

В.А. Смирнов, И.М. Смирнова

# ГЕОМЕТРИЯ С GEOGEBRA

## Стереометрия



МОСКВА

2018

УДК 514.1

ББК 22.15

С 50

**Смирнов Владимир Алексеевич**, д.ф.-м.н., профессор  
**Смирнова Ирина Михайловна**, д.п.н., профессор

С 50 Геометрия с GeoGebra. Стереометрия / Смирнов В.А., Смирнова И. М. – М.: «Прометей», 2018. – 172 с.

**ISBN 978-5-907003-42-2**

В предлагаемом учебном пособии рассмотрены возможности GeoGebra для использования её в обучении геометрии в школе, предложены задачи для самостоятельного решения, а также представлены решения этих задач.

© Смирнов В. А.,  
Смирнова И. М., 2018

**ISBN 978-5-907003-42-2**

© Издательство «Прометей», 2018

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ИНСТРУМЕНТЫ GEOGEBRA. СТЕРЕОМЕТРИЯ .....	4
2. МНОГОГРАННИКИ.....	22
ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА .....	22
ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА .....	24
ШЕСТИУГОЛЬНАЯ НЕВЫПУКЛАЯ ПРИЗМА .....	25
ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КРЕСТ .....	26
3. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	36
4. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	52
5. СЕЧЕНИЯ .....	59
6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ.....	67
7. КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ.....	73
8. ДВИЖЕНИЕ .....	76
9. ОБЪЁМЫ .....	86
10. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ.....	92
ОТВЕТЫ .....	95
2. МНОГОГРАННИКИ.....	95
3. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	108
4. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ .....	118
5. СЕЧЕНИЯ .....	125
6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ.....	136
7. КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ.....	144
8. ДВИЖЕНИЕ .....	148
9. ОБЪЁМЫ .....	156
10. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ.....	163

## ВВЕДЕНИЕ

Программа GeoGebra это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта <http://geogebra.org>.

Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для использования её в преподавании геометрии в пространстве (стереометрии), предложим задачи для самостоятельного решения. В конце пособия будут даны решения задач.

## 1. ИНСТРУМЕНТЫ GEOGEBRA СТЕРЕОМЕТРИЯ

Чтобы иметь возможность получать изображения пространственных фигур и проводить дополнительные построения требуется перейти в рабочее окно (рис. 1.1). Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши на маленький треугольник в середине правой стороны рабочего окна.

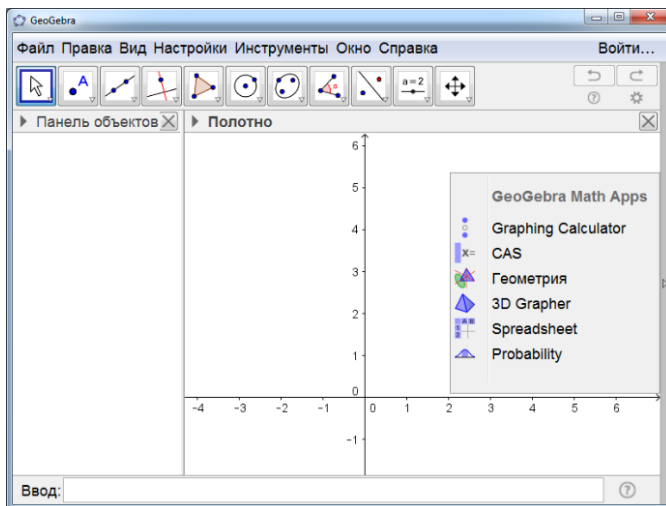


Рис. 1.1

Если нажать левой кнопкой мыши на строку «3D Grapher», то откроется рабочее окно (рис. 1.2).

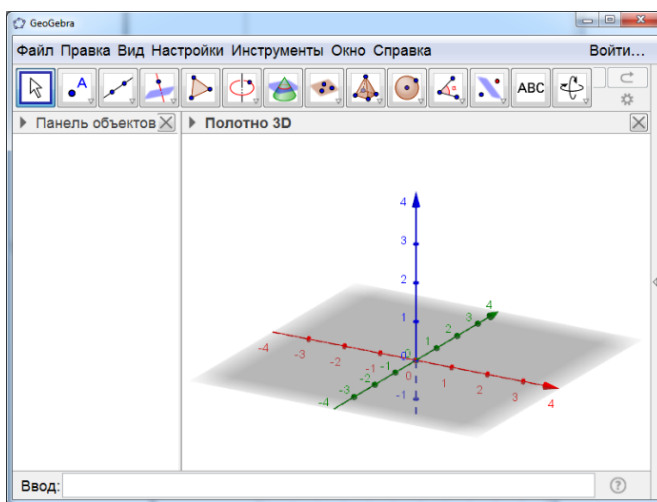


Рис. 1.2

Если нажать левой кнопкой мыши на маленький треугольник, расположенный слева от надписи «Полотно», то откроется дополнительная строка. В ней можно выбрать другой вид полотна, например, как на рисунке 1.3.

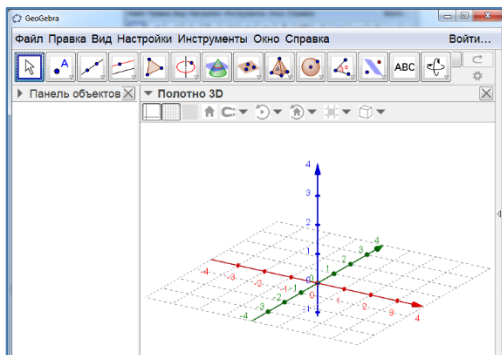


Рис. 1.3

В верхней строке окна расположены окошки с изображением инструментов. Инструменты второго и третьего окошка такие же, как и для планиметрического полотна.

В четвёртом окошке имеется инструмент «Perpendicular Line», который позволяет строить прямые, перпендикулярные данной прямой или данной плоскости (рис. 1.4).

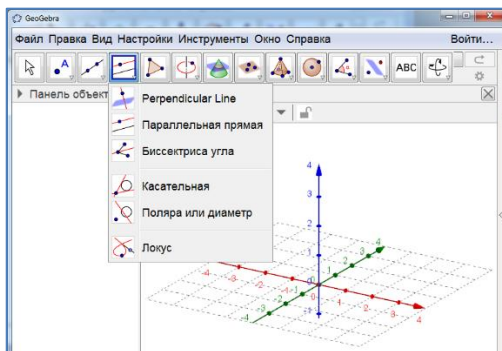


Рис. 1.4

На рисунке 1.5 показана прямая, проходящая через точку A, и перпендикулярная плоскости Oxy.

