую фигуру переходит при центральном проектировании: а) точка; б) прямая; в) параллельны прямые; г) прямая, параллельная плоскости проектирования?

6). На рисунках 110, а, б изображен прямой круговой цилиндр в центральной проекции. Как расположена в каждом случае плоскость проектирования относительно его оснований?



а) б)

Рис. 110

Ответ. В случае а) плоскость проектирования параллельна основаниям цилиндра; в случае б) - не параллельна.

IV. Индивидуальные задания учащихся.

№ 1. - Из истории перспективы.

Этот доклад посвящен краткому историческому очерку развития перспективы, которая возникла как наука еще в Древней Греции. Первые упоминания о ней встречаются в работах Эсхила (525-456 гг. до н.э.). Значительное место изображению пространственных фигур с использованием перспективы уделено в трактате "О геометрии" известного мыслителя и ученого Демокрита (ок. 460-370 гг. до н.э.).

Следующее упоминание о перспективе находим в работах Евклида. Помимо своих знаменитых "Начал", он написал много других сочинений. В том числе, в работе "Оптика" Евклид с позиций геометрии подробно изложил природу человеческого зрения, того как получается изображение различных предметов на сетчатке глаза.

Самыми значительными работами по перспективе древнегреческого периода считаются произведения римского архитектора и инженера Марка Витрувия Поллиона (точные даты его жизни не установлены, ум. ок. 25 г. до н.э.). Способы построения изображений в перспективе изложены ученым в труде "Об архитектуре", состоящем из десяти книг.

Следующим важным этапом в развитии теории перспективы стала эпоха Возрождения. При этом теоретиком перспективы считается итальянский архитектор Филиппо Брунеллески (1377-1446), а практиками, воплотившими ее достижения в своих полотнах - великие художники Леонардо да Винчи (1452-1519) и А.Дюрер (1471-1528) и многие другие художники, скульпторы, архитекторы Возрождения.

А. Дюрер предложил в своих книгах несколько устройств, позволяющих получать перспективу, несколько из которых он изобразил на своих гравюрах.

Здесь, желательно, показать учащимся репродукции этих гравюр художника. Их можно найти, например, в книге Макаровой М.Н. Перспектива. - М.: Просвещение, 1989, 2-я с.обл., с.15, 3-я с.обл.; в журнале "Математика в школе".-1994.- № 2.-3-я с.обл.

№ 2. - Перспектива в живописи.

Картина, упрощенно говоря, это перспективное изображение. И в зависимости от своего творческого замысла художник выбирает положение центра проектирования, которое определяет зрительское восприятие.

Здесь мы демонстрируем учащимся репродукции картин известных русских живописцев. Например, картину Н.Н. Ге "Петр Первый допрашивает царевича Алексея", где главная точка - центр перспективы находится в центре картины. Такое же положение занимает центр и в картине И.Е.Репина "Не ждали". На полотне П.А.Федотова "Сватовство майора" центр смещен, чтобы подчеркнуть смысловое содержание изображенных событий.

Задание на дом

1. Выучить: определения центральной проекции, центрального проектирования; теорему об изображении фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проектирования (п. 23* учебника)

2. Решить задачи.

1). Нарисуйте центральную проекцию правильной четырехугольной пирамиды на плоскость, не параллельную ее основанию.

Решение представлено на рисунке 111.

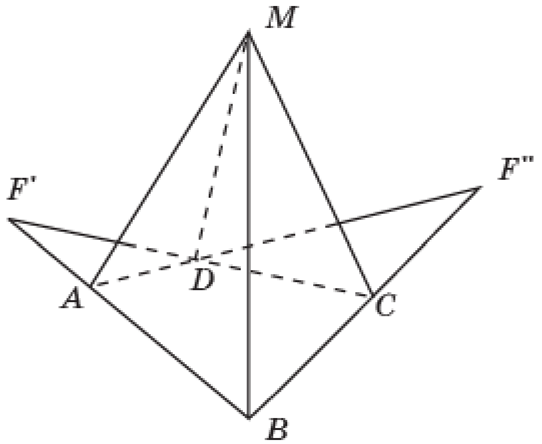


Рис. 111

2). Нарисуйте центральную проекцию куба на плоскость, не параллельную никакому ребру этого куба.

Решение показано на рисунке 112.

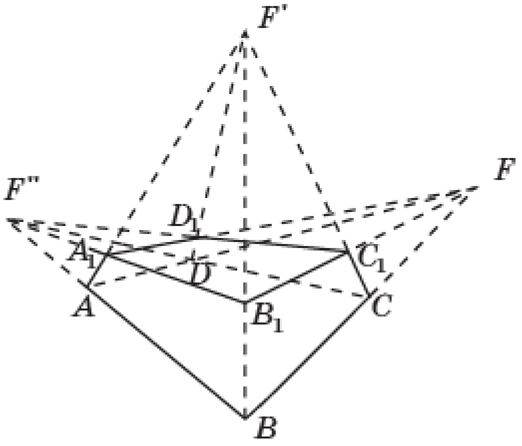


Рис. 112

3). Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды 4 дм. Стороны ее оснований 2 дм и 8 дм. Найдите площадь боковой грани пирамиды и ее боковое ребро.

Ответ. Боковое ребро равно $\sqrt{34}$ дм; площадь боковой грани - 25 дм^2.

4). Постройте сечение треугольной пирамиды *ABCD* плоскостью, проходящей через точки $M \in (ABD)$ и $N \in (BDC)$ параллельно ребру *AC*.

Решение показано на рисунке 113. Прямая *EF* проводится параллельно ребру *AC*.

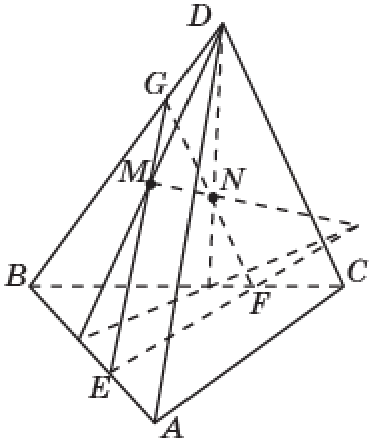


Рис. 113

3*. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды *ABCD* плоскостью, проходящей через точку $M \in DO$, где *DO* - высота пирамиды, параллельно грани *CDB*.

Решение показано на рисунке 114. $CH=BH$, $LK \| DH$, $EF \| CB$.

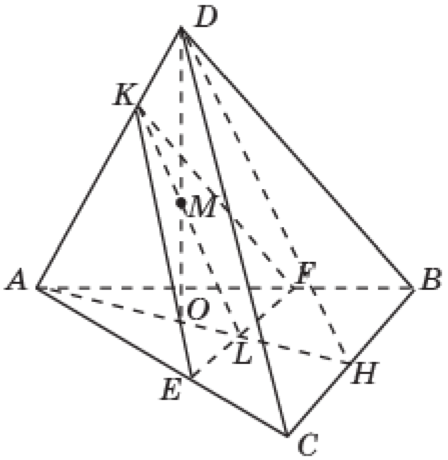


Рис. 114

4**. Индивидуальные задания для учащихся.

№ 1. Подготовить сообщение на тему "Из истории перспективы" (использовать книгу Макаровой М.Н. Перспектива. - М.: Просвещение, 1989, с.5).

№ 2. Сообщение "Образы пространства - искусство и реальность" (Загянская Г. //Квант.-1993.-№ 1-2, № 3-4, № 9-10.-2-я с.обл.).

п. 25*. Выпуклые многогранники (один урок)

Целью данного урока является знакомство с понятиями выпуклой фигуры и выпуклого многогранника. Учащиеся должны знать определение выпуклого многогранника, некоторые свойства выпуклых многогранников, уметь приводить примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.

Урок 1

I. Лабораторная работа.

Учащимся предлагаются (раздаются на каждую парту) следующие материалы: а) набор плоских фигур, среди которых круг, треугольник, параллелограмм, невыпуклый четырехугольник, бесформенная невыпуклая плоская фигура, пентаграмма, многоугольник с "дырой", правильный шестиугольник; б) развертки многогранников: тетраэдра, параллелепипеда, невыпуклой четырехугольной пирамиды; в) детали геометрического конструктора (о нем шла речь при изучении основного пункта 4 учебника, уроки 7, 8) для сборки куба, правильной пятиугольной пирамиды, правильного октаэдра, невыпуклой четырехугольной призмы.

Задания

1. Сравнить плоские фигуры и провести их классификацию, разделив их на два класса по некоторому выявленному признаку.

2. Собрать из представленных разверток и конструктора многогранники. Провести среди них классификацию, аналогичную в случае плоских фигур.

3. Сделать вывод.

II. Новый материал.

После проведения лабораторной работы учащиеся подготовлены к введению понятия выпуклой фигуры, как фигуры, которая вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Определение. Многогранник называется выпуклым, если он является выпуклой фигурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок.

Приводим примеры выпуклых и невыпуклых многогранников. Учащимся предлагается сделать в тетрадях два рисунка: на одном изобразить выпуклый и невыпуклый многоугольники, на другом - выпуклый и невыпуклый многогранники. Два ученика выполняют это задание на доске.

Далее рассматриваем некоторые свойства выпуклых многогранников.

1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Действительно, пусть *F* - какая-нибудь грань многогранника *M*, и точки *A*, *B* - точки, принадлежащие грани *F*. Из условия выпуклости многогранника *M*, следует, что отрезок *AB* целиком содержится в многограннике *M*. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника *F*, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. *F* - выпуклый многоугольник.

2. Всякий выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Действительно, пусть *M* - выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку *S* многогранника *M*, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника *M*. Соединим точку *S* с вершинами многогранника *M* отрезками. Заметим, что в силу выпуклости многогранника *M*, все эти отрезки содержатся в *M*. Рассмотрим пирамиды с вершиной *S*, основаниями которых являются грани многогранника *M*. Эти пирамиды целиком содержатся в *M*, и все вместе составляют многогранник *M*.

III. Закрепление нового материала.

1. Покажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.

Решение. Если пирамида является выпуклым многогранником, то, согласно доказанному выше свойству 1, все ее грани - выпуклые многоугольники.

Обратно, пусть основанием пирамиды является выпуклый многоугольник. Возьмем какие-нибудь две точки *A* и *B*, принадлежащие пирамиде. Покажем, что отрезок *AB* также содержится в пирамиде. Спроектируем точки *A* и *B* из вершины *S* на основание пирамиды и полученные точки обозначим A_1 и B_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 целиком содержится в основании пирамиды. Поскольку она содержит все отрезки, соединяющие вершину с точками основания, то треугольник SA_1B_1 целиком содержится в пирамиде. Отрезок *AB* содержится в треугольнике SA_1B_1 и, следовательно, содержится в пирамиде.

2. Может ли многогранник, имея все грани выпуклыми многоугольниками, быть невыпуклой фигурой? Приведите примеры. Сделайте соответствующие зарисовки.

Решение. Да, может. В качестве примера можно привести куб с "продавленным" верхним основанием.

3. Докажите, что сумма всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°.

Доказательство. Рассмотрим многогранный угол $SA_1…A_n$ и применим теорему о сумме плоских углов к трехгранным углам с вершинами в точках $A_1, …, A_n$. Получим неравенства $\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle SA_2A_3$, …, $\angle A_{n-1}A_nA_1 < \angle A_{n-1}A_nS + \angle SA_nA_1$. Сложим почленно эти неравенства. В левой части получим сумму углов n-угольника $A_1…A_n$, которая равна $180°(n-2)$, а в правой части – сумму углов n треугольников A_1A_2S, …, A_nA_1S, кроме углов при вершине S. Обозначим сумму этих последних углов буквой Σ. Тогда $180°(n-2) < 180°n - \Sigma$ и, следовательно, $\Sigma < 180°\cdot 2 = 360°$.

IV. Задание на дом.

1. Разобрать теорию, данную на уроке (п. 25* учебника).

2. Решить задачи.

1). Покажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.

Решение аналогично решению задачи 1 из III этапа данного урока.

2). Как изменится число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, если: а) к одной из его граней пристроить пирамиду, основанием которой является эта грань; б) отсечь от него такую пирамиду.

Решение: а) пусть пирамида пристроена к грани, которая является n-угольником. Тогда число вершин многогранника увеличится на 1, ребер - на n, граней - на n-1; б) если отсечь вершину выпуклого многогранника, в которой сходится m ребер, то количество вершин многогранника увеличится на (m-1), количество ребер увеличится на m, граней увеличится на 1.

3). Покажите, что пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой?

Решение. Рассмотрим две выпуклые фигуры Φ_1, Φ_2 и фигуру Φ, которая является их пересечением, т. е. $\Phi=\Phi_1\cap\Phi_2$. Возьмем две точки A, B, принадлежащие фигуре Φ. Тогда, A, B будут принадлежать Φ_1, и отрезок AB будет лежать в Φ_1, так как, по условию, Φ_1 - выпуклая фигура.

Аналогично отрезок AB будет лежать в Φ_2. Следовательно, отрезок AB лежит в Ф, и, по определению, Ф - выпуклая фигура.

4). Покажите, что объединение выпуклых фигур может не быть выпуклой фигурой.

Решение. Достаточно привести соответствующий пример. Например, взять объединение двух пересекающихся кругов (круг – всегда выпуклая фигура).

Учащимся предлагается привести свой пример.

3*. Покажите, что у выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Выберем в многограннике грань, которая имеет наибольшее число сторон. Пусть это будет некоторый n-угольник. Тогда к ней примыкает n граней, среди которых обязательно должны найтись грани с одинаковым числом сторон, так как число сторон в каждой грани больше или равно 3 и не больше n.

п. 26*. Теорема Эйлера (два урока)

Целью данных уроков является знакомство учащихся с одним из наиболее важных свойств выпуклых многогранников - теоремой Эйлера. Эта теорема связывает вместе число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Она положила начало одному из наиболее интенсивно развивающихся в настоящее время направлений геометрии - топологии.

Урок 1

I. Опрос учащихся.

Классу предлагаем следующие вопросы и задачи.

1. Может ли треугольник быть невыпуклой фигурой? А тетраэдр?

2. Покажите, что круг и шар являются выпуклыми фигурами.

3. Выпуклой или невыпуклой фигурой является полупространство?

4. Покажите, что в сечении выпуклого многогранника плоскостью всегда получается выпуклая фигура.

Решение. Пусть $Ф_1$ - выпуклый многогранник, $Ф_2$ - плоскость, тоже выпуклая фигура. Тогда, как было доказано выше, фигура $Ф=Ф_1 \cap Ф_2$ является выпуклой фигурой.

5. Покажите, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Решение. Пусть M - выпуклый многогранник и N - его произвольная грань, α - плоскость, в которой лежит многоугольник N. Зафиксируем какую-нибудь точку A_0, лежащую внутри M, и возьмем произвольную точку $A_1 \in M$. Тогда отрезок A_0A_1, за исключением точки A_1, состоит только из внутренних точек M и, следовательно, не может пересекаться с α. Таким образом, точка A_1 лежит по ту же сторону от α, что и точка A_0, т. е. M лежит по одну сторону от α.

6*. Существует ли выпуклый многогранник с семью ребрами?

Решение. Нет, не существует. Объяснение может быть следующим: минимальное количество ребер, которые могут образовывать многогранный угол - 3, остается 4 ребра, это много для образования тетраэдра. Если же теперь взять четырехгранный угол, то останется 3 ребра, и будет недоставать одного ребра для образования четырехугольной пирамиды. Других вариантов нет. Заметим, что для образования n-угольной пирамиды необходимо $2n$ ребер; n-угольной призмы - $3n$ ребер.

Двоих учащихся приглашаем за первую парту - опрос по теории.

Задание для первого ученика:

1). Какая фигура называется выпуклой?

2). Приведите несколько примеров выпуклых и невыпуклых плоских и пространственных фигур.

3). Покажите, что в выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Задание для второго ученика:

1). Какой многогранник называется выпуклым?

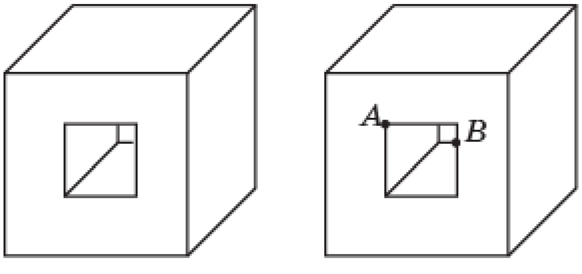
2). Приведите примеры и нарисуйте несколько выпуклых и невыпуклых многогранников.

3). Покажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда ее основанием является выпуклый многоугольник.