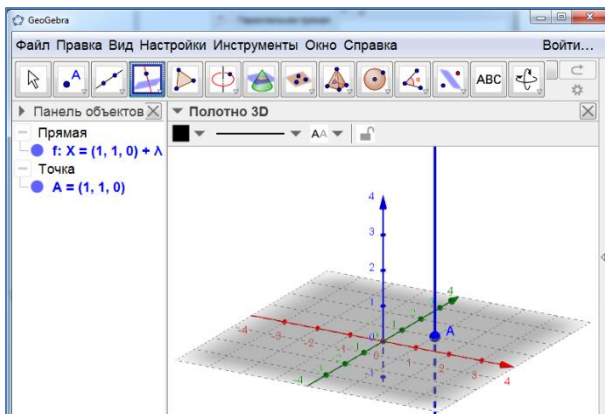


Рис. 1.5

В шестом окошке, по сравнению с плоскостью, имеются дополнительные инструменты построения окружности по точке и оси и построения окружности с центром, радиусом и направлением (рис. 1.6).

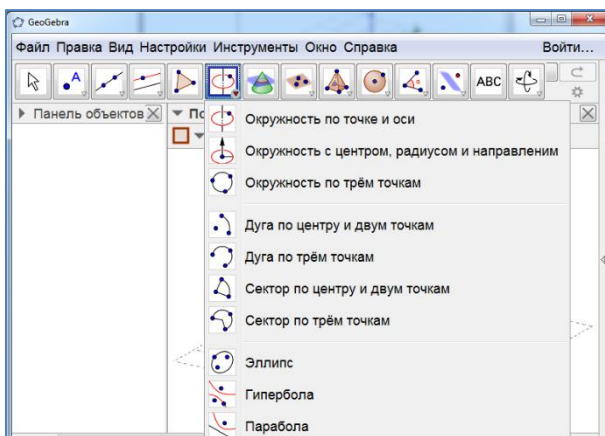


Рис. 1.6

Инструмент «Окружность по точке и оси» позволяет строить окружности, проходящие через данную точку, и данную прямую, проходящую через центр окружности, и перпендикулярную её плоскости. На рисунке 1.7 показан пример окружности, проходящей через точку В.

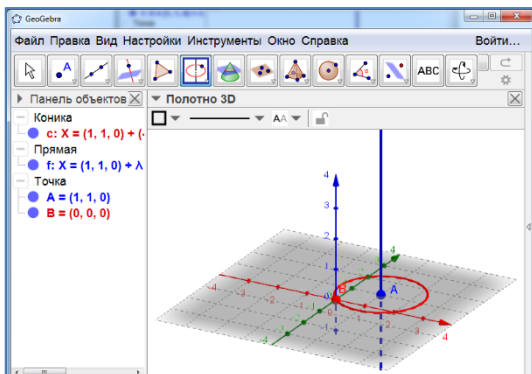


Рис. 1.7

Инструмент «Окружность с центром, радиусом и направлением» позволяет строить окружности с данным центром, данным радиусом и данным направлением. На рисунке 1.8 показан пример окружности с центром В, радиусом 1 и направлением  $Ox$ .

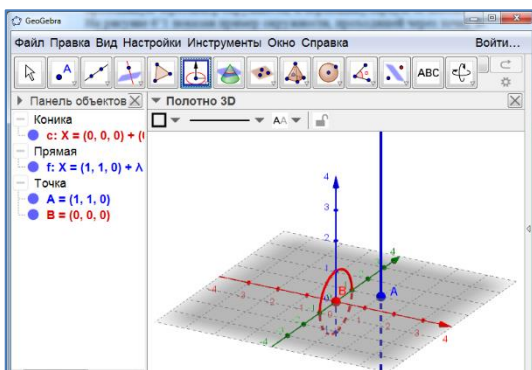


Рис. 1.8



В седьмом окне находится инструмент для построения линий пересечения (рис. 1.9).

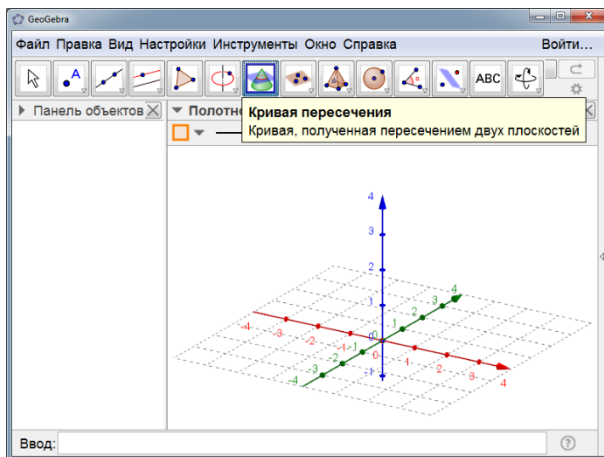


Рис. 1.9

Восьмым слева находится окошко с изображением плоскости и трёх точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.10).

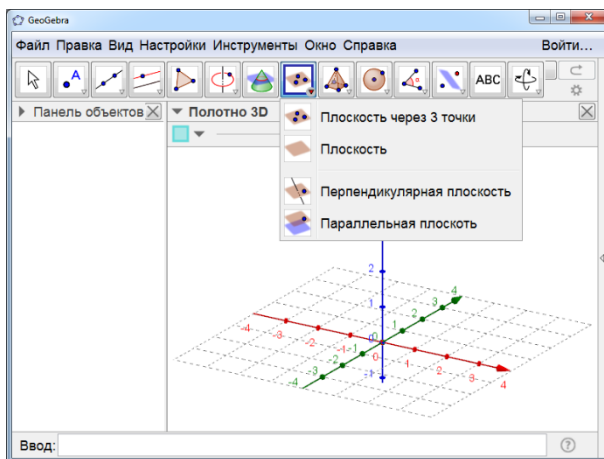


Рис. 1.10

Инструмент «Плоскость через 3 точки» позволяет проводить плоскость через три данные точки. На рисунке 1.11 показана плоскость, проходящая через точки A, B и C.

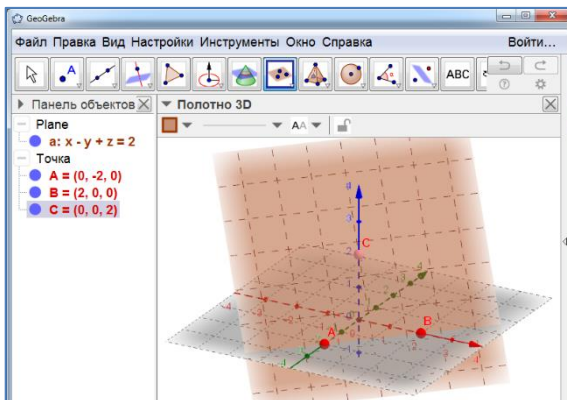


Рис. 1.11

Инструмент «Плоскость» позволяет строить плоскости, проходящие через три данные точки, данную точку и прямую, две данные прямые, многоугольник. На рисунке 1.12 показана плоскость, проходящая через данную точку и данную прямую.

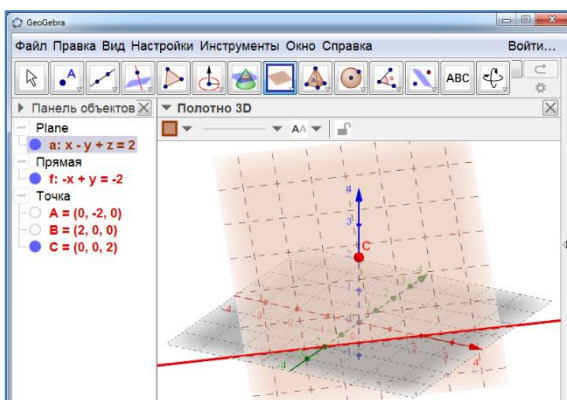


Рис. 1.12

Инструмент «Перпендикулярная плоскость» позволяет строить плоскость проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. На рисунке 1.13 показана плоскость, проходящая через точку  $B$ , и перпендикулярная оси  $Ox$ .

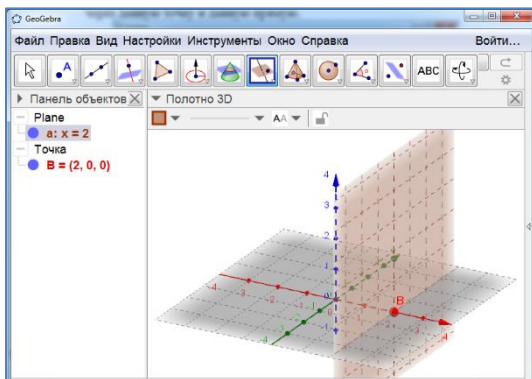


Рис. 1.13

Инструмент «Параллельная плоскость» позволяет строить плоскость, проходящую через данную точку и параллельную данной плоскости. На рисунке 1.14 показана плоскость, проходящая через точку  $C$ , и параллельная плоскости  $Oxy$ .

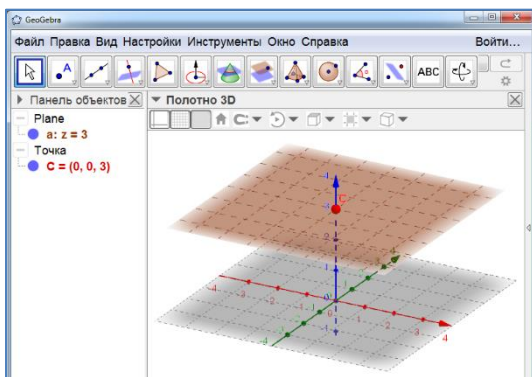


Рис. 1.14

Девятым слева находится окошко с изображением треугольной пирамиды. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.15).

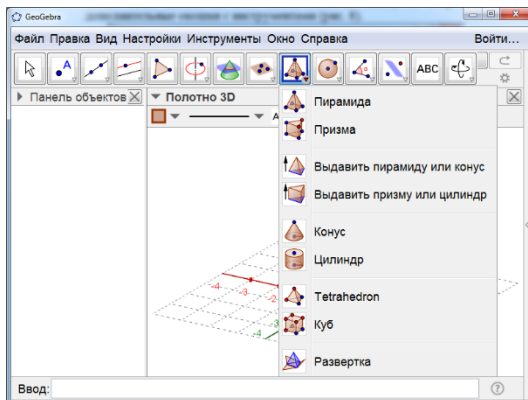


Рис. 1.15

Инструмент «Пирамида» позволяет строить пирамиду в пространстве. Для этого нужно сначала построить или указать многоугольник (основание пирамиды), а затем указать её вершину. На рисунке 1.16 показана четырёхугольная пирамида.

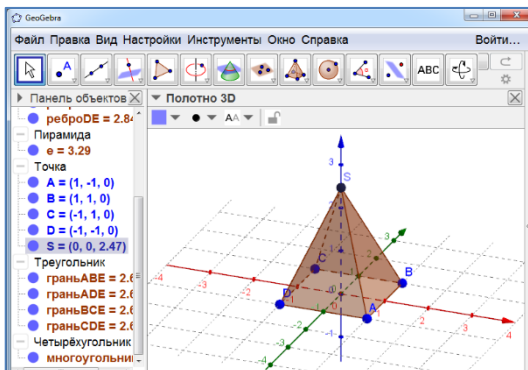


Рис. 1.16

Инструмент «Призма» позволяет строить призму в пространстве. На рисунке 1.17 показана правильная шестиугольная призма.

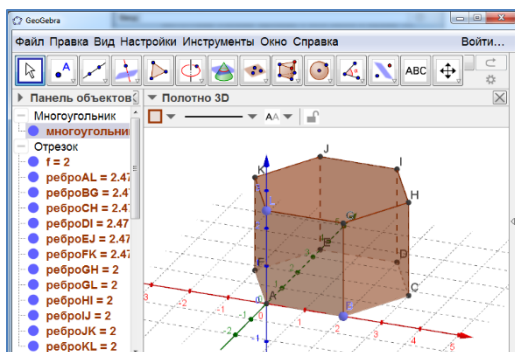


Рис. 1.17

Для её построения сначала нужно построить правильный шестиугольник (основание призмы).

Для этого нажмём левой кнопкой мыши на окошко с надписью «Вид» и выберем строчку с надписью «Полотно». Получим разделение рабочего окна на две части для плоских фигур (левая часть) и пространственных фигур (правая часть). В левой части построим правильный шестиугольник, как это делалось на плоскости. При этом правильный шестиугольник появится и в правой части окна (рис. 1.18).

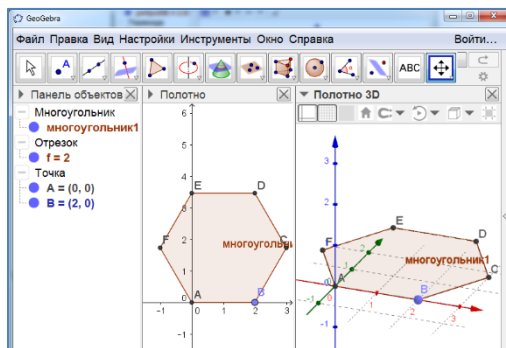


Рис. 1.18

Закроем левое окно, нажав левой кнопкой мыши на крестик в правом верхнем углу.

Выбрав инструмент «Призма», нажмем левой кнопкой мыши сначала на построенный правильный шестиугольник, а затем на какую-нибудь точку оси аппликат. Получим правильную шестиугольную призму.

**Инструмент «Конус»** позволяет получать изображение конуса. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр основания, а затем вершину конуса. Откроется окно, в котором нужно указать радиус основания конуса. После этого появится изображение конуса (рис. 1.19).