Четверым учащимся даем следующие индивидуальные задания на отдельных карточках (работа выполняется на своих местах):

Карточка

1. Дан многогранник с "дырой" или "окном" (рис. 115, а). Будет ли он выпуклым многогранником? Почему?



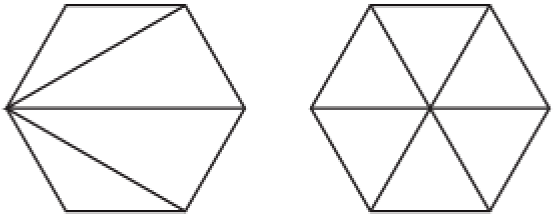
а) б)

Рис. 115

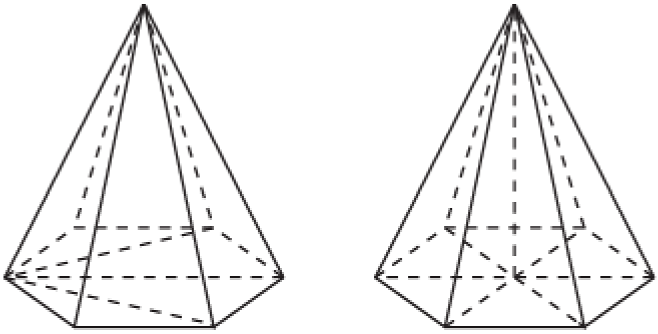
Ответ. Нет, данный многогранник не является выпуклым. Для того, чтобы показать это, достаточно взять, например, вершины *A* и *B* (рис. 115, б). Отрезок *AB* не будет полностью лежать в данном многограннике.

2. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на конечное число тетраэдров.

Решение. По доказанному выше второму свойству, выпуклый многогранник может быть разбит на конечное число пирамид с вершиной в любой внутренней точке многогранника. Основаниями пирамид являются грани многогранника. Каждую такую пирамиду можно разбить на тетраэдры, разбив основание на треугольники, которые будут основаниями тетраэдров, а их вершины будут совпадать с вершиной пирамиды. Многоугольник можно разбить на треугольники несколькими способами, например так, как показано для шестиугольника на рисунках 116, а, б.


а) Рис. 116 б)

На рисунках 117, а, б показаны соответствующие разбиения шестиугольной пирамиды на тетраэдры. В первом случае получилось 4 тетраэдра, а во втором - 6.


а) Рис. 117 б)

II. Новый материал.

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой В - число вершин, Р - ребер и Г - граней данного многогранника):

Таблица 6

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6

n – угольная пирамида	n+1	2n	n+1
n – угольная призма	2n	3n	n+2

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В - Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство В - Р + Г = 2 (*), где В - число вершин, Р - число ребер и Г- число граней данного многогранника.

Доказательство. Представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим сетку (рис. 118, а), содержащую Г' = Г - 1 многоугольников (которые, по-прежнему, будем называть гранями), В вершин и Р ребер.

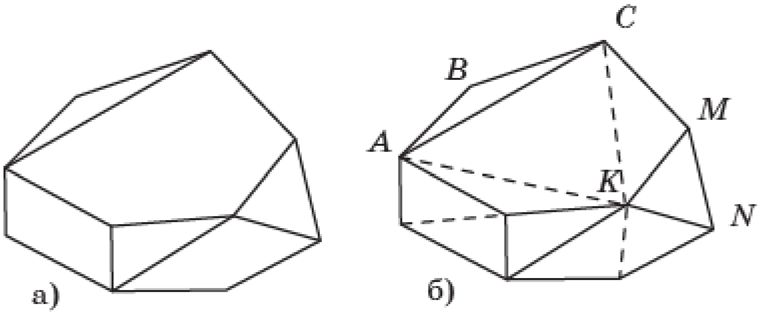


Рис. 118

Для этой сетки нужно доказать соотношение В - Р + Г' = 1 (**), тогда для многогранника будет справедливо требуемое соотношение (*).

Докажем, что соотношение (**) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике сетки провести диагональ. Действительно, после проведения такой диагонали в сетке будет В вершин, Р+1 ребер и Г'+1 граней и, следовательно, В - (Р + 1) + (Г' + 1) = В - Р + Г'. Пользуясь этим свойством, проведем в сетке диагонали, разбивающие входящие в нее многоугольники на треугольники, и для полученной сетки покажем выполнимость соотношения (**). Для этого будем последовательно убирать внешние ребра сетки, уменьшая в ней количество треугольников. При этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника *ABC* (рис. 118, б) требуется снять два ребра, в нашем случае *AB* и *BC*;

б) для удаления треугольника *MKN* требуется снять одно ребро, в нашем случае *MN*.

В обоих случаях соотношение (**) не изменится. Например, в первом случае после удаления треугольника сетка будет состоять из В-1 вершин, Р-2 ребер и Г'-1 граней, (В - 1) - (Р - 2) + (Г' - 1) = В - Р + Г'.

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет соотношение (**). Продолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы придем к сетке, состоящей из одного треугольника. Для такой сетки В=3, Р=3, Г'=1 и, следовательно, В - Р + Г' = 1. Значит, соотношение (**) имеет место и для исходной сетки, откуда окончательно получаем, что для данного многогранника справедливо соотношение (*).

III. Закрепление нового материала.

Задача. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет 12 ребер? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. Пусть у данного многогранника будет В вершин, Р ребер и Г граней. Тогда 3Г=2Р, где Р=12, значит, Г=8. Применяем теорему Эйлера, из которой следует, что В=2+Р-Г. В нашем случае В=2+12-8=6. Итак, В=6; Р=12; Г=8. Этот многогранник, например, правильный октаэдр или любая четырехугольная бипирамида.

Урок 2

I. Устная работа.

1. Какая фигура называется выпуклой? Какой многогранник называется выпуклым?

2. Верно ли утверждение о том, что пересечением выпуклых многогранников является выпуклый многогранник?

Ответ. Нет, это утверждение неверное, достаточно привести контрпример. На рисунках 119 изображены пересекающиеся кубы. Их пересечением является отрезок.

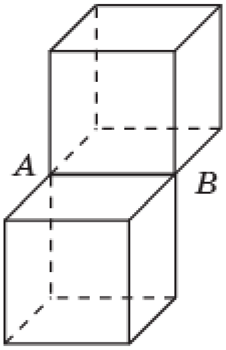


Рис. 119

3. В чем заключается теорема Эйлера?

4. Приведите пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эйлера.

Ответ. Например, для многогранника с одной "дырой", изображенного на рисунке 186, не выполняется соотношение Эйлера.

5. Назовите выпуклый многогранник с пятью вершинами.

Ответ. Четырехугольная пирамида; треугольная бипирамида.

II. Решение задач.

1. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. 3В=2Р, учитывая, что Р=12, имеем В=8. По теореме Эйлера Г=2-В+Р, Г=2-8+12 = 6. Таким образом, у данного выпуклого многогранника В=8, Р=12 и Г=6. Это может быть куб; произвольная четырехугольная призма; усеченная четырехугольная пирамида.

2. Как связаны между собой число ребер и число плоских углов выпуклого многогранника?

Решение. В каждой грани многогранника одинаковое число плоских углов и сторон - ребер многогранника. Но каждое ребро принадлежит сразу двум его граням. Таким образом, общее число плоских углов, назовем его П будет в два раза больше числа ребер (Р) данного многогранника: П =2Р.

3*. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней, и в каждой из них по 13 ребер?

Решение. Нет, не существует, так как, если Г=13, то общее число их сторон равно 13·13=169. Это число должно в два раза превосходить количество ребер, т.е. 169=2Р, что невозможно, так как 169 - нечетное число.

III. Индивидуальные задания. - Сообщение на тему "Жизнь и творчество Л. Эйлера".

Леонард Эйлер (1707-1783) - один из величайших математиков мира, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Эйлер долгое время жил и работал в России, был действительным членом Петербургской Академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и в деле подготовки кадров ученых-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие ученого. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. Причем последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп и, несмотря на тяжелый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчеты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский ученый П.С.Лаплас сказал: "Читайте Эйлера, он - учитель всех нас".

Задание на дом

1. Выучить формулировку теоремы Эйлера, разобрать ее доказательство (п. 26* учебника).

2. Решить задачи.

1). Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. 4Г=2Р; Г=6. В=2+Р-Г; В=2+12-6=8. Итак, В=8, Р=12 и Г=6. Этот многогранник - куб, или параллелепипед, или четырехугольная призма, или усеченная четырехугольная пирамида.

2). В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12? Нарисуйте такой многогранник.

Решение. 4В=2Р; В=6. Г=2-В+Р; Г=2-6+12=8. Итак, В=6, Р=12, Г=8. Этот многогранник - правильный октаэдр или любая четырехугольная бипирамида.

3). Может ли в выпуклом многограннике быть 27 плоских углов?

Решение. Нет, не может, так как число плоских углов равно 2Р, где Р – число ребер многогранника, т.е. четное число, а 27 – нечетное.

3*. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или 7 ребер, и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число пятиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.

Решение. Обозначим число пятиугольных, шестиугольных и семиугольных граней многогранника соответственно через $Г_5$, $Г_6$, $Г_7$ и $x=Г_5-Г_7$. Тогда $5Г_5+6Г_6+7Г_7=2Р$; $6(Г_5+Г_6+Г_7)+Г_7-Г_5=2Р$; $6Г-x=2Р$; $Р=\frac{6Г-x}{2}$; $3В=2Р$; $В=\frac{2Р}{3}$. Подставляя вместо Р полученное выражение, имеем: $В=\frac{6Г-x}{3}$. Подставим эти выражения в формулу Эйлера:

$\frac{6Г-x}{3}-\frac{6Г-x}{2}+Г=2$; $-\frac{6Г-x}{6}+Г=2$; $-6Г+x+6Г=12$; $x=12$, $Г_5-Г_7=12$, что и требовалось доказать.

4**. Индивидуальное задание (для двух учеников).

Подготовить сообщение на тему "Жизнь и творчество Л.Эйлера". Литература. Гиндикин С.Г. Леонард Эйлер //Квант.- 1983.- № 10.-С.17; № 11.-С.17.

п. 28*. Полуправильные многогранники (два урока)

Целью данных уроков является знакомство учащихся с полуправильными многогранниками. От учащихся не требуется знания всех этих многогранников или умения их изображать. Каждый ученик может выбрать для себя многогранник по своему желанию и интересу.

Урок 1

I. Индивидуальное задание.

Сообщение на тему "История открытия полуправильных многогранников - тел Архимеда".

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287-212 гг.до н.э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число ребер. Так он получил 13 равноугольно полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого ученого "О многогранниках", в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь ученого телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным ученым - механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для ученых многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погруженными в жидкость. Эта теорема находится в трактате "О плавающих телах" и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений ученого известна катапульта - "архимедов винт" (иногда его называют также "кохлея"-улитка) для поднятия наверх воды - это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле начертить цилиндр и содержащийся в нем шар и указать соотношение их объемов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого ученого.

II. Новый материал.

На предыдущих уроках мы рассмотрели правильные многогранники, т. е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон, и в каждой вершине которых сходится одинаковое число граней. Если в этом определении допустить, чтобы гранями многогранника могли быть различные правильные многоугольники, то получим многогранники, которые называются полуправильными (равноугольно полуправильными).

Определение. Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранник, гранями которого являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все ребра которых равны. Например, правильная шестиугольная призма на рисунке 120, а имеет своими гранями два правильных шестиугольника - основания призмы и шесть квадратов, образующих боковую поверхность призмы.

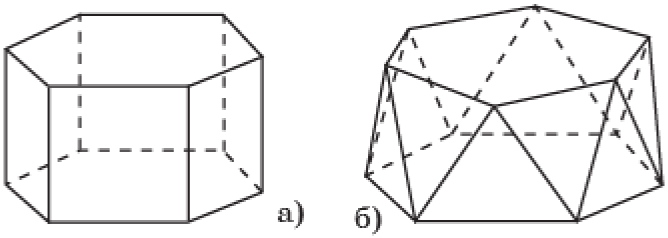


Рис. 120

К полуправильным многогранникам относятся и так называемые антипризмы. На рисунке 120, б мы видим шестиугольную антипризму, полученную из шестиугольной призмы поворотом одного из оснований относительно другого на угол 30^0. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется еще 14 полуправильных многогранников, 13 из которых впервые открыл и описал Архимед - это тела Архимеда.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией "усечения", состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим усеченный тетраэдр, имеющий восемь граней (рис. 121). Из них четыре - правильные шестиугольники и четыре - правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

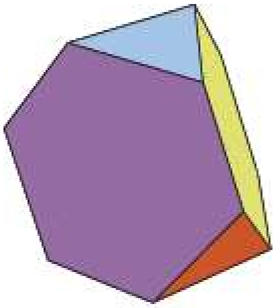


Рис. 121

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно усеченный октаэдр (рис. 122) и усеченный икосаэдр (рис. 123).

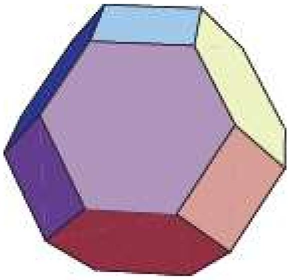


Рис. 122

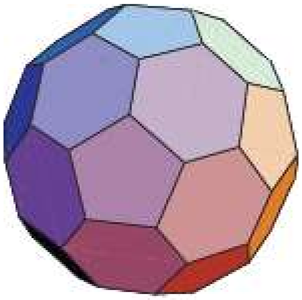


Рис. 123

Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить усеченный куб (рис. 124) и усеченный додекаэдр (рис. 125).

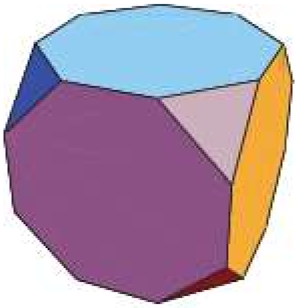


Рис. 124

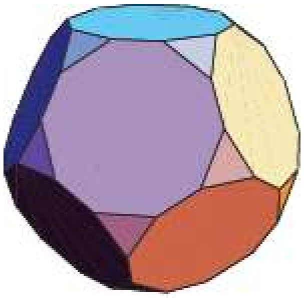


Рис. 125

Для того, чтобы получить еще один полуправильный многогранник, проведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется кубооктаэдром (рис. 126). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название - кубооктаэдр.

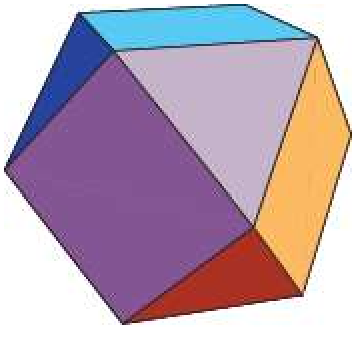


Рис. 126

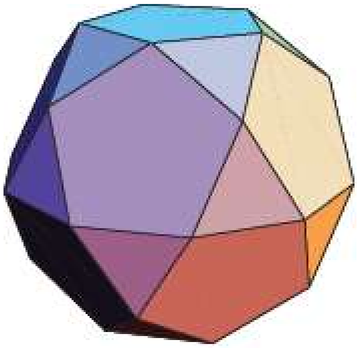


Рис. 127

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется икосододекаэдром (рис. 127). У него двадцать граней

- правильные треугольники и двенадцать граней - правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию усечения. Получим усеченный кубооктаэдр (рис. 128) и усеченный икосододекаэдр (рис. 129).

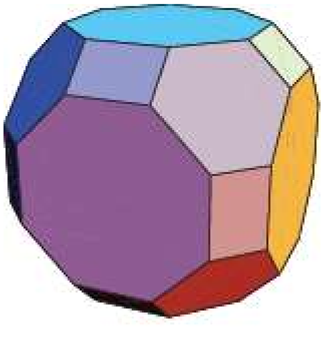


Рис. 128

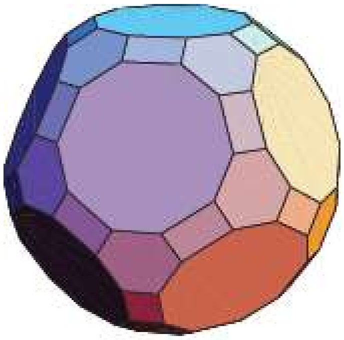


Рис. 129

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся - многогранники более сложного типа.

На рисунке 130 мы видим ромбокубооктаэдр. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов. Если повернуть верхнюю восьмиугольную чашу этого многогранника на 45°, то получится многогранник, который называется псевдоархимедовым. (рис. 131).