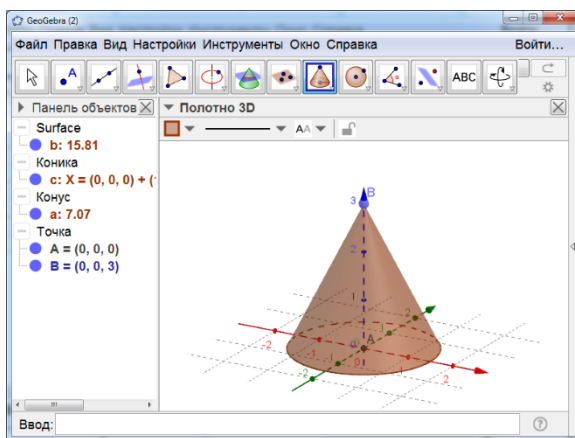


Рис. 1.19

**Инструмент «Цилиндр»** позволяет получать изображение цилиндра. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать центр нижнего основания, а затем центр верхнего основания. Откроется окно, в котором нужно указать радиус основания цилиндра. После этого появится изображение цилиндра (рис. 1.20).

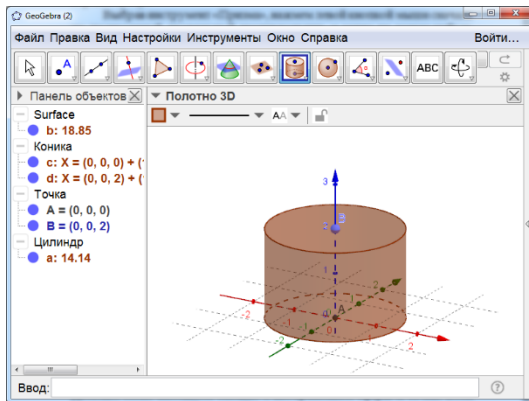


Рис. 1.20

**Инструмент «Тетраэдр»** позволяет получать изображения правильного тетраэдра. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины тетраэдра). На рисунке 1.21 показан пример такого тетраэдра.

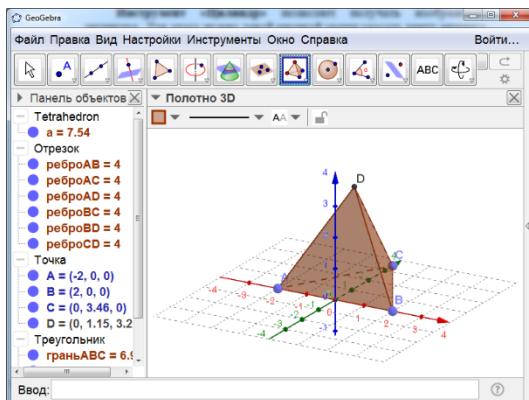


Рис. 1.21

**Инструмент «Куб»** позволяет получать изображения куба. Для этого нужно указать левой кнопкой мыши две точки (вершины куба). На рисунке 1.22 показан пример такого куба.

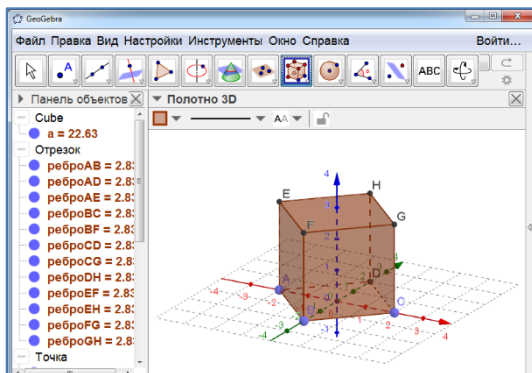


Рис. 1.22

**Инструмент «Октаэдр»** позволяет получать изображения октаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины октаэдра), например,  $A$  и  $B$ . В строке «Ввод» написать «Октаэдр[ $A$ ,  $B$ ]» и нажать «Enter». На рисунке 1.23 показан пример такого октаэдра.

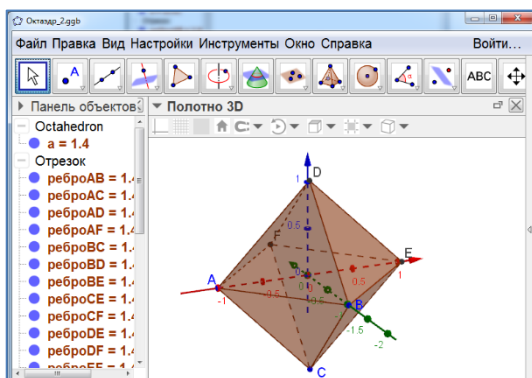


Рис. 1.23

**Инструмент «Икосаэдр»** позволяет получать изображения икосаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины икосаэдра), например,  $A$  и  $B$ . В строке «Ввод» написать «Икосаэдр[ $A$ ,  $B$ ]» и нажать «Enter». На рисунке 1.24 показан пример такого икосаэдра.



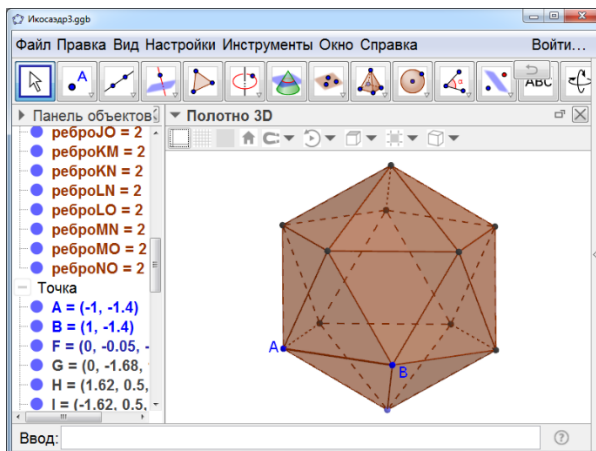


Рис. 1.24

**Инструмент «Додекаэдр»** позволяет получать изображения додекаэдра. Для этого нужно выбрать две точки (вершины додекаэдра), например, *A* и *B*. В строке «Ввод» написать «Додекаэдр[*A*, *B*]» и нажать «Enter». На рисунке 1.25 показан пример такого додекаэдра.

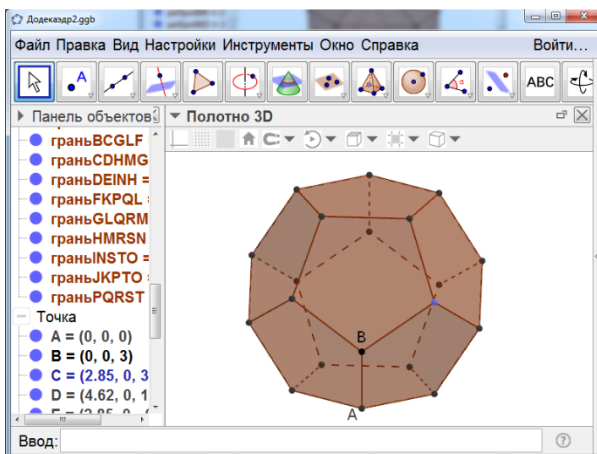


Рис. 1.25

Инструмент «Развёртка» позволяет получать развёртку многогранника. Для этого нужно левой кнопкой мыши указать многогранник. На рисунке 1.26 показана развёртка куба.