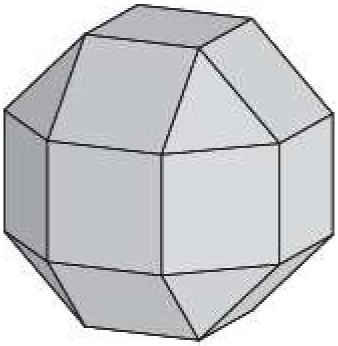


Рис. 130

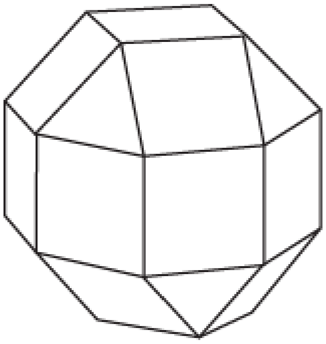


Рис. 131

На рисунке 132 изображен ромбоикосододекаэдр, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов.

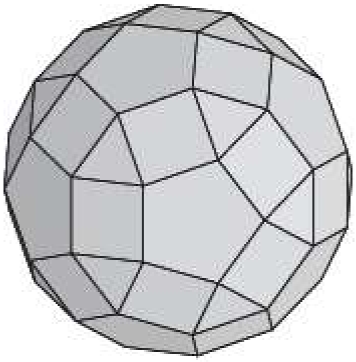


Рис. 132

На рисунках 133 и 134 представлены соответственно так называемые плосконосый (иногда называют курносый) куб и плосконосый (курносый) додекаэдр, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

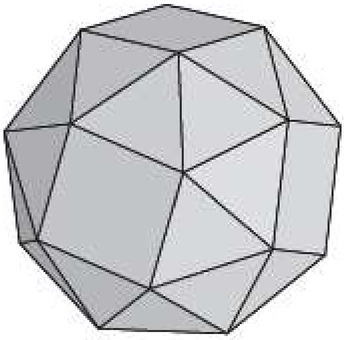


Рис. 133

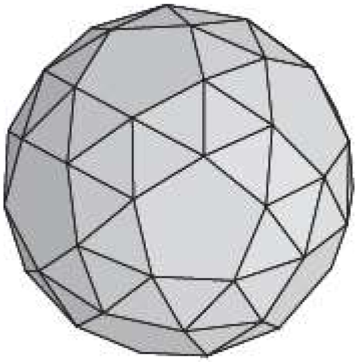


Рис. 134

Как видим, каждое тело состоит из двух или трех типов граней: квадраты, треугольники, пятиугольники и треугольники, квадраты, пятиугольники и треугольники. Модели этих фигур будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

Замечание. Для проведения этого этапа урока необходимо, по возможности, подготовить соответствующие модели многогранников и их изображения. Для этой цели рекомендуем следующую литературу: Веннинджер М. Модели многогранников. - М.: Мир, 1974, с.30-42; Энциклопедия элементарной математики. Книга IV. Геометрия. - М.: Физматгиз, 1963, с. 434, 435.

Обычно в своей практике мы делаем ксерокопии хороших чертежей, рисунков и раздаем на каждую парту. Данный урок построен на том, чтобы как следует рассмотреть предложенные многогранники и понять, как они устроены.

Урок 2

I. Устная работа.

1). Какой многогранник называется правильным? Какие правильные многогранники вы знаете? Выберите их из предложенных моделей (на первой парте в среднем ряду, которая свободна, лежит порядка 20 моделей различных многогранников, в том числе правильных и полуправильных).

2). Может ли гранью правильного многогранника быть правильный восьмиугольник? Почему?

3). Какие многогранники называются взаимно двойственными? Назовите взаимно двойственные правильные многогранники.

4). Какой многогранник называется полуправильным?

5). Как получить простейшие полуправильные многогранники из правильных? Какой операцией?

6). Из каких граней состоит усеченный тетраэдр и усеченный куб?

7). Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча (рис. 135)? Сколько у него вершин, ребер и граней?

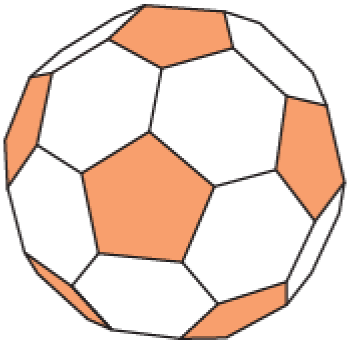


Рис. 135

II. Решение задач.

1. Докажите, что правильная n-угольная призма (n=3, 4, 5...) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.

2. Определите, какую часть ребер правильного тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

3. Та же задача для куба. Положите ребро куба, равным a.

Решение. Обозначим через x часть ребра, считая от вершины, и через y - длину стороны получившегося полуправильного многогранника. Тогда: $2x+y=a$; $y^2=2x^2$. Откуда $y=x\sqrt{2}$; $2x+x\sqrt{2}=a$; $x=\frac{a}{2+\sqrt{2}}$ или $x=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$.

III. Занимательный момент.

(См. параграф 8).

Задание на дом

1. Нарисуйте какие-нибудь полуправильные многогранники.

2. Определите число вершин, ребер и граней усеченного октаэдра и усеченного додекаэдра.

3. На рисунке 136 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией. Что это за операция? Как называются все изображенные многогранники? Вычислите длину ребра многогранников на рисунке 136, а, б, если длина ребра куба равна a.

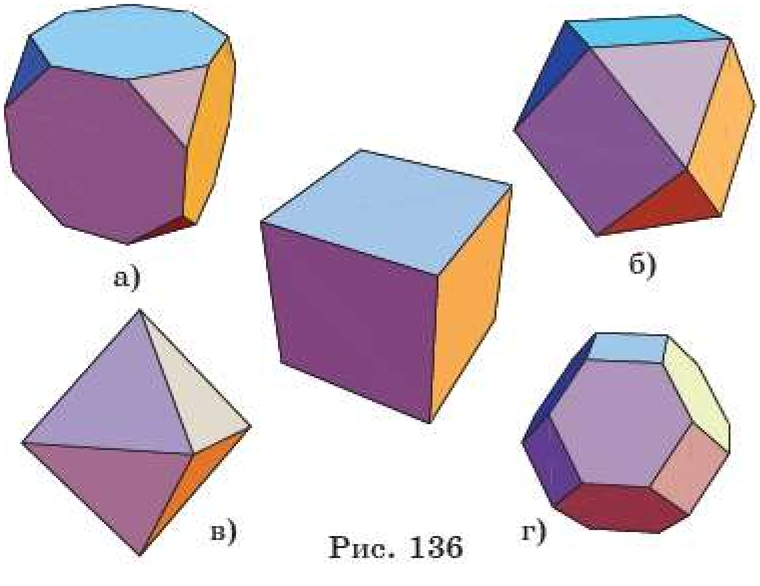


Рис. 136

Ответ. На рисунке 136, а изображен усеченный куб, длина его ребра равна $a(\sqrt{2}-1)$. На рисунке 136, б изображен кубооктаэдр, длина его ребра равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4*. По рисунку 136 определите, как применялась названная операция в каждом случае? Найдите длину ребра многогранников, изображенных на рисунках 136, в, г, если длина ребра куба равна a.

Решение. Обозначим через x часть ребра куба, считая от вершины, которая отсекается, через y - длину ребра образовавшегося многогранника. Тогда: а) усеченный куб, (как было показано выше) $x=$ $x=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$, $y=a(\sqrt{2}-1)$; б) кубооктаэдр, $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) октаэдр, $x=a$, $y=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; г) усеченный октаэдр, $x=\frac{3a}{4}$, $y=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

5**. Индивидуальное задание – “История открытия полуправильных многогранников - тел Архимеда”. (Литература. Савченко В. Полуправильные многогранники //Квант.-1976.-№ 1.-С.2).

п. 29*. Звездчатые многогранники (один урок)

Целью данного урока является знакомство учащихся со звездчатыми многогранниками. При его проведении необходимо использовать модели звездчатых многогранников.

I. Самостоятельная работа.

Проводим, как обычно, на листочках с копиркой.

Вариант 1

1. Сколько вершин, ребер и граней имеет правильный икосаэдр?

Ответ. В=12, Р=30, Г=20.

2. Изобразите правильный октаэдр. Почему он получил такое название?

3. Сколько вершин, ребер и граней имеет усеченный куб?

Ответ. В=24, Р=36, Г=14.

4. Какие грани имеет усеченный додекаэдр?

Ответ. Усеченный додекаэдр имеет 12 правильных десятиугольников и 20 правильных треугольников.

5. Какой многогранник будет двойственным к правильной четырехугольной призме?

Ответ. Многогранником, двойственным к правильной четырехугольной призме, будет правильная четырехугольная бипирамида.

Вариант 2

1. Сколько вершин, ребер и граней имеет правильный додекаэдр?

Ответ. В=20, Р=30, Г=12.

2. Изобразите правильный гексаэдр. Почему он так называется?

3. Сколько вершин, ребер и граней имеет усеченный октаэдр?

Ответ. В=24, Р=36, Г=14.

4. Какие грани имеет усеченный икосаэдр?

Ответ. Усеченный икосаэдр имеет 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников.

5. Какой многогранник будет двойственным к правильной шестиугольной призме?

Ответ. Многогранником, двойственным к правильной шестиугольной призме, будет правильная шестиугольная бипирамида.

Учащиеся сдают первые листочки, оставляя себе копии для проверки.

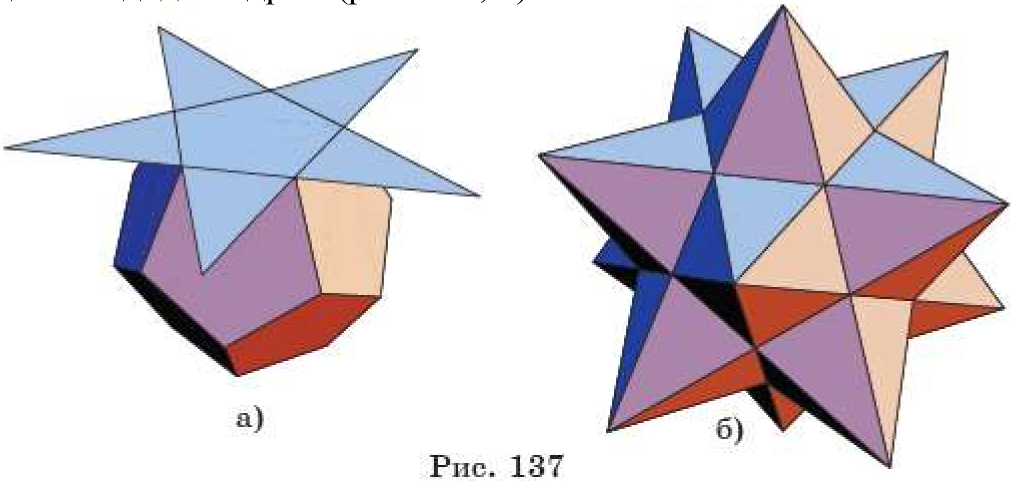
II. Проверка самостоятельной работы.

Проводится с помощью кодоскопа.

III. Новый материал.

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые звездчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим правильные звездчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером (1571-1630), а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777-1859). Именно поэтому правильные звездчатые многогранники называются телами Кеплера-Пуансо. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или ребер.

Из тетраэдра, куба и октаэдра звездчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звездчатым правильным пятиугольником (рис. 137, а), и в результате возникает многогранник, который называется малым звездчатым додекаэдром (рис. 137, б).



а) б)

Рис. 137

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Во-первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый большой додекаэдр (рис. 138).

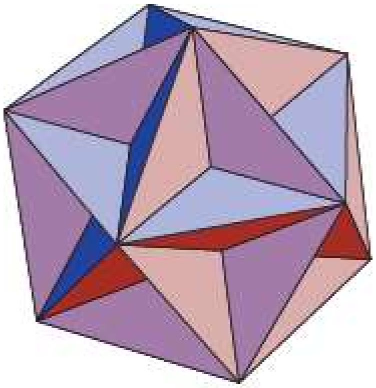


Рис. 138

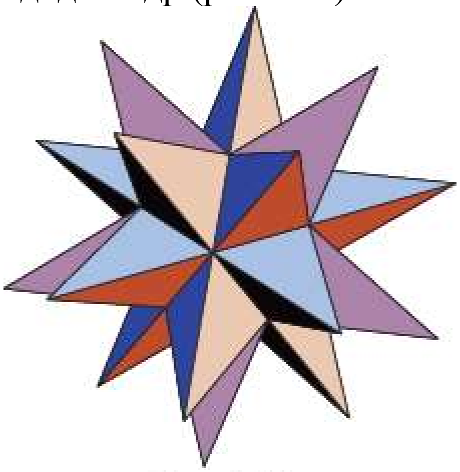


Рис. 139

Если же, во-вторых, в качестве граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается большой звездчатый додекаэдр (рис. 139).

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней правильного икосаэдра получается большой икосаэдр (рис. 140).

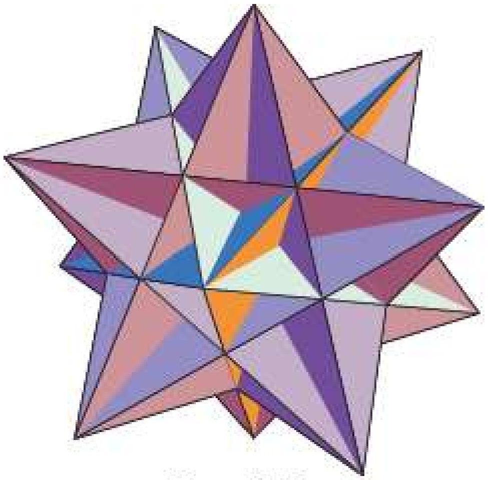


Рис. 140

Таким образом, существуют 4 типа правильных звездчатых многогранников. (Альбом звездчатых многогранников содержится, например, в книге М. Веннинджера "Модели многогранников". - М.: Мир, 1974).

Звездчатые многогранники очень декоративны, что позволяет широко применять их в ювелирной промышленности при изготовлении всевозможных украшений. Применяются они и в архитектуре. Можно привести такие примеры: проект Национальной библиотеки в Дамаске, в основу которого положен многогранник-звезда, проект административного здания в Италии, выполненный русским архитектором В.А. Сомовым (можно показать учащимся их изображения, помещенные в журнале Квант.-1976.-№ 1.-3-я с.обложки; 1981.-№ 5.-4-я с.обложки).

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки - это звездчатые многогранники. С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

IV. Закрепление нового материала.

1. На рисунке 141 изображен многогранник, называемый звездчатым октаэдром. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет переоткрыт И.Кеплером и назван им "Stella octangula" -

звезда восьмиугольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым? Ответ обоснуйте.

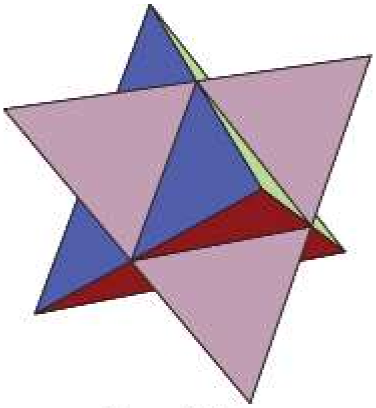


Рис. 141

Ответ. Нет, звездчатый октаэдр не является правильным звездчатым многогранником, так как его нельзя получить ни из одного правильного многогранника путем продолжения граней или ребер.

2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?

Ответ. Впишем в куб $A...D_1$ два тетраэдра D_1AB_1C и A_1DC_1B. Их объединение будет искомым многогранником.

3. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров?

Ответ. Пересечением указанных тетраэдров будет правильный октаэдр. В условиях предыдущей задачи 2, этот октаэдр будет вписанным в куб, т.е. его вершины будут лежать в центрах граней куба.

** Лабораторная работа - "Моделирование многогранников".

Лабораторные работы неоднократно проводились при изучении основных пунктов учебника. Изготовлению моделей многогранников были посвящены уроки 7, 8. На них учащиеся познакомились с двумя способами моделирования: из разверток и с помощью геометрического конструктора.

На данном уроке учащимся предлагается построить модель правильного звездчатого многогранника - малого звездчатого додекаэдра, который, как показано выше, получается из правильного додекаэдра путем продолжения его ребер до самопересечения. Это связано с тем, что, во-первых, это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок ученика, а во-вторых, при его изготовлении требуется применить все основные виды работы: вычислять, чертить, вырезать, склеивать, производить окантовку ребер или оклейку граней. Поэтому проведение такой лабораторной работы должно быть хорошо подготовлено, т. е. каждая парта должна быть обеспечена всем необходимым: бумагой (картоном), ножницами, клеем, линейкой, циркулем, транспортиром, карандашами.

Модель малого звездчатого додекаэдра очень просто изготовить из модели правильного додекаэдра. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с длиной ребра, равной длине ребра правильного додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра.

Таким образом, сначала нужно изготовить модель правильного додекаэдра. Ее можно склеить из развертки. На рисунке 142 представлена развертка правильного додекаэдра с нарисованными клапанами для склеивания.

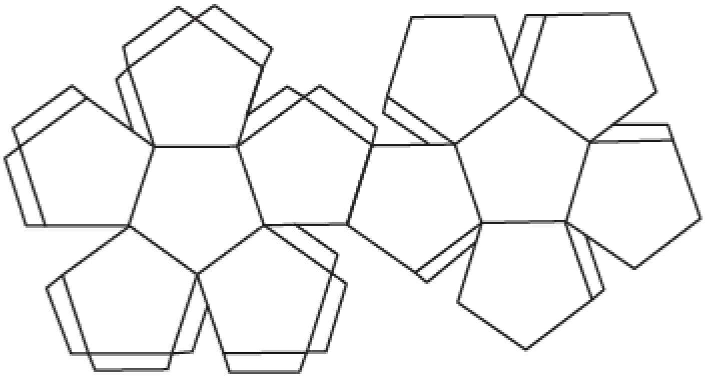


Рис. 142

Можно воспользоваться другим, очень интересным и необычным способом изготовления правильного додекаэдра, который заключается в следующем. Развертку правильного додекаэдра (рис. 142) необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы поочередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. Отпустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель правильного додекаэдра. Этот способ предложен в замечательной книге Г.Штейнгауза "Математический калейдоскоп" (М: Наука, 1981, с.100 /Библиотечка Квант, выпуск 8).

После того как модель правильного додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды, развертка которой показана на рисунке 143. Необходимо изготовить 12 таких пирамид по числу граней правильного додекаэдра и наклеить их на его грани. Модель малого звездчатого додекаэдра готова.

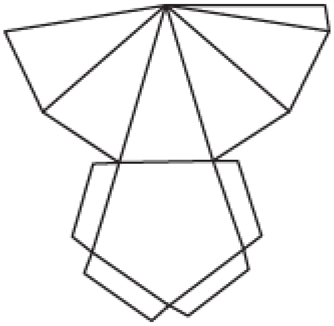


Рис. 143

V. Задание на дом.

1. Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?

Ответ. В=32, Р=90, Г=60.

2. Какие ребра должны быть у правильных пятиугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням додекаэдра получился малый звездчатый додекаэдр (рис. 137, б)?

Ответ. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

3. Какие ребра должны быть у правильных треугольных пирамид, чтобы при добавлении их к граням икосаэдра получился большой звездчатый додекаэдр (рис. 139)?

Ответ. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$.

4. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых многогранников.

п. 30*. Кристаллы – природные многогранники (один урок)

Цель – познакомить учащихся с удивительным миром кристаллов, установить межпредметные связи с физикой и химией, где изучались соответствующие свойства кристаллов, которые объясняются геометрическим строением кристаллов.

Урок 1

I. Новый материал.

Многие формы многогранников придумал не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы льда и горного хрусталя (кварца) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т.е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды.

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра.

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда.

Пирит – куб или октаэдр, иногда встречается в виде кубооктаэдра.

Кристалл граната имеет форму ромбододекаэдра (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) - двенадцатигранника, гранями которого являются двенадцать равных ромбов (рис. 144).

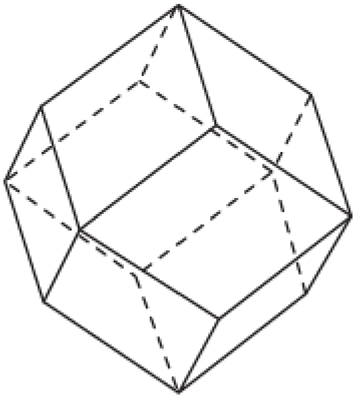


Рис. 144

II. Индивидуальное задание – «Кристалл граната».

Для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

Гранат - один из основных породообразующих минералов. Встречаются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называемыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные камни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гранат - кроваво-красный пироп - археологи считают самым древним украшением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на территории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время пользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т.е. многогранник-ромбододекаэдр, был известен с глубокой древности, можно судить по истории происхождения его названия, которое в переводе с древнегреческого языка означало "красная краска". При этом название связывалось с красным цветом - наиболее часто встречающейся окраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется для изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло описание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изделий - эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (ок. 2000 лет до н. э.), украшенного двенадцатью камнями, среди которых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неолите Египта и в могилах додинастического периода (свыше двух тысячелетий до н.э.).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украшения древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых венков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового дерева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например, так называемый "папирус Эберса", который содержит описание методов лечения камнями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням приписываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит счастье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в январе.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А.И.Куприн в повести "Гранатовый браслет" говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И.С. Тургенева "Вешние воды", где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собраны П.П. Бажовым в сборнике "Малахитовая шкатулка". Известный любитель и знаток камня академик А.Е. Ферсман в книге "Рассказы о самоцветах" тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности, о месторождениях граната на Урале.

III. Построение ромбододекаэдра с помощью куба.

Возьмем куб $A \ldots D_1$ и отметим центры граней O, O_1, E, F, G, H (рис. 145). Построим четырехугольную бипирамиду $OA_2B_2C_2D_2O_1$, где A_2, B_2, C_2, D_2 - середины соответствующих ребер куба.

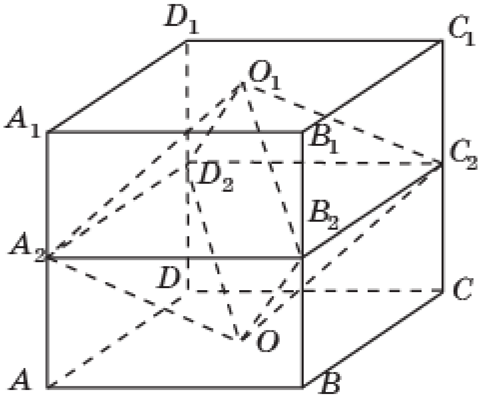


Рис. 145

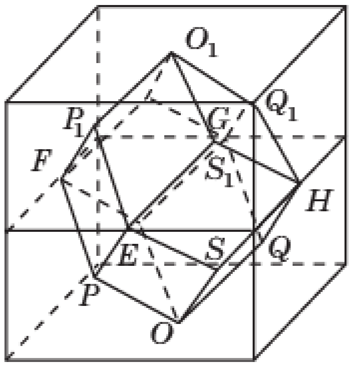


Рис. 146

Теперь проведем плоскости: через точки E и F параллельно ребру AA_1; через F и G параллельно BB_1; через G и H параллельно CC_1; через H и E параллельно DD_1. Соответствующие сечения бипирамиды строятся следующим образом, например, для первой названной плоскости. Через точку пересечения EF и A_2C_2 проведем прямую, параллельную AA_1, и обозначим точки пересечения этой прямой с A_2O и A_2O_1 соответственно P и P_1. Соединим точки E и P, E и P_1, F и P, F и P_1. Полученный четырехугольник EP_1FP будет искомым сечением (рис. 146). В результате проведения такой плоскости от бипирамиды отсекается четырехугольная пирамида с вершиной в точке A_2 и основанием EP_1FP. Проведя аналогичные построения для других пар точек, получим искомый многогранник – ромбододекаэдр. Действительно, у него 12 граней и каждая является ромбом. EP_1FP – ромб, во-первых, это параллелограмм (противоположные стороны равны), во-вторых, его диагонали перпендикулярны.

IV. Решение задач.

1. Используя модель ромбододекаэдра:

а) подсчитайте количество его граней (Г), ребер (Р) и вершин (В);

б) имеются ли пары параллельных граней? Сколько таких пар?

в) Сколько трехгранных и четырехгранных углов?

Ответ. а) Г=12, Р=24, В=14; б) 6; в) шесть 4-гранных углов, восемь 3-гранных углов.

2. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

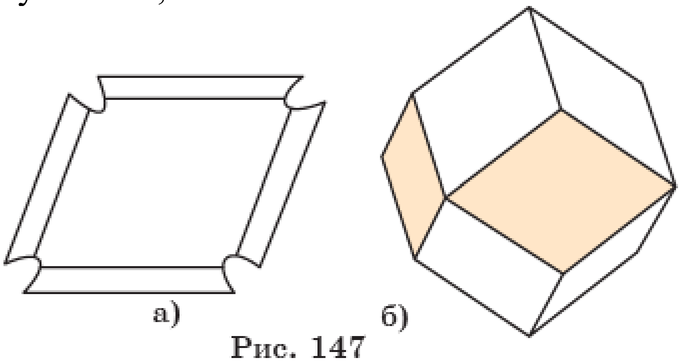
Решение. Предположим, что ребро куба равно 1 (рис. 145), тогда отрезок A_2E равен $\frac{1}{2}$, отрезок EO_1 равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку треугольник A_2EO_1 прямоугольный, тангенс угла A_2O_1E равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Искомый угол $A_2O_1D_2$ равен удвоенному углу A_2O_1E. Таким образом, $\text{tg}\angle A_2O_1E=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Можно взять и другое соотношение, гипотенуза $A_2O_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, значит, $\sin\angle A_2O_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\angle A_2O_1E\approx 71^0$.

3. Ребро куба равно 1. Найдите ребро соответсвующего ромбододекаэдра.

Решение. В предыдущей задаче найдена большая диагональ ромба $EP_1O_1S_1$, а именно, $EO_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Меньшая диагональ $P_1S_1=\frac{1}{2}A_2D_2$ (как средняя линия треугольника $A_2O_1D_2$), т. е. $P_1S_1=\frac{1}{2}$. Таким образом, сторона ромба равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

V. Задание на дом.

1. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Ребра ромба возьмите, равными 6 см, острый угол приблизительно равен 71^0, ширина клапана - 0,8 см (рис. 147, а). Модель лучше сделать двуцветной так, как показано на рисунке 147, б.



а) б)

Рис. 147

2. Ребро куба равно 1. Найдите площадь поверхности соответствующего ромбododекаэдра.

Решение. В задачах, рассмотренных выше, мы выяснили, что диагонали ромба (грани ромбододекаэдра) равны $\frac{1}{2}$и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, площадь одной грани равна $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (половина произведения диагоналей ромба), а всей поверхности $12\cdot\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. Ребро куба равно 1. Покажите, что вершины трехгранных углов соответствующего ромбододекаэдра образуют куб, вписанный в этот ромбододекаэдр. Найдите ребро этого куба.

Решение. Вершины трехгранных углов образуют многогранник, ребрами которого являются меньшие диагонали ромбов, образующих поверхность ромбододекаэдра. Эти диагонали равны, как мы выяснили выше, равны $\frac{1}{2}$ и параллельны соответствующим ребрам исходгого куба. Следовательно, они являются ребрами искомого куба.

4*. Покажите, что равными ромбододекаэдрами можно заполнить все пространство, т.е. составить пространственный паркет?

Решение. Сначала возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть одинаковых четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями - гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба. Образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром. Теперь заполняем пространство равными кубами. Затем отметим их в шахматном порядке (сделаем пространственный аналог бесконечной шахматной доски). К граням каждого отмеченного куба прилегают 6 неотмеченных кубов. Неотмеченные кубы разобьем на 6 равных четырехугольных пирамид и присоединим эти пирамиды к прилегающим отмеченным кубам. Каждый отмеченный куб при этом достроится до ромбододекаэдра, которые заполнят все пространство.

5*. Индивидуальное задание. - Сообщение на тему - "Е.С.Федоров - выдающийся российский математик и кристаллограф". Литература: Шаскольская М.П. Очерки о свойствах кристаллов. - М.: Наука, 1978, с.71 (лучше взять старое издание: Шаскольская М.П. Кристаллы. М.: Гос.изд.техн.-теор.лит., 1956, с.138).

§ 7. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНИМАТЕЛЬНОГО МОМЕНТА УРОКА

На своих уроках часто последние 5-6 минут мы посвящаем занимательному материалу, не связанному с изучением текущей темы.

Такой, условно названный, занимательный или развивающий момент урока, мы проводим по следующим причинам:

1). Необходимо дать возможность "передохнуть" учащимся от стереометрии, разнообразить содержание урока.

2). Обратиться к планиметрии, в которой ребята особенно на первых порах изучения стереометрии чувствуют себя значительно уверенней - знакомый материал. Эта уверенность будет непроизвольно переноситься и на непривычную пока стереометрию.

3). Кроме этого, предлагаемые задачи сами по себе интересны, являются прекрасным упражнением для развития пространственного воображения учащихся. Представим систему задач, которую предлагали учащимся на занимательных моментах уроков. Рассмотренные задачи объединены в блоки по темам. Начнем с задач на разрезание.

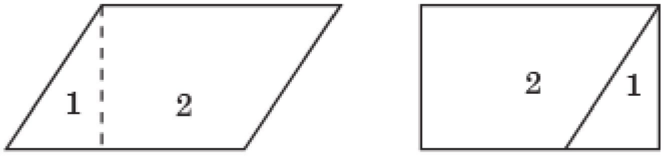
Блок задач на разрезание

Сначала предлагаем ребятам простейшие задачи на разрезание плоских фигур, начав рассмотрение одной из увлекательнейших тем, связанных с равновеликостью и равносоставленностью фигур.

1. Из параллелограмма получите прямоугольник.

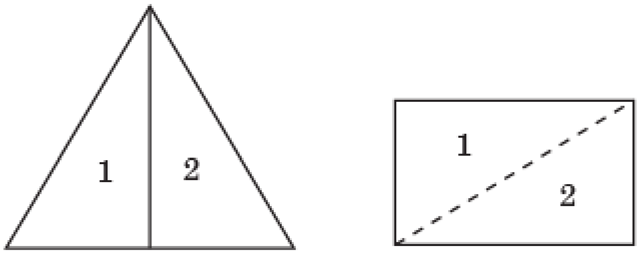
2. Из прямоугольника получите треугольник.

В рассматриваемых задачах производится всего один разрез данной фигуры (рис. 148, рис. 149) и из образовавшихся двух частей складывается новая.



а) б)

Рис. 148



а) б)

Рис. 149

3. Равносторонний треугольник разрежьте:

а) на две равные части; б) на три равные части; в) на четыре равные части.

Решение представлено на рис. 150.

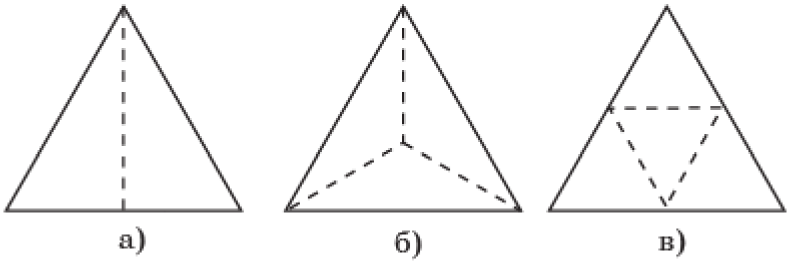


Рис. 150

4. Перекроить греческий крест (фигура, образованная пятью равными квадратами) в квадрат: а) произвольным числом разрезов; б) двумя разрезами.

Решение представлено на рисунках 151, а, б.

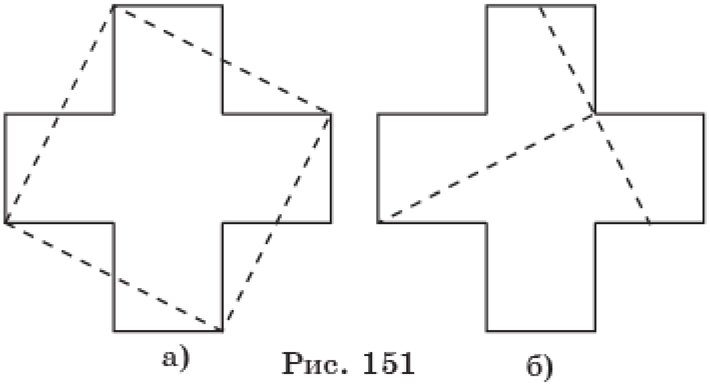


Рис. 151

5. Разрежьте правильный шестиугольник на 12 равных четырехугольников.

Два способа решения показаны на рисунке 152.

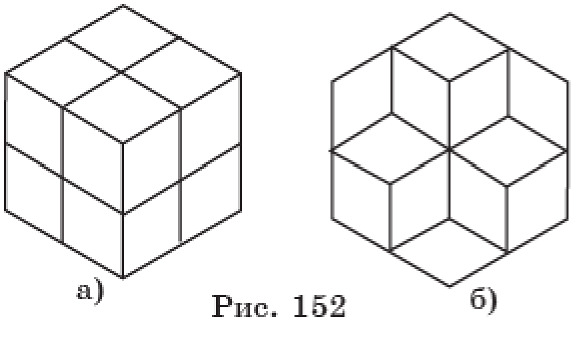


Рис. 152

6. Разрежьте фигуру (рис. 153, а) на 4 равные части.