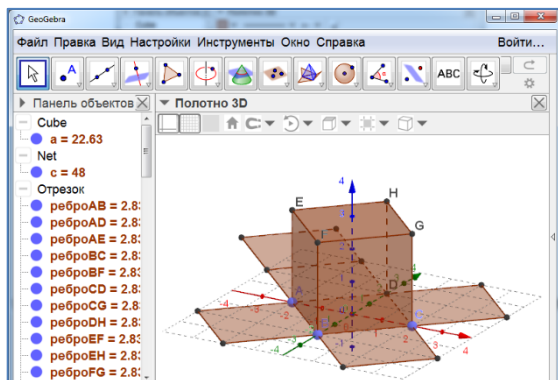


Рис. 1.26

Десятым слева находится окошко с изображением сферы и точки. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.27), которые позволяют получать изображение сферы по центру и точке или по центру и радиусу.

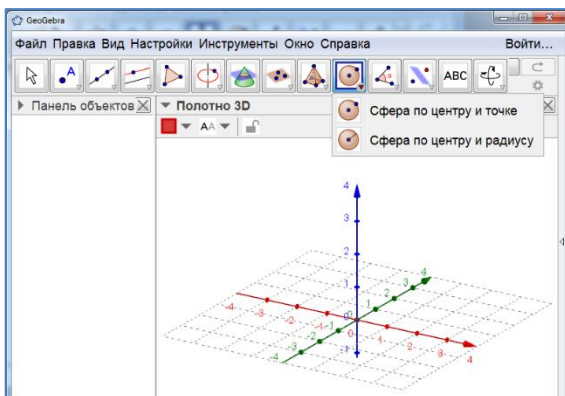


Рис. 1.27

На рисунке 1.28 показан пример изображения сферы.

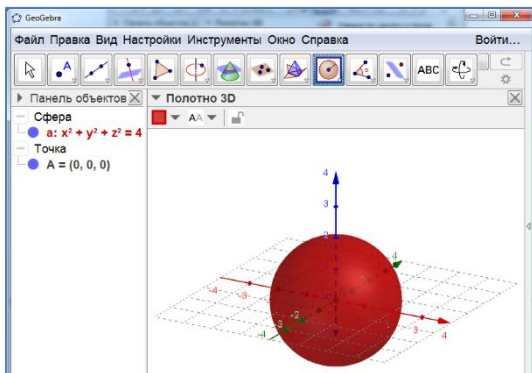


Рис. 1.28

Двенадцатым слева находится окошко с изображением плоскости и двух точек. Если нажать на него левой кнопкой мыши, то откроются дополнительные окошки с инструментами (рис. 1.29), которые позволяют получать фигуру, симметричную данной относительно плоскости, прямой или точки, а также поворачивать, параллельно переносить и получать фигуру, гомотетичную данной.

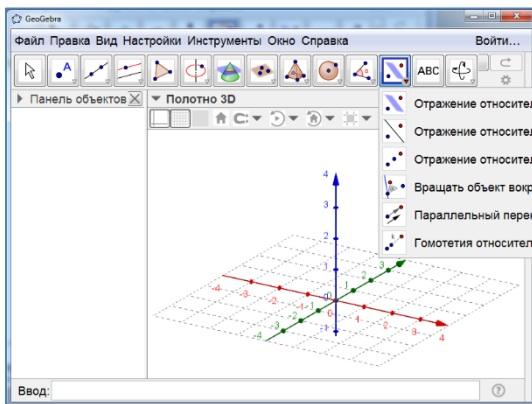


Рис. 1.29

Инструмент «**Вращать объект вокруг точки**» позволяет изобразить фигуру, полученную из данной поворотом на данный угол. На рисунке 1.30 показан куб и другой куб, полученный из первого поворотом на  $60^\circ$  вокруг прямой, содержащей диагональ куба. Для этого нужно изобразить фигуру, например куб (рис. 1.30), провести прямую, которая будет осью поворота. Затем левой кнопкой мыши указать фигуру и ось поворота. Откроется окно, в котором нужно указать величину угла поворота и нажать «Enter». На рисунке 1.30 показан результат такого действия.

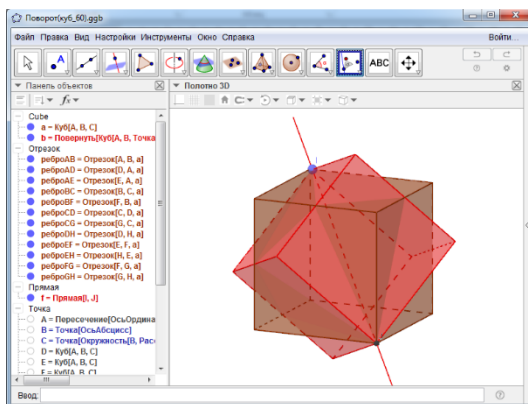


Рис. 1.30

Этот инструмент можно использовать для создания анимации вращения фигуры. Для этого нужно изобразить фигуру, например куб (рис. 1.96). Провести прямую, которая будет осью вращения. Создать ползунок, в котором угол  $\alpha$  изменяется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .левой кнопкой мыши указать фигуру и ось вращения. Откроется окно, в котором, в качестве угла поворота нужно указать  $\alpha$ . После этого нажать правой кнопкой мыши на ползунок и запустить анимацию. Фигура будет вращаться вокруг указанной прямой. На рисунке 1.31 показан результат такого вращения куба вокруг прямой, содержащей его диагональ.

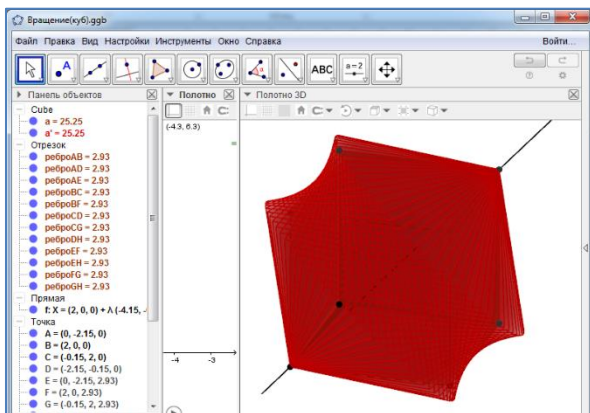


Рис. 1.31

Инструмент «**Параллельный перенос по вектору**» позволяет изобразить фигуру, полученную из данной параллельным переносом на данный вектор. На рисунке 1.32 показан куб, полученный из куба ABCDEFGH параллельным переносом на вектор  $\overrightarrow{AF}$ .

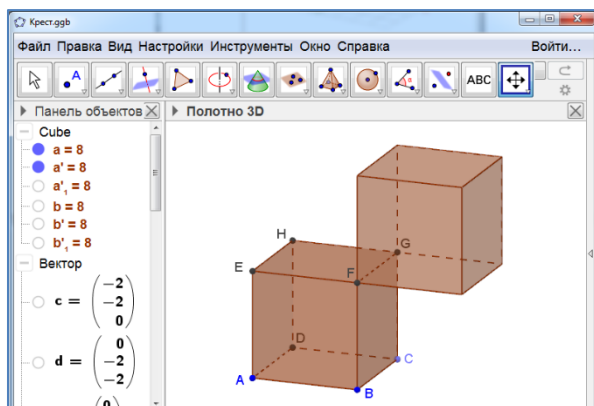


Рис. 1.32

Наконец, последнее окошко содержит инструменты, позволяющие вращать, перемещать, увеличивать и уменьшать объекты (рис. 1.33).

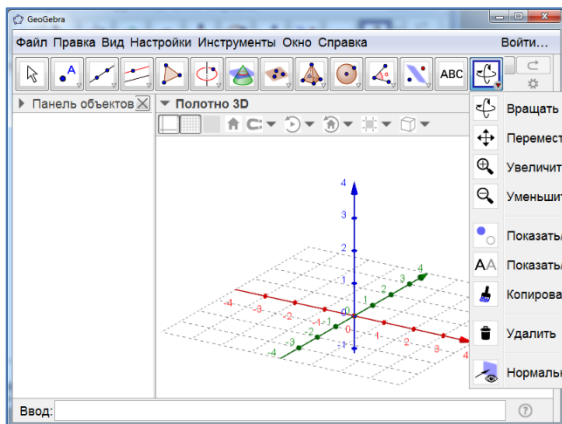


Рис. 1.33

## 2. МНОГОГРАННИКИ

### ПРАВИЛЬНАЯ ТРЕУГОЛЬНАЯ ПРИЗМА

В полотне 2D строим правильный треугольник (рис. 2.1).

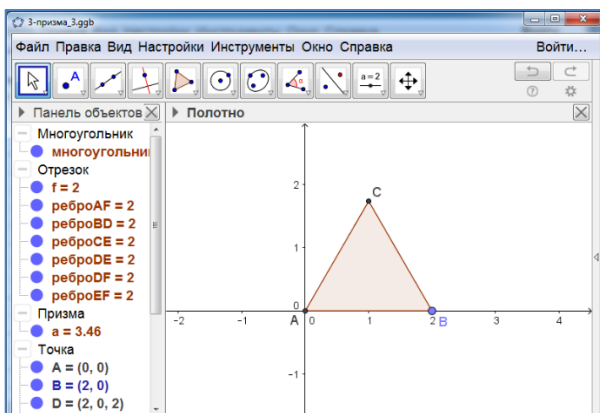


Рис. 2.1

Перейдём на полотно 3D и с помощью инструмента «Призма» строим правильную треугольную призму (рис. 2.2).

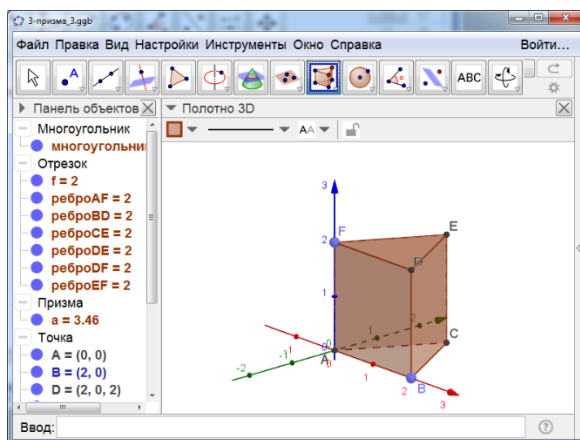


Рис. 2.2

С помощью инструмента «Развёртка» можно получить развёртку этой пирамиды. Для этого нужно просто указать левой кнопкой мыши на эту пирамиду (рис.2.3).

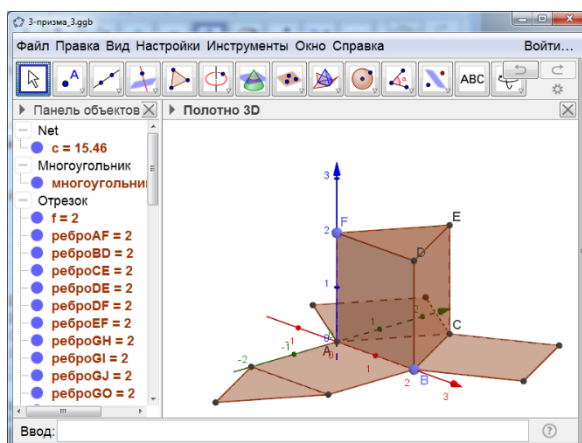


Рис. 2.3

## ПРАВИЛЬНАЯ ШЕСТИУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

В полотне 2D строим правильный шестиугольник (рис. 2.4).

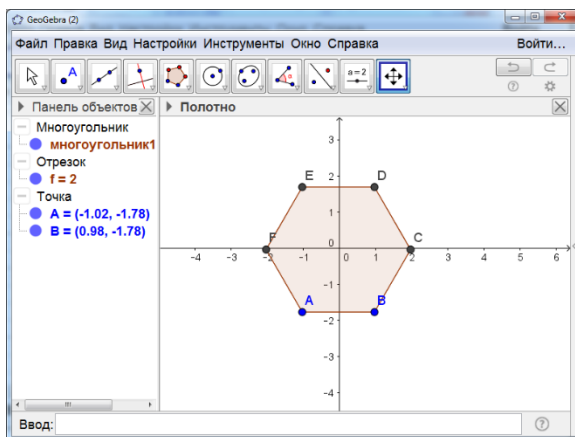


Рис. 2.4

Перейдём на полотно 3D и с помощью инструмента «Пирамида» строим правильную шестиугольную пирамиду (рис. 2.5).