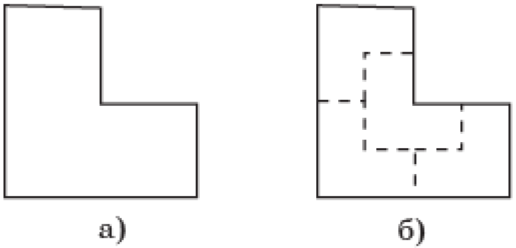


Рис. 153

Решение представлено на рисунке 153, б.

7. Разрежьте данную фигуру (рис. 154, а) на 4 равные части.

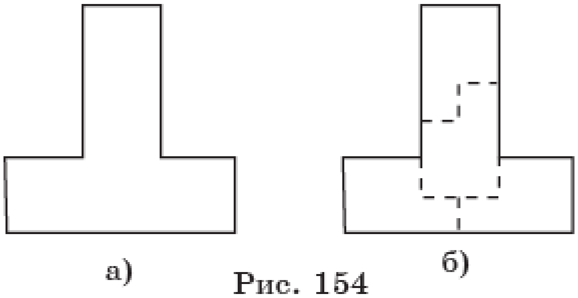


Рис. 154

Решение представлено на рисунке 154, б.

8. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке 155, а на четыре равные части.

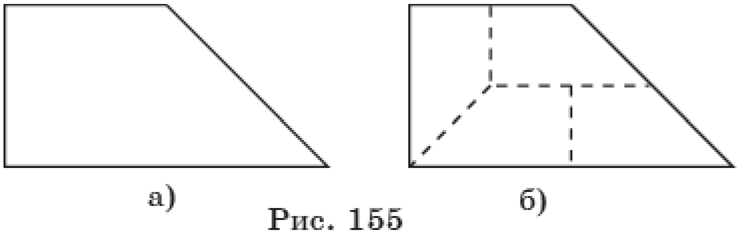


Рис. 155

Решение представлено на рисунке 155, б.

9. Разрежьте правильный шестиугольник на 9 равных четырехугольников.

Решение представлено на рисунке 156.

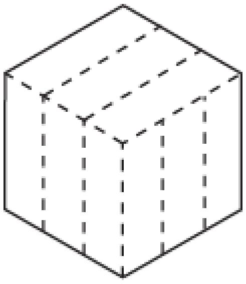
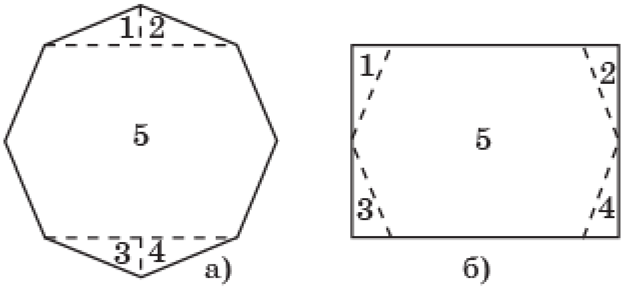


Рис. 156

10. Перекроить правильный восьмиугольник в прямоугольник. Решение показано на рисунке 157.



а) б)

Рис. 157

11. Покажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Решение. Правильный восьмиугольник имеет диагонали трех типов, соединяющие вершины через три вершины (это наибольшая диагональ, проходящая через центр правильного восьмиугольника), через две вершины и через одну вершину (это наименьшая диагональ правильного восьмиугольника. Правильный восьмиугольник равносоставлен с прямоугольником, сторонами которого являются наибольшая и наименьшая его диагонали (рис. 157). Таким образом, $S_8=d_{max}\cdot d_{\min}$.

12. В правильном восьмиугольнике $A_1...A_8$ проведены диагонали A_2A_7 и A_3A_6. Покажите, что площадь образовавшегося четырехугольника равна половине площади правильного восьмиугольника.

Решение. Проведем в правильном восьмиугольнике $A_1...A_8$ (рис. 158) диагонали A_1A_4 и A_5A_8.

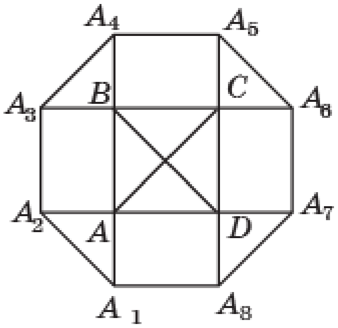


Рис. 158

Фигуры $A_2A_3A_6A_7$ и $A_1A_4A_5A_8$ - прямоугольники; $ABCD$ - квадрат (эти свойства следуют из свойств правильного восьмиугольника). В квадрате $ABCD$ проведем диагонали. Легко показать, что треугольники, на которые распадается этот квадрат, и треугольники, примыкающие к сторонам восьмиугольника A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 и A_7A_8 равны. Кроме этого, также равны прямоугольники, примыкающие к остальным сторонам восьмиугольника. Из этого следует, что площадь $A_2A_3A_6A_7$ равна сумме площадей $A_3A_4A_5A_6$ и $A_1A_2A_7A_8$. Это доказывает, что площадь прямоугольника $A_2A_3A_6A_7$ равна половине площади данного правильного восьмиугольника.

13. Стороны *AB* и *CD* параллелограмма *ABCD* разбиты на n равных частей, а стороны *AD* и *BC* - на m равных частей. Точки деления соединены так, как показано на рисунке 159. Найдите площадь образовавшихся при этом маленьких параллелограммов, если площадь *ABCD* равна 1.

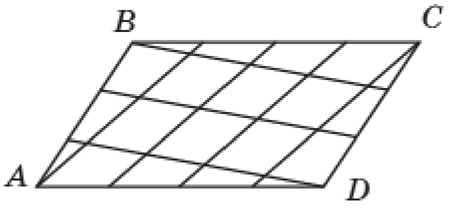
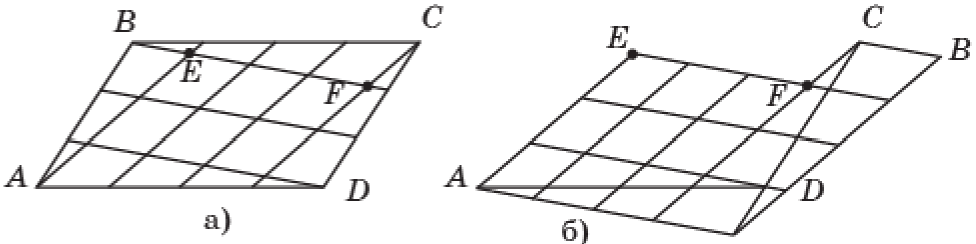


Рис. 159

Решение. Разрезаем параллелограмм *ABCD* на три части: треугольник *ABE*, треугольник *BFC* и невыпуклый пятиугольник *AEFCD* (рис. 160,а). Из них складываем фигуру, изображенную на рисунке 160, б, из которой видно, что параллелограмм *ABCD* содержит 1+nm маленьких параллелограммов, площадь каждого из которых, таким образом равна $\frac{1}{1+nm}$.



а) б)

Рис. 160

При разборе решения этой задачи мы представляем учащимся очень хорошую и полезную книгу, в которой она содержится, а именно:

Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. - Часть I. - 2-е изд. - М.: Наука, 1991, с.90.

14. Через вершину *A* выпуклого четырехугольника *ABCD* проведите прямую, разбивающую его на две равновеликие фигуры.

Решение. Проведем в четырехугольнике *ABCD* (рис. 161) диагональ *AC* и построим треугольник *ACE*, равновеликий треугольнику

ABC. На рисунке видно, как мы это сделали ($a||AC$). Тогда, треугольник *ADE* равновелик четырехугольнику *ABCD*. Проведем медиану *AM* (*EM*=*DM*) треугольника *ADE*, которая разделит его площадь, а следовательно, и четырехугольника *ABCD*, на две равные части. Таким образом, *AM* - искомая прямая.

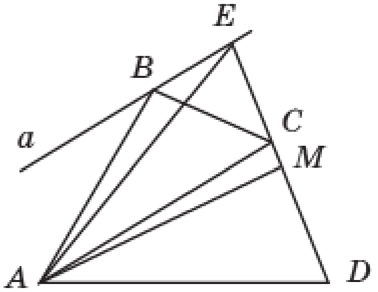


Рис. 161

Блок задач «Греческий крест»

1. В квадрате проведены отрезки, соединяющие вершины с серединами сторон, как показано на рисунке 162, а. Докажите, что площадь заштрихованного квадрата равна $\frac{1}{5}$ площади большого квадрата.

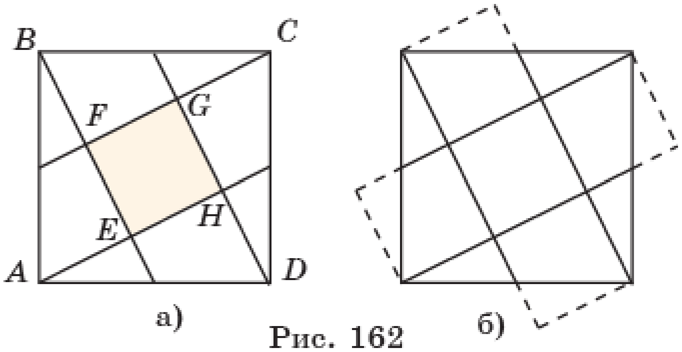


Рис. 162

Решение показано на рисунке 162, б, из которого видно, как из данного квадрата получить греческий крест, который состоит из пяти равных квадратов. Таким образом, площадь заштрихованного квадрата равна $\frac{1}{5}$ площади большого квадрата.

Эта задача взята из книги Хонсбергера Р. Математические изюминки /Пер.с англ. А.П.Савина и Л.А.Савиной. - М.: Наука, 1992, с.138. (Библиотечка Квант, выпуск 83). Мы представляем ребятам эту замечательную серию научно-популярных книг по математике и физике, показываем еще несколько работ из нее, например: Садовский Л.Е., Садовский А.Л. Математика и спорт (выпуск 44); Тихомиров В.М.

Рассказы о максимумах и минимумах (выпуск 56); Колмогоров А.Н. Математика - наука и профессия (выпуск 64) и др.

2. Дан куб и шесть одинаковых греческих крестов, вырезанных из бумаги. Известно, что площадь креста равна площади грани куба. Можно ли этими фигурами полностью оклеить поверхность куба?

Ответ. Да, можно. Для этого достаточно каждый крест перекроить в квадрат и наклеить на грань куба. (Задача о разрезании греческого креста и превращении его в квадрат – см. задачу 4 из блока задач на разрезание). На рисунке 163 представлено другое решения данной задачи без перекраивания греческого креста в квадрат, основанное на решении задачи предыдущей задачи 1 из данного блока.

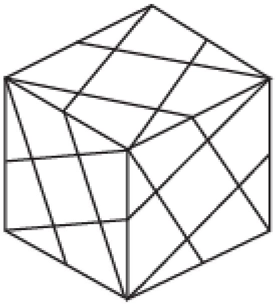


Рис. 163

3. Какую известную теорему иллюстрирует представленный чертеж (рис. 164)?

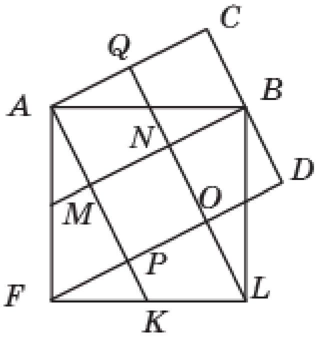


Рис. 164

Ответ. На рисунке 164 представлено одно из доказательств самой известной и популярной теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника, у которого один катет больше другого в два раза. Из рисунка видно, что площадь квадрата *ABLF* (который составлен из четырех равных треугольников *AMB*, *BNL*, *LOF*, *FPA* и квадрата *MNOP*) равна сумме площадей квадратов *CBNQ* и *APDC*.

4. Площадь одного квадрата клетчатой бумаги равна 100 мм^2. Пользуясь только линейкой и ножницами, вырежьте из клетчатой бумаги квадрат площадью 80 мм^2.

Решение. Возьмем квадрат *ABCD* (рис. 165), состоящий из 4 квадратов, каждый площадью 100 мм^2. S_{ABCD}=400 мм^2. Соединим вершины квадрата с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Площадь заштрихованного квадрата ($S_{з.}$) равна $\frac{1}{5}$ площади квадрата *ABCD* (задача 1 из данного блока задач). Таким образом, $S_{з.}$=400:5=80 (мм^2). Осталось только вырезать заштрихованный квадрат.

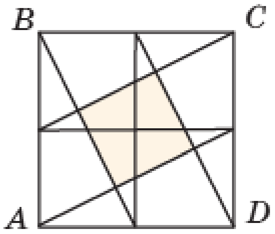


Рис. 165

Это задача В.В. Произволова (Задачи на вырост. – М.: МИРОС, 1995).

Блок задач «Восстанови фигуру»

1. Восстановите треугольник *ABC*, зная основания двух его высот (A_1, C_1), проведенных из вершин *A* и *C*, и две точки (*E*, *F*), взятые на его основании *AC*.

Решение. Пусть треугольник *ABC* восстановлен. Обратимся к рисунку 166.

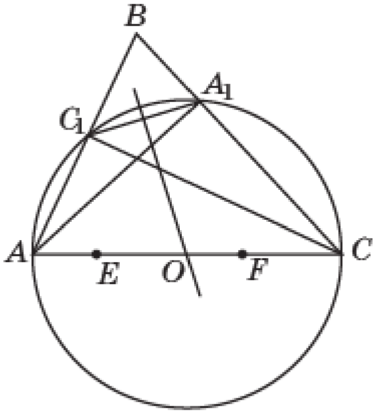


Рис. 166

Точки A_1 и C_1 принадлежат окружности, построенной на *AC* как на диаметре. A_1C_1 - хорда этой окружности, центр которой, точка *O*, находится на серединном перпендикуляре отрезка A_1C_1 и является серединой отрезка AC. Отсюда построение. Проводим отрезок A_1C_1 и строим его серединный перпендикуляр. Точка O - точка его пересечения с прямой EF. Затем строим окр.$(O;OA_1)$. Точки A и C - точки пересечения прямой EF с окружностью. $B=AC_1\cap CA_1$. Треугольник ABC построен.

Для учащихся, заинтересовавшихся подобными задачами, можно рекомендовать статью Ивановой Н.Н. Восстанови стертую фигуру! //Квант.-1986.-№ 1.-С. 30).

2. Восстановите квадрат, зная по одной точке на каждой его стороне.

Решение. Допустим мы построили квадрат $ABCD$, на сторонах которого расположены четыре точки M, N, K и L (рис. 167, а).

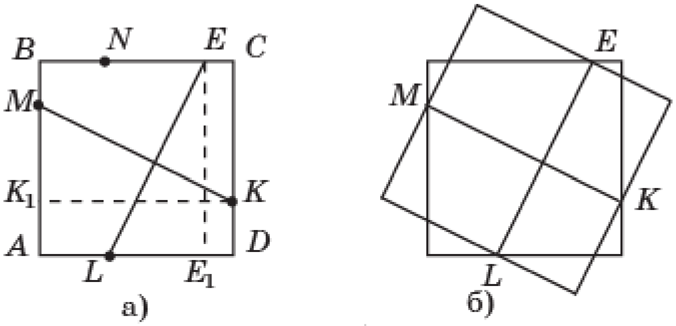


Рис. 167

Квадрат обладает важным и интересным свойством: если соединить точки, принадлежащие его противоположным сторонам, например, данные M и K, и провести $LE\perp MK$, где точка E принадлежит прямой, на которой лежит сторона квадрата BC, то $MK=LE$. Это следует из равенства прямоугольных треугольников LEE_1 и MKK_1 (по катету и острому углу: $EE_1=KK_1$ и $\angle LEE_1=\angle MKK_1$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из равенства треугольников следует, что $LE=MK$.

Итак, восстановление квадрата выглядит следующим образом. Соединяем точки M и K. Проводим через точку L прямую LE, перпендикулярно прямой MK таким образом, чтобы $LE=MK$. Проводим прямую NE. Через точку L проводим прямую l, параллельную прямой NE. Через точки M и K проводим прямые, перпендикулярные прямым NE и l. Точки, где прямые пересеклись назовем A, B, C, D. $ABCD$ - квадрат. Действительно, во-первых, $ABCD$ - прямоугольник (по построению) и, во-вторых, его стороны равны. Это следует из равенства прямоугольных треугольников LEE_1 и MKK_1 (по гипотенузе и острому углу: $LE=MK$, по построению, $LEE_1 = MKK_1$, как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Из равенства треугольников следует, что $EE_1=KK_1$, т.е. все стороны $ABCD$ равны.