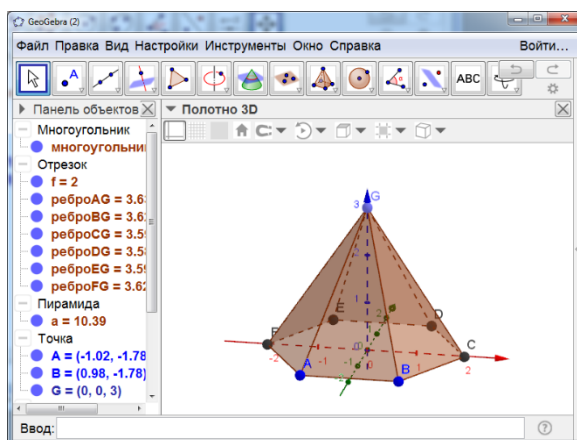


Рис. 2.5



С помощью инструмента «Развёртка» можно получить развёртку этой пирамиды. Для этого нужно просто указать левой кнопкой мыши на эту пирамиду (рис. 2.6).

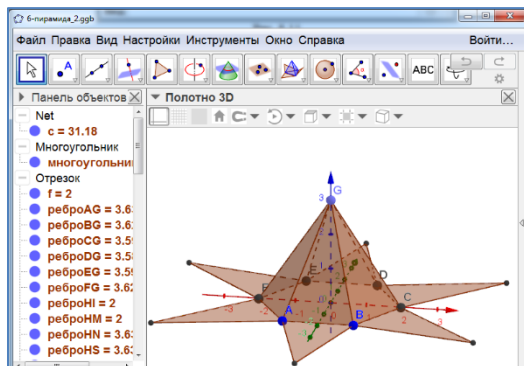


Рис. 2.6

## ШЕСТИУГОЛЬНАЯ НЕВЫПУКЛАЯ ПРИЗМА

В строке «Ввод» наберём  $A=(0,0,0)$  и нажмем «Enter». На полотне появится точка  $A(0,0,0)$ . Аналогичным образом построим точки,  $B(2,0,0)$ ,  $C(2,0,1)$ ,  $D(1,0,1)$ ,  $E(1,0,2)$ ,  $F(0,0,2)$ .

Построим шестиугольник  $ABCDEF$ . С помощью инструмента «Призма» построим шестиугольную призму (рис. 2.7).

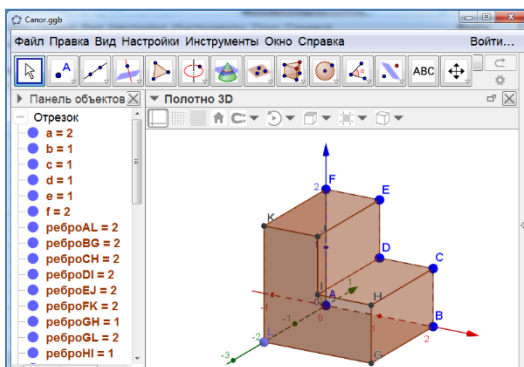


Рис. 2.7

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ КРЕСТ

В строке «Ввод» наберём  $A=(-1,-1,-1)$  и нажмем «Enter». На полотне появится точка  $A(-1,-1,-1)$ . Аналогичным образом построим точку  $B(1,-1,-1)$ . Построим куб с вершинами  $A, B$ . С помощью инструмента «Параллельный перенос» построим шесть кубов. Получим пространственный крест, состоящий из семи кубов (рис. 2.8).

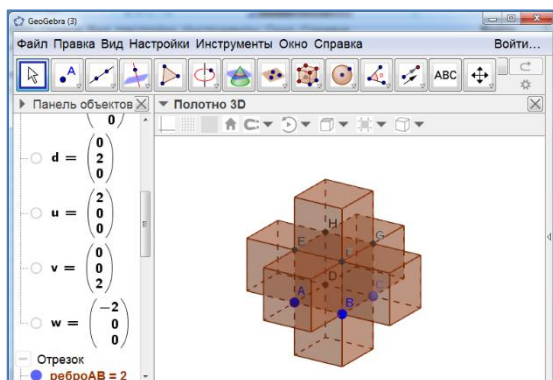


Рис. 2.8

**Задача 1.** Является ли призма, изображённая на рисунке 2.9, прямой.

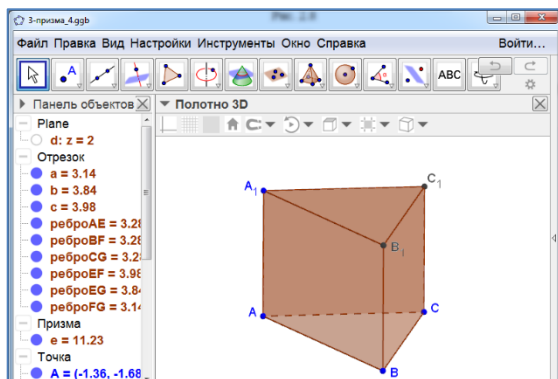


Рис. 2.9

**Задача 2.** Получите изображение наклонной треугольной призмы.

**Задача 3.** Получите изображение правильной пятиугольной призмы и её развёртки.

**Задача 4.** Получите изображение правильной треугольной пирамиды и её развёртки.

**Задача 5.** Получите изображение прямоугольного параллелепипеда с вершинами  $A(0,0,0)$ ,  $B(3,0,0)$ ,  $C(3,2,0)$ ,  $D(0,2,0)$ ,  $A_1(0,0,2)$ .

**Задача 6.** Получите изображение призмы, основанием которой является восьмиугольник с вершинами  $A(-2,1,0)$ ,  $B(2,1,0)$ ,  $C(2,1,1)$ ,  $D(1,1,1)$ ,  $E(1,1,2)$ ,  $F(-1,1,2)$ ,  $G(-1,1,1)$ ,  $H(-2,1,1)$ .

**Задача 7.** Укажите способ получения многогранника, изображённого на рисунке 2.10.

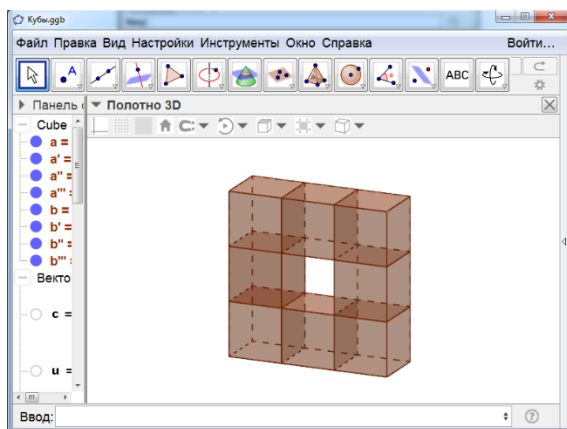


Рис. 2.10

**Задача 8.** Укажите способ, которым можно получить пятиугольную антипризму – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.11, гранями которого два пятиугольника (основания) и десять правильных треугольников (боковая поверхность).