Заметим, что при построении квадрата точка E может совпасть с данной точкой N (рис. 167, б). Тогда через точки N и L проводим любые параллельные прямые, а через точки M и N - им перпендикулярные. Точки пересечения прямых будут вершинами квадрата. В этом случае будет бесконечное множество решений.

Данная задача взята из известной книги Дынкина Е.Б. и др. Математические задачи (3-е изд. - М.: Наука, 1971 /Библиотечка физико-математической школы. Выпуск 1*).

Мы знакомим учащихся с этой замечательной серией научно-популярной литературы для школьников и представляем другие книги из нее, например:

Выпуск 1. Метод координат. Выпуск 2. Функции и графики (основные приемы). Выпуск 3. Задачи по элементарной математике. Выпуск 4. Прямые и кривые и т.д. Всего в этой серии вышло пять основных выпусков и четыре дополнительных, помеченных звездочкой.

3. Восстановите стертый центр окружности, имея только чертежный угольник.

Решение показано на рисунке 168.

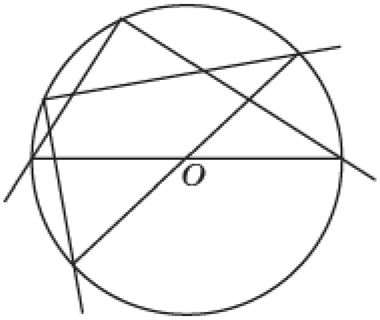


Рис. 168

Блок задач «Соедини, сложи»

1. Соедините 4 точки, расположенные в вершинах квадрата ломаной из 3-х звеньев. (Эта задача открывает целый блок задач на ломаные. Первая очень простая, при ее решении учащиеся должны вспомнить понятие ломаной).

2. Соединить 9 точек, расположенных в вершинах квадрата, на серединах его сторон и в его центре, ломаной из 6 звеньев.

Решение показано на рисунке 169.

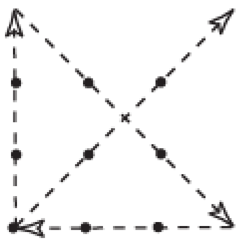
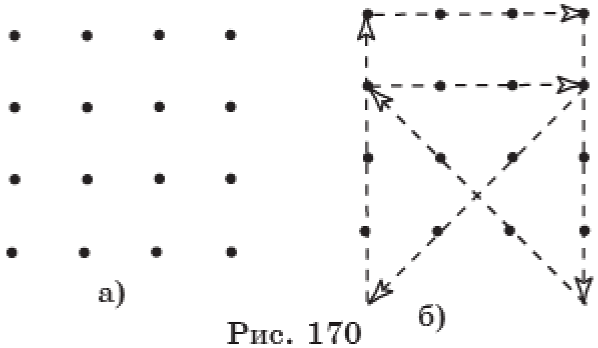


Рис. 169

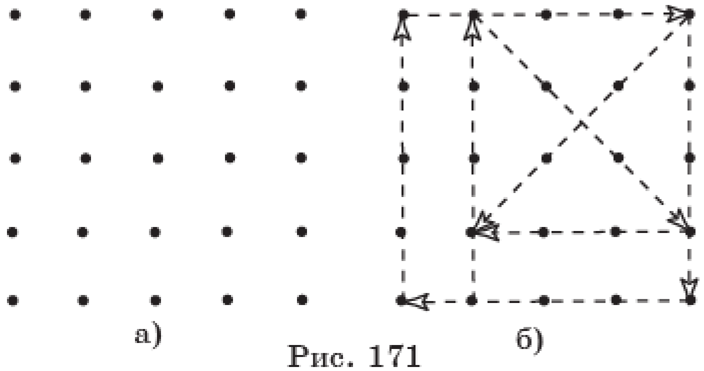
3. Соедините 16 точек, расположенных так, как показано на рисунке 170, а, ломаной из 6 звеньев. (Решение показано на рисунке 170, б).



а) б)

Рис. 170

4. Соедините 25 точек, расположенных так, как показано на рисунке 171, а, ломаной из 8 звеньев.



а) б)

Рис. 171

Решение показано на рисунке 171, б.

5. Из 6 спичек сложить 4 равных треугольника.

Решение. Спички расположите как ребра правильного тетраэдра.

6. Из 9 спичек сложить 7 равных треугольников.

Решение показано на рисунке 172. Изображенный многогранник называется бипирамидой).

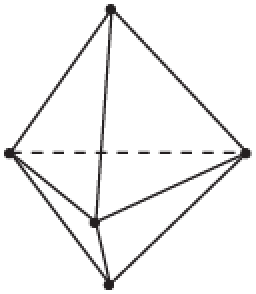


Рис. 172

7. Учащиеся наверняка уже знакомы с хитроумной китайской игрой "чи-чао-тю"-танграм. В ней квадрат разрезается на семь частей (рис. 257) - танов, из которых складываются различные фигурки людей и животных (см., например, Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. - М.: Мир, 1971, с. 330).

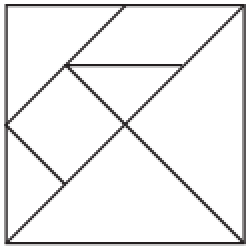
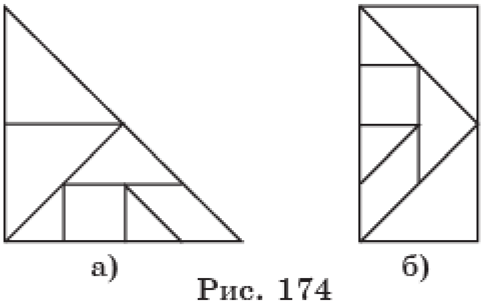


Рис. 173

Здесь же предлагаем учащимся более сложные задачи на складывание геометрических фигур, а именно: из квадрата сложить прямоугольный равнобедренный треугольник и прямоугольник.

Решение показано соответственно на рисунках 174, а и 174, б.

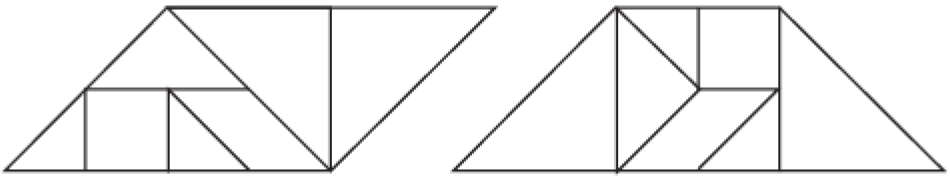


а) б)

Рис. 174

8. Сложите из танграма параллелограмм и равнобедренную трапецию.

Решение показано на рисунках 175, а; 175, б.



а) б)

Рис. 175

Блок задач «Из геометрии треугольника»

1. Докажите, что в любом треугольнике ортоцентр, центр тяжести и центр описанной окружности принадлежат одной прямой, которая называется прямой Эйлера.

Решение. Пусть дан треугольник ABC, H - его ортоцентр, M - центр тяжести и O - центр описанной окружности (рис. 176). K, L - середины соответственно сторон AC и BC.

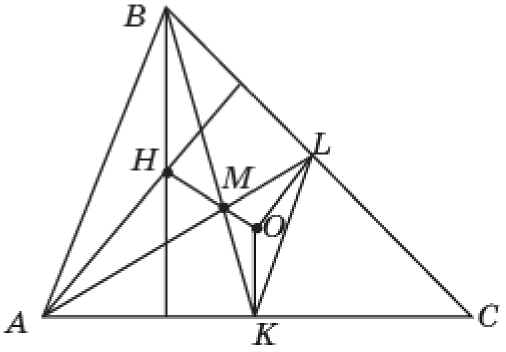


Рис. 176

Докажем сначала, что $BH:KO=2:1$. Для этого рассмотрим треугольники ABH и LOK. Они подобны по углам (например, $\angle ABH=\angle LKO$, как углы с соответственно параллельными сторонами, $LK\|AB$, так как LK - средняя линия треугольника). Так как $AB:LK=2:1$, имеем $BH:KO=2:1$. Затем проводим прямую HO, обозначаем $M=HO\cap BK$ и доказываем, что точка M - точка пересечения медиан треугольника ABC. Действительно, так как $\Delta BMH=\Delta KMO$ (по углам) и $BM:KM=BH:KO=2:1$, точка M делит медиану BK в отношении 2:1, т.е. M - точка пересечения медиан или центр тяжести треугольника.

2. Докажите, что в произвольном треугольнике основания медиан, основания высот, а также середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами, принадлежат одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера*.

Решение. Пусть точки D, E, F - основания высот треугольника ABC (рис. 177); A_1, B_1, C_1 - основания медиан; K, L, N - середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника H с его вершинами.

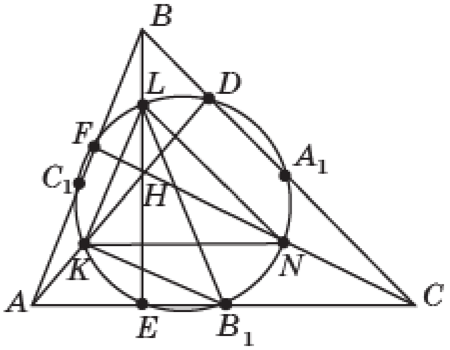


Рис. 177

Выбираем произвольную сторону треугольника, например AC. Проводим окр. (LB_1). Точка E ∈окр. (LB_1), так как $\angle LEB_1$=90°. Докажем, что точка K принадлежит окр.(LB_1). $KL||AB$ (KL - средняя линия треугольника AHB); $KB_1||HC$ (KB_1 - средняя линия треугольника AHC). Таким образом, $\angle LKB_1=\angle BFC$, как углы с соответственно параллельными сторонами, т.е. угол LKB_1 равен 90°, и точка K принадлежит окр.(LB_1). Аналогично можно показать, что точка N∈окр.(LB_1). Таким образом, точки L, K, N, E, B_1 принадлежат одной окружности. Выбираем другую сторону треугольника - AB и поступаем так же, как в случае со стороной AC. Получаем - точки L, K, N, F, C_1 принадлежат одной окружности. Аналогично, точки L, K, N, D, A_1 тоже принадлежат одной окружности. Во всех случаях присутствуют три точки L, K, N, которые определяют единственную окружность. Следовательно, все девять названных точек принадлежат одной окружности - окружности Эйлера.

3. Как известно, французский император Наполеон Бонапарт был большим любителем и поклонником математики. Ему приписывается решение нескольких геометрических задач, в частности, такой: "На сторонах произвольного треугольника внешним образом построены равносторонние треугольники. Нужно доказать, что центры этих треугольников являются вершинами также равностороннего треугольника".

Решение. Приведем решение, данное в "Энциклопедическом словаре юного математика" (2-е изд. - М.: Педагогика, 1989, с. 298). Когда в классе разбираем это решение, обязательно представляем учащимся эту красивую и полезную для них книгу.

Итак, на сторонах треугольника ABC построены равносторонние треугольники с центрами O_1, O_2, O_3 (рис. 178, а). Докажем, что треугольник $O_1O_2O_3$ будет равносторонним. Соединим O_1 с вершинами A и B; O_2 - с B и C; O_3 - с A и C. Рассмотрим шестиугольник $AO_1BO_2CO_3$. У него углы при вершинах O_1, O_2, O_3 равны по 120° каждый.

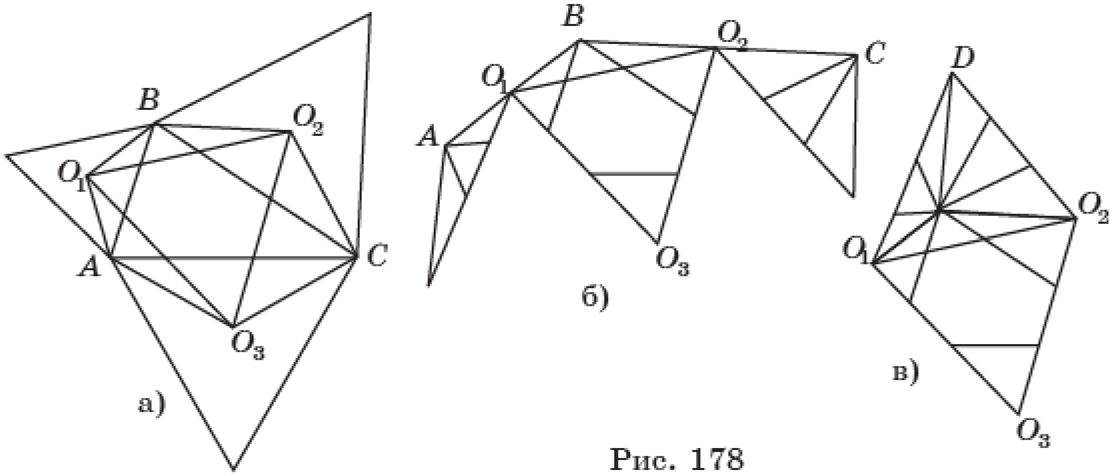


Рис. 178

Теперь отрежем от шестиугольника треугольники O_1O_3A и O_2O_3C (рис. 178, б) и сложим их так, как показано на рисунке 178, в. Рассмотрим четырехугольник $O_1DO_2O_3$. Заметим, что у него $\angle DO_1O_3=\angle DO_2O_3=120^\circ$ (так как они равны соответственно углам AO_1B и CO_2B). Кроме этого, равны треугольники DO_1O_2 и $O_3O_1O_2$ (по трем сторонам). Следовательно, $\angle O_2O_1O_3=\angle O_1O_2O_3=60^\circ$, т. е. и $\angle O_1O_3O_2=60^\circ$. Таким образом, треугольник $O_1O_2O_3$ - равносторонний.

Решение данной задачи сопровождается показом соответствующей модели.

Блок задач «Геометрические места»

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек M, для которых $S_{AMCD} = S_{AMCB}$.

Решение. Проведем в четырехугольнике $ABCD$ диагональ DB (рис. 179,а) и возьмем ее середину - точку O. Точка O будет принадлежать данному геометрическому месту, так как $S_{AOD}=S_{AOB}$ и $S_{COD}=S_{COB}$. Таким образом, $S_{AOCD}=S_{AOCB}$.

Проведем через точку O прямую EF, параллельную AC (рис. 179, б). Возьмем произвольную точку M, принадлежащую отрезку EF. $S_{AOC}=S_{AOM}$. Следовательно, $S_{AOCD}=S_{AMCD}$. Таким образом, $S_{AMCD}=S_{AMCB}$, и отрезок EF - искомое геометрическое место.

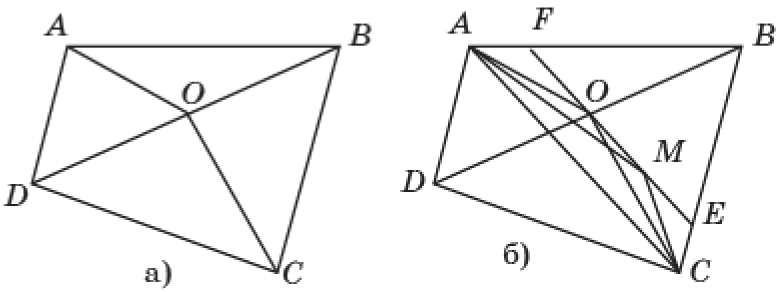


Рис. 179

2. Что представляет собой геометрическое место точек на плоскости, из которых данный отрезок виден под данным углом?

Решение показано на рисунке 180, где *AB* - данный отрезок. Искомым геометрическим местом точек являются изображенные на рисунке две дуги симметричных окружностей без их концов.

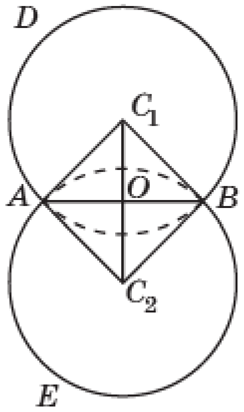


Рис. 180

3. Как провести прямые, касающиеся данного шара и параллельные данной прямой? Сколько таких прямых можно провести? Что собой представляет геометрическое место этих прямых?

Решение. Через центр шара *O* проведем плоскость, перпендикулярную данной прямой *a*. В сечении шара этой плоскостью получится большой круг. Искомыми прямыми будут прямые, проведенные через точки окружности этого круга, параллельные данной прямой. Таким прямых можно провести бесконечное множество, и они образуют цилиндрическую поверхность.

Блок задач «Приложения теоремы Эйлера»

Теорему Эйлера историки математики называют первой теоремой топологии - раздела геометрии, который изучает свойства фигур, не меняющихся при непрерывных деформациях, допускающих любые растяжения и сжатия, но без разрывов или дополнительных склеек. Такие свойства называются топологическими. Соотношение Эйлера В-

Р+Г=2 для выпуклых многогранников является как раз таким топологическим свойством. Многогранник можно как угодно деформировать, при этом ребра и грани могут искривляться, однако их число, а следовательно, и соотношение Эйлера не меняются.

Заметим, что при доказательстве соотношения Эйлера мы уже использовали подобные деформации, когда поверхность многогранника с вырезанной одной гранью растягивали на плоскости. При этом на плоскости получался многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники, для которых справедливо соотношение В-Р+Г'=1, где В - число вершин, Р - ребер и Г' - граней (многоугольников). Ребра и сами многоугольники могут быть искривлены, но это не влияет на соотношение Эйлера.

Совокупность вершин и соединяющих их ребер на плоскости называется графом. Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок, структурные формулы молекул и т. д. Графы широко используются в современной математике и программировании. Они находят все новые приложения в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине и т.д. Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких головоломок была задача о трех домиках и трех колодцах, которую мы сейчас и рассмотрим.

1. *Задача о трех домиках и трех колодцах.* Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, а колодцы - точками $К_1$, $К_2$, $К_3$ (рис. 181).

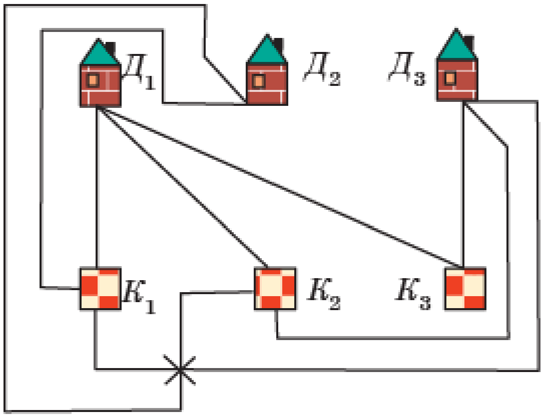


Рис. 181

Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются.

Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники - грани. Поэтому для числа вершин, ребер и граней должно выполняться соотношение Эйлера В-Р+Г'=1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну - внешнюю часть плоскости по отношению к исходному многоугольнику. Тогда соотношение Эйлера примет вид В-Р+Г=2, причем, В=6 и Р=9. Следовательно, Г=5. Каждая из пяти граней имеет, по крайней мере, четыре ребра, поскольку, по условию задачи, ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро принадлежит ровно двум граням, то количество ребер должно быть не меньше (5·4):2=10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что ответ в задаче отрицателен - нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

2. Другой задачей-головоломкой, связанной с именем Эйлера, была *задача о кенигсбергских мостах*.

Во времена Эйлера в г. Кенигсберге (ныне Калининграде) было семь мостов через реку Прегель (рис. 182, где Л - левый берег, П - правый берег, А и Б - острова). Задача заключалась в следующем: можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост ровно по одному разу?

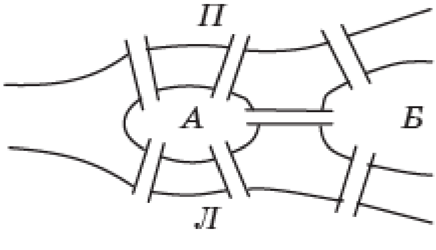


Рис. 182

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т.е. "нарисовать одним росчерком". Такие контуры образуют так называемые *уникурсальные графы*.

На рисунке 267 изображен граф, соответствующий задаче о кенигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф является уникурсальным.

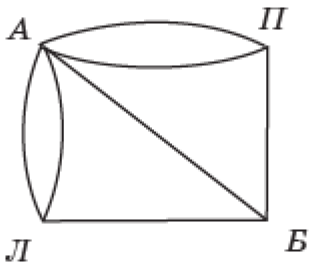


Рис. 183

Для этого рассмотрим понятие индекса вершин - число ребер графа, сходящихся в данной вершине, и докажем, что если граф уникурсальный, то он содержит не более двух вершин нечетного индекса.

Действительно, если граф уникурсален, и его начало не совпадает с концом, то начало и конец являются единственными вершинами нечетного индекса. Остальные вершины имеют четный индекс, так как в каждую точку мы входим и выходим из нее. Если начло совпадает с концом, то вершин с нечетным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим четность вершин графа на рисунке 183. Вершина А имеет индекс 5, Б - 3, П - 3 и Л - 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечетного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что нельзя пройти во время прогулки по городу по всем семи мостам, проходя по каждому только один раз.

3. Определите, какие фигуры, изображенные на рис. 184, являются уникурсальными?

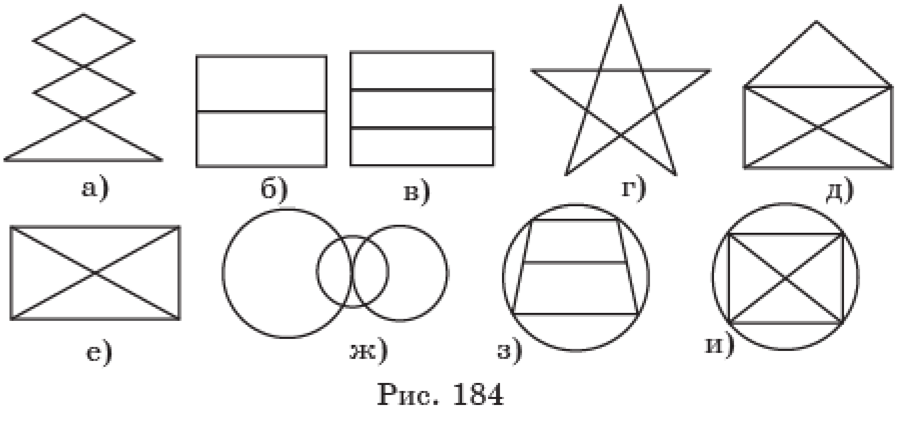


Рис. 184

Ответ. Уникурсальными являются фигуры, изображенные на рисунках 184, а,б,г,д,ж,з.

4. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз. Соответствующий граф приведен на рисунке 185.

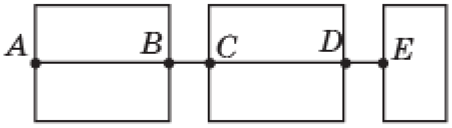


Рис. 185

Вершины графа - это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра - залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз?

Ответ. Граф, изображенный на рисунке 185, уникурсальный, он имеет две вершины *A* и *E* нечетного индекса. В них и следует сделать вход и выход на выставку.

Данная задача взята из интересной книги Л.Ю. Березиной "Графы и их применение" (М.: Просвещение, 1979, с.40).

5. Возьмите карту Санкт-Петербурга и определите, можно ли прогуливаясь по городу, обойти все Дворцовые мосты ровно по одному разу?

6. На рисунке 186 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

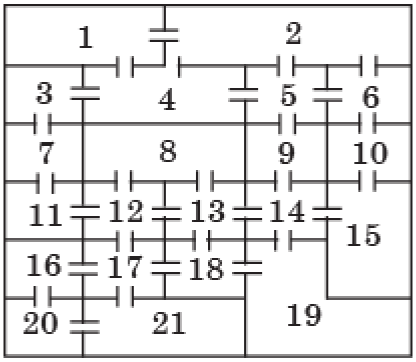


Рис. 186

Решение. На рисунке 187 изображен граф, соответствующий плану подземелья. Его вершины - это комнаты, ребра - двери. Граф имеет две вершины, а именно 16 и 18, нечетного индекса, т. е. он уникурсален. Таким образом, нужно войти в 16 комнату, а сокровища спрятаны в 18 комнате.

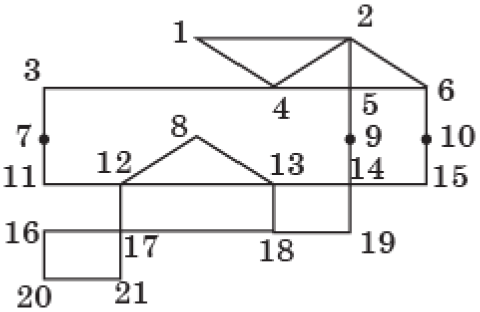


Рис. 187

Блок задач «Паркеты»

Паркетом называется разбиение плоскости на многоугольники, при котором каждые два многоугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо имеют общую сторону. Паркет называется правильным, если все многоугольники разбиения правильные, и любую вершину паркета можно перевести в любую другую его вершину некоторым перемещением, отображающим весь паркет на себя.

1. Какими одноименными правильными многоугольниками можно покрыть всю плоскость без просветов и пересечений?

Ответ. Плоскость можно покрыть правильными треугольниками; квадратами; правильными шестиугольниками.

2. Нарисуйте правильные паркеты: а) из квадратов и правильных восьмиугольников; б) из правильных треугольников и шестиугольников.

Ответ. Первый паркет представлен на рисунке 188, а.

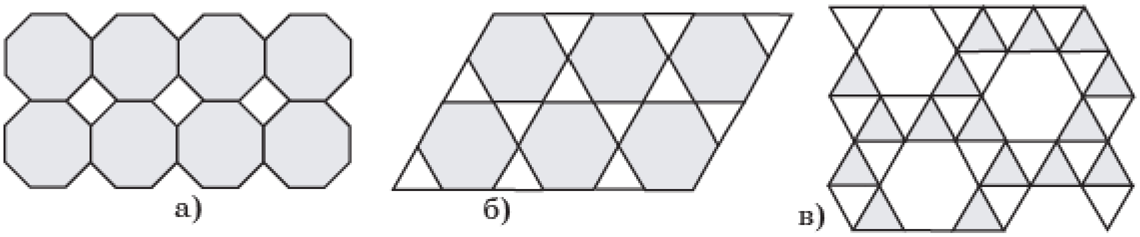

а) б) в)

Рис. 188

Во втором случае, в зависимости от расположения названных многоугольников вокруг каждой вершины, возможны два варианта паркетов, которые представлены на рисунках 188, б и 188, в.

3. Нарисуйте правильный паркет, состоящий из: а) квадратов, правильных шестиугольников и двенадцатиугольников; б) правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников.

Решение. В первом случае паркет представлен на рисунке 189, а, во втором - на рисунке 189, б.

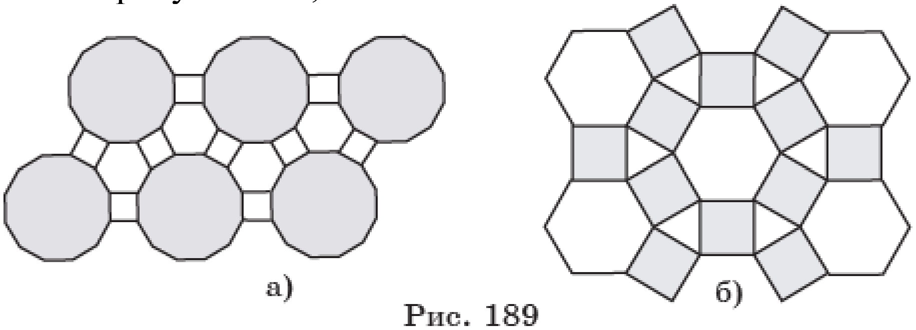

а) б)

Рис. 189

4. Нарисуйте правильный паркет, состоящий из: а) треугольников и двенадцатиугольников; б) из треугольников и квадратов.

Ответ. В первом случае паркет представлен на рисунке 190, а; во втором случае два решения, которые даны на рисунках 190, б, в.

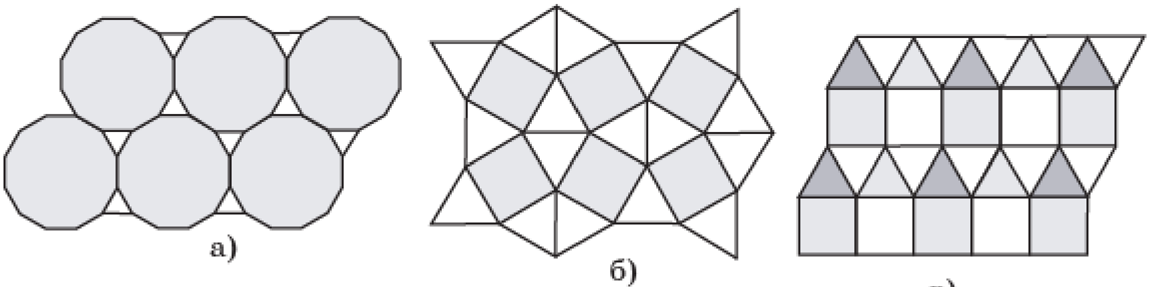

а) б) в)

Рис. 190

Таким образом, мы представляем учащимся 11 паркетов из правильных многоугольников. Возникает вопрос: "А сколько всего существует правильных паркетов?" Ответ: "Одиннадцать". Можно предложить учащимся соответствующее индивидуальное задание. - Сообщение на тему "Паркеты из правильных многоугольников". В последующих трех работах представляются различные доказательства того, что существует одиннадцать правильных паркетов: Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников //Квант.-1986.- № 8.-С.3; Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов //Квант.-1979.-№ 2.-

С.9; Смирнова И.М. В мире многогранников. - М.: Просвещение, 1995, с.96.

5. Покажите, что любым четырехугольником можно покрыть всю плоскость.

Идея решения этой задачи сводится к тому, что поскольку сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°, можно взять четыре равных четырехугольника и расположить их разными углами вокруг одной вершины так, как показано на рисунке 191.

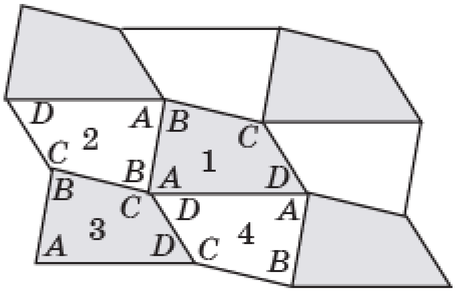


Рис. 191

Исходный четырехугольник *ABCD*. Сначала берется центральная симметрия относительно стороны *AB*. Исходный четырехугольник *ABCD* обозначим цифрой 1, а симметричный – цифрой 2. Теперь четырехугольник 2 отразим симметрично относительно середины его стороны *BC*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 3 и отразим его симметрично относительно середины его стороны *CD*. Полученный четырехугольник обозначим цифрой 4. Четырехугольники 1, 2, 3 и 4 примыкают к общей вершине углами *A*, *B*, *C* и *D*. Поскольку сумма внутренних углов четырехугольника равноа 360°, то эти четырехугольники заполнят часть плоскости вокруг общей вершины. Такое построение можно провести вокруг каждой новой вершины. В результате вся плоскость будет покрыта четырехугольниками. Говорят также, что построен паркет из четырехугольников.

Для показана решения этой задачи в классе рекомендуем изготовить один большой демонстрационный картонный или фанерный четырехугольник соответствующих размеров для построения паркета на доске и подобные ему небольшого размера раздать каждому ученику для построения паркета в тетради.

Заметим, что в качестве исходного четырехугольника можно взять не только выпуклый, но и невыпуклый четырехугольник. На рисунке 275 построен паркет из невыпуклого четырехугольника, которые закрашены в два цвета. Четырехугольники одного цвета получаются друг из друга параллельным переносом.

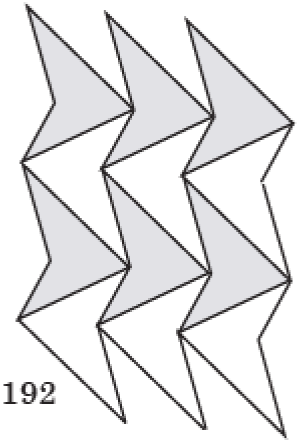


Рис. 192

6. Аналогично тому, как плоскость покрывается многоугольниками, пространство заполняется многогранниками. Какими равными одноименными правильными многогранниками можно заполнить пространство?

Решение. Этот вопрос можно решить экспериментально, взяв набор моделей одинакового размера правильных многогранников, и, прикладывая их одна к другой, убедиться, какие из них вплотную прилегают друг к другу. Конечно, интересно решить эту задачу и теоретически. Пусть φ - величина двугранного угла правильного многогранника, n - число правильных многогранников, имеющих общее ребро. Тогда $n\varphi = 360^o$. Рассмотрев двугранные углы правильных многогранников, станет ясно, что равенство $n\varphi = 360^o$ может выполняться только для одного правильного многогранника – куба, у которого $\varphi = 90^o$. Таким образом, из правильных многогранников только кубами можно заполнить все пространство.

7. Покажите, что одинаковыми ромбододекаэдрами (двенадцатигранник, у которого все грани – равные ромбы) можно заполнить все пространство.

Решение.

Вспомогательные задачи.

1). Покажите, что плоскости, проходящие через все ребра куба, расположенные вне куба и составляющие с его гранями углы в 45^o, образуют ромбододекаэдр. Изобразите данную пространственную ситуацию.

2). Пусть даны два одинаковых куба. Разобъем один из них на 6 равных пирамид. Вершина каждой пирамиды находится в центре куба, а основаниеем является одна из его граней. Приложим эти пирамиды к граням другого, равного первому, куба так, чтобы основания пирамид совместились с соответствующими гранями куба. Покажите, что получившийся при этом многогранник - ромбододекаэдр.

Решение основной задачи.

Сначала заполним пространство одинаковыми кубами. Затем кубы, входящие в это заполнение, отметим в шахматном порядке. К граням каждого такого отмеченного куба прилегают шесть неотмеченных кубов, которые разобьем на шесть одинаковых пирамид и присоединим эти пирамиды к прилегающим к ним отмеченным кубам. При этом каждый куб достроится до ромбододекаэдра. Полученные ромбододекаэдры заполняют все пространство.

8. Нарисуйте многогранник, двойственный к ромбододекаэдру. Как он называется? Сколько у него вершин, ребер и граней?

Ответ. Вершины двойственного многогранника лежат в центрах граней исходного многогранника. Многогранником, двойственным к ромбододекаэдру, будет кубооктаэдр. У него 14 граней (6 квадратов и 8 правильных треугольников), 24 ребра и 12 вершин.

Блок задач «Золотое сечение»

Золотым сечением (или делением) отрезка называется деление его длины на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

1. Выясните, каким числом выражается золотое сечение.

Решение. Выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части. Большую часть обозначим через x, тогда меньшая часть равна 1-x. По определению золотого сечения должно выполняться равенство $(1-x):x=x:1$. Мы получили уравнение относительно x, которое легко свести к квадратному $x^2+x-1=0$. Положительный корень этого уравнения равен

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6.$$

Итак, если длина исходного отрезка равна 1, то его большая часть при золотом сечении примерно равна 0,6.

2. Постройте с помощью циркуля и линейки золотое сечение данного отрезка AB.

Решение. Пусть дан отрезок AB (рис. 193). Проведем BC перпендикулярно AB и $BC=\frac{1}{2}AB$. Затем на AC отложим отрезок CD такой, что $CD=CB$, и на AB отложим отрезок AE , равный AD ($AE=AD$). Легко видеть, что точка E разделила отрезок AB в золотом отношении.

Действительно, пусть $AB=1$, тогда $CB=\frac{1}{2}$; $CD=\frac{1}{2}$; $AD=AC-CD$, $AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, $AE=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0{,}6$.

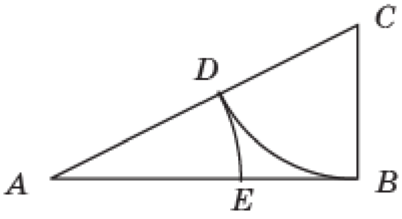


Рис. 193

В качестве индивидуального задания учащимся может быть предложено сообщение на тему "Неизъяснимая, непостижимая, божественная пропорция". (Литература: Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. - М.: Стройиздат, 1990; Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Молодая гвардия, 1990).

При изображении пространственных фигур важное место занимает вопрос о нахождении наилучшего соотношения неравных частей, составляющих вместе единое целое. Его решение связывают с именем Пифагора, который установил, что наиболее совершенным делением целого на две части является такое деление, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому. В Древней Греции такое деление называлось гармоническим отношением, в эпоху Возрождения - золотой пропорцией. Термин золотое сечение (sectio aurea) появился в Германии в первой половине XIX века. В 1509 году известный математик, монах Лука Пачоли, друг великого Леонардо да Винчи, написал целую книгу о золотом сечении, которую назвал "Sectio divina" - "Божественная пропорция". Леонардо выполнил иллюстрации к этой книге. В ней воздействие божественной пропорции на человека называлось "существенным, невыразимым, чудесным, неизъяснимым, неугасимым, возвышенным, превосходнейшим, непостижимым".

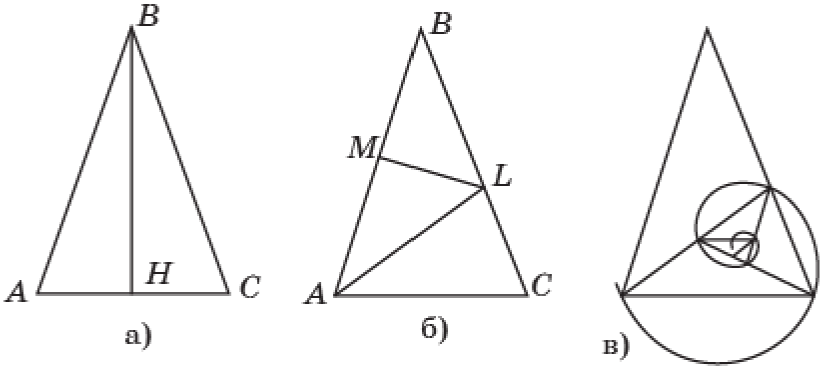
Число $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0{,}6$ обозначается буквой φ. Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия, который часто использовал золотое сечение в своих произведениях. Самыми знаменитыми из них были статуи Зевса Олимпийского (которая считалась одним из семи чудес света) и Афины Парфенос.

Пропорции золотого сечения создают впечатление гармонии, красоты. Поэтому скульпторы, архитекторы, художники использовали и используют золотое сечение в своих произведениях. Так, например, знаменитая статуя Аполлона Бельведерского состоит из частей, делящихся по золотым отношениям, причем не только вся статуя, но и отдельные ее части делятся в золотом отношении. Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры - Парфенон в Афинах (V в. до н.э.) содержит в себе золотые пропорции. Так, отношение высоты здания к его длине равно □. Если произвести деление высоты Парфенона по золотому сечению, то получим те или иные выступы здания (показываем ребятам соответствующие рисунки).

Известный русский архитектор М. Ф. Казаков широко использовал в своем творчестве золотое сечение. Его можно обнаружить, например, в архитектуре дворца в Петровском Алабине; бывшего здания Сената в Кремле. По проекту М. Ф. Казакова, в Москве была построена Голицынская больница, которая в настоящее время называется Первой клинической больницей им.Н. И. Пирогова (Ленинский проспект, д. 8). Если разделить высоту этого здания по золотому сечению, то получим выступы, карнизы и т. п. (Рассказ сопровождаем соответствующими рисунками).

3. Найдите углы в равнобедренном треугольнике, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении. (Такой треугольник называется золотым). Покажите, что биссектриса угла при основании золотого треугольника отсекает от него также золотой треугольник. Продолжая этот процесс, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.

Решение. Пусть в треугольнике ABC (рис. 194, а) $AC{:}AB = \varphi$. Проведем BH перпендикулярно AC; $AH{:}AB = \sin\frac{\alpha}{2}$, где $\alpha = \angle ABC$; $AH{:}AB = \frac{1}{2}\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}3090$; $\sin\frac{\alpha}{2}= 0{,}3090$, следовательно, $\frac{\alpha}{2} = 18^{\circ}$; $\alpha = 36^{\circ}$. $\angle BAC = \angle ACB = (180^{\circ} - 36^{\circ}){:}2=72^{\circ}$.



а) б) в)

Рис. 194

Проведем AL - биссектрису угла BAC (рис. 194, б). Тогда в треугольнике ALC углы будут равны, как и в треугольнике ABC, 36^o, 72^o и 72^o. Покажем, что треугольник ALC - золотой, т.е. $LC:LA = \varphi$. Это следует из того, что треугольники ABC и LAC подобны (по углам): $AC:AB = LC:LA$, но $AC:AB = \varphi$, следовательно, $LC:LA = \varphi$.

Можно показать, что и треугольник ALB - золотой, т. е. $AL:AB = \varphi$. Для этого проведем LM перпендикулярно AB (рис. 194, б). Тогда $BM:BL = \sin 54^0 \approx 0{,}8090$, т. е. $BM:BL \approx 0{,}6$. Таким образом, треугольник ALB тоже золотой.

Последовательность вращающихся треугольников показана на рисунке 194, в. При этом получается так называемая логарифмическая спираль.

4. На рисунке 195 изображен лотарингский крест, служивший эмблемой "Свободной Франции" (организации, которую в годы второй мировой войны возглавлял генерал де Голль).

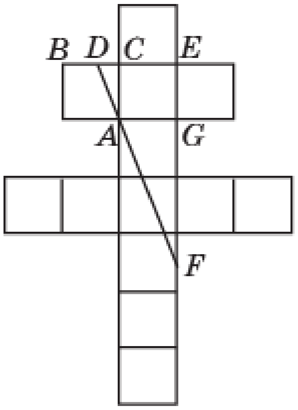


Рис. 195

Этот крест составлен из тринадцати единичных квадратов. Покажите, что прямая, проходящая через точку A и делящая площадь лотарингского креста на две равные части, делит отрезок BC в золотом отношении.

Решение. Пусть прямая DF делит крест на две равновеликие части, тогда $S_{DEF}=2{,}5$ кв.ед. Обозначим $DC=x$, $GF=y$. Учитывая, что сторона каждого квадрата равна 1, получим: $\frac{1}{2}(x+1)(y+1) = 2{,}5$. Рассмотрим треугольники DCA и AGF. Они подобны, тогда $x:1=1:y$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)\cdot(y+1) = 2{,}5; \\ xy = 1, \end{cases}$$

из которой находим $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и, значит, $BD = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, т. е. точка D делит отрезок BC в золотом отношении.

Данная задача взята из книги Гарднера М. Математические головоломки и развлечения. - М.: Мир, 1971, с. 229. С этой книгой мы неоднократно встречаемся в нашем курсе. Можно представить учащимся и другие работы этого выдающегося ученого - популяризатора математики, например, в издательстве "Мир" выходили: "Математические досуги" (1972), "Математические новеллы" (1974), "Есть идея!" (1982), "Крестики-нолики" (1988), "Путешествие во времени" (1990) и др.

5. Покажите, что в пентаграмме (правильном звездчатом пятиугольнике) все треугольники золотые.

Решение. На рисунке 196 изображена пентаграмма $ACEBD$.

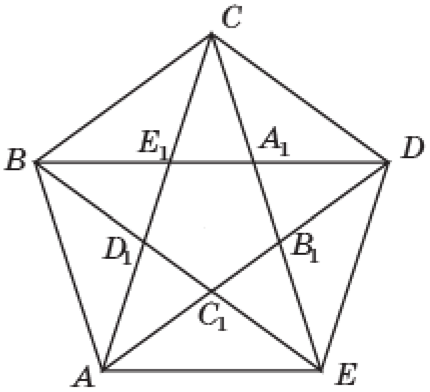


Рис. 196

Она состоит из треугольников нескольких типов, представителями которых являются, например, треугольники CE_1A_1 и CD_1E. Покажем, что они являются золотыми. Для этого рассмотрим выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Учитывая, что внутренние углы правильного пятиугольника равны 108°, нетрудно показать, что углы треугольника CE_1A_1 равны 36°, 72°, 72°; а углы треугольника CD_1E равны 108°, 36°, 36°. Следовательно, они являются золотыми (см решение предыдущих задач из данного блока). Более того, треугольники типа BCD, BE_1C, BA_1C тоже являются золотыми.

6. Покажите, что точка A_1 на рисунке 196 делит отрезок BD в золотом отношении. Найдите другое золотое деление отрезка.

Решение. Нужно показать, что $DA_1{:}BA_1{=}BA_1{:}BD$. Обозначим $DA_1{=}x$, $E_1A_1{=}y$, тогда $BE_1{=}x$; $CD{=}x{+}y$ (так как треугольник CDE_1 равнобедренный); $BD{=}2x{+}y$. Нужно показать, что $\frac{x}{x+y} = \frac{x+y}{2x+y}$.

Рассмотрим подобные треугольники: BE_1C и BCD (по углам), $BE_1{:}BC{=}BC{:}BD$, т.е. $\frac{x}{x+y}=\frac{x+y}{2x+y}$, другими словами, $DA_1{:}BA_1{=}BA_1{:}BD$, т.е. точка A_1 делит отрезок BD в золотом отношении.

Рассмотрим другую пару подобных треугольников: DE_1C и CE_1A_1 (по углам), отсюда $DE_1{:}CE_1{=}CE_1{:}A_1E_1$ или $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$: $x{+}y{=}BA_1$, $x{=}BE_1$, $y{=}A_1E_1$. Таким образом, точка E_1 делит отрезок BA_1 тоже в золотом отношении.

7. Постройте правильный десятиугольник, длина стороны которого равна заданному отрезку.

Решение. Пусть правильный десятиугольник построен. Обратимся к рисунку 197: AB - сторона правильного десятиугольника, длина которой равна длине заданного отрезка.

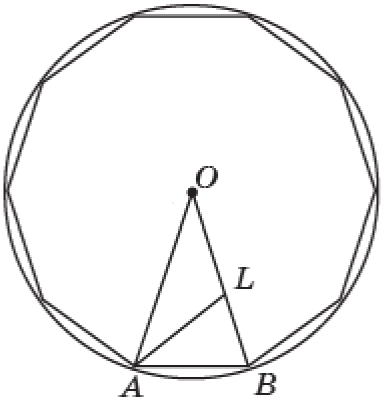


Рис. 197

Точка O - центр окружности, описанной около десятиугольника. Треугольник AOB -золотой, т.к. его углы равны соответственно 72^0, 36^0, 72^0. Проведя биссектрису AL, получим треугольник ALB, подобный треугольнику AOB, ALB - тоже золотой треугольник, т.е. $LB{:}AL{=}$□, но $AL{=}OL$ (треугольник ALO - равнобедренный, у него углы A и O равны по 36^0). Таким образом, $LB{:}OL = \varphi$, и точка L делит отрезок OB в золотом отношении. Отсюда построение. Сначала строим треугольник ALB. Затем - отрезок $OL = LB{:}\varphi$. Далее проводим окружность с центром в точкеO и радиусом OB. Дуга AB равна $\frac{1}{10}$ проведенной окружности.

ОТВЕТЫ
Контрольные работы

1

В1. 1. Да. 2. а) BC; б) EF. 4. 4. 5*. 10.
В2. 1. Да. 2. а) BC; б) AF. 4. 6. 5*. 10.

2

В1. 1. Прямая c может быть параллельна прямым a и b; может пересекать каждую из прямых a и b; может скрещиваться с каждой из них. 3. а) Параллельны или скрещиваются с b; б) пересекаются, параллельны или скрещиваются с b; в) пересекаются или скрещиваются с b. 4. $SA_2 = 15$ см; $SB_2 = 18$ см; $A_1C_1 = 4$ см. 5*. а) 10; б) 15.

В2. 1. Прямая a может пересекать прямые m и n в точке их пересечения или в различных точках данных прямых; может пересекать одну из них и быть параллельной другой; может скрещиваться с каждой из них. 3. а) c пересекается или скрещивается с a; б), в) пересекается, параллельна или скрещивается с a. 4. $BC = \frac{ac}{a+b}$. 5*. а) 10; б) 15.

3

В1. 1. а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{A_1B}$; в) $\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}$. 3. $a(2+\sqrt{5})$.
В2. 1. а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BB_1}$; в) $\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1D}$. 3. $\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{13}}{2}$.

4

В1. 1. 90°. 2. Прямоугольные. 3. Угол KLM – тупой.

В2. 1. 90°. 2. Треугольник DEK тупоугольный, остальные прямоугольные. 3. Угол H или угол P – прямой.

5

В1. 1. 30°. 2. 1 см. 3. $\frac{\sqrt{2}a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$. 4. 40°.
В2. 1. 60°. 2. $\frac{\sqrt{2(8b^2-a^2)}}{4}$. 3. $\frac{3a^2}{2\sqrt{3(3a^2-m^2)}}$. 4. 105°.

6

В1. 1. а) Да; б) нет. 2. 45°. 4. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
В2. 1. а) Да; б) нет. 2. 90°. 4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

СОДЕРЖАНИЕ

С.
Введение…………………………………………………………...3
§ 1. О современном курсе геометрии для средней школы………..5
§ 2. Программа изучения учебного материала……………………10
§ 3. Тематическое планирование………………………………….. 12
§ 4. Конспекты уроков для 10 класса………………………………20
    4.1. Начала стереометрии…………………………………...20
    4.2. Параллельность в пространстве…………………………51
    4.3. Перпендикулярность в пространстве…………………...132
    4.4. Многогранники………………………………………….. 196
§ 5. Использование современного и научно-популярного материала………………………………………………………. 213
§ 6. Дополнительный необязательный учебный материал……. 224
§ 7. Материал для проведения занимательного момента уроков.268
Ответы ………………………………………………………..297