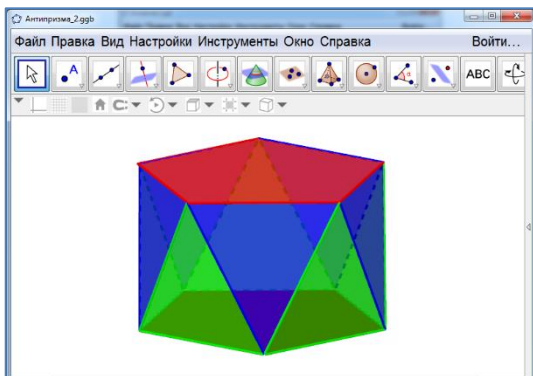


Рис. 2.11

**Задача 9.** Укажите способ, которым из куба можно получить кубооктаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.12, гранями которого являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра.

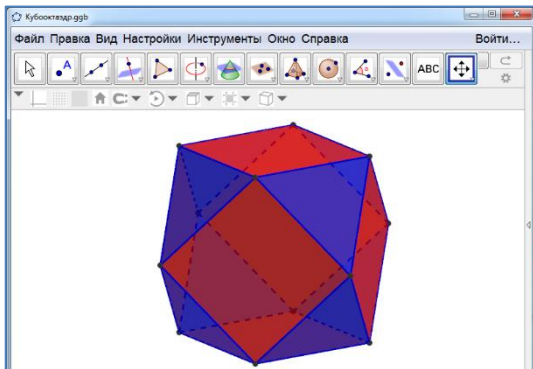


Рис. 2.12

**Задача 10.** Укажите способ, которым из додекаэдра можно получить икосододекаэдр – полуправильный многогранник, изображённый

на рисунке 2.13, гранями которого являются двадцать правильных треугольников, как у икосаэдра, и двенадцать правильных пятиугольников, как у додекаэдра.

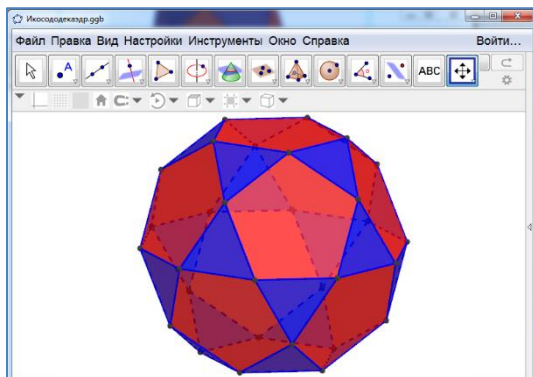


Рис. 2.13

**Задача 11.** Укажите способ, которым из тетраэдра можно получить усечённый тетраэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.14, гранями которого являются четыре правильных треугольника и четыре правильных шестиугольника.

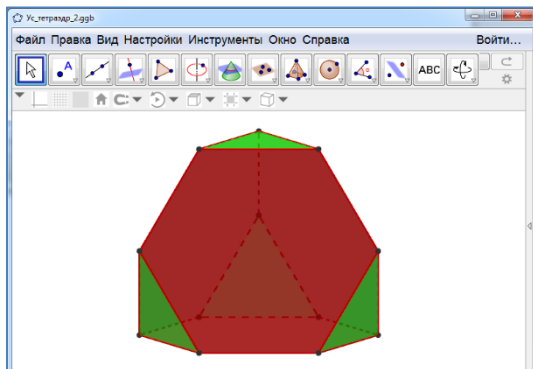


Рис. 2.14

**Задача 12.** Укажите способ, которым из октаэдра можно получить усечённый октаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.15, гранями которого являются шесть квадратов и восемь правильных шестиугольников.

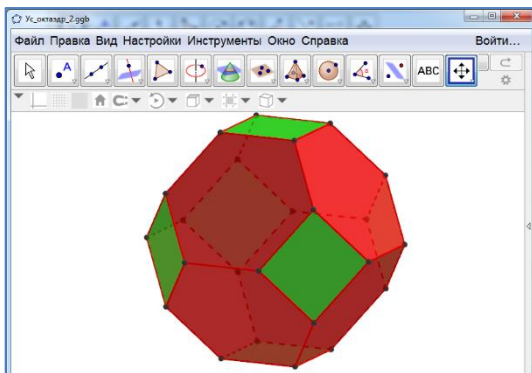


Рис. 2.15

**Задача 13.** Укажите способ, которым из икосаэдра можно получить усечённый икосаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.16, гранями которого являются двенадцать правильных пятиугольников и двадцать правильных шестиугольников.

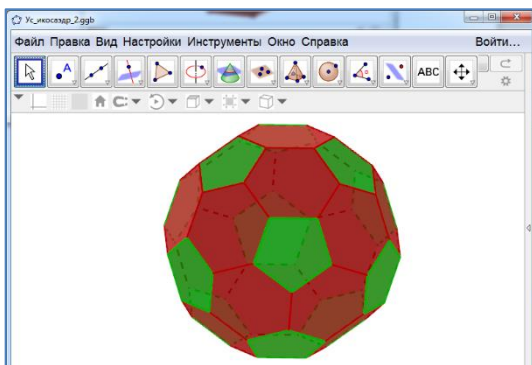


Рис. 2.16

**Задача 14.** Укажите способ, которым из додекаэдра можно получить усечённый додекаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.17, гранями которого являются двадцать правильных треугольников и двенадцать правильных десятиугольников.

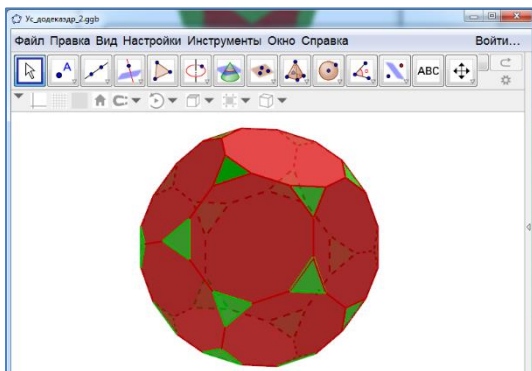


Рис. 2.17

**Задача 15.** Грань тетраэдра параллельно перенесли от его центра на векторы, перпендикулярные этим граням (рис. 2.18). Вершины какого полуправильного многогранника можно получить таким образом, при подходящем выборе длин векторов?

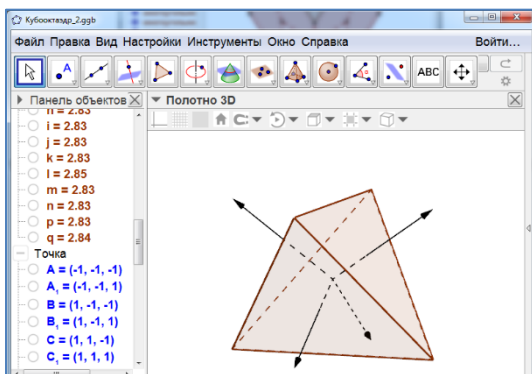


Рис. 18

**Задача 16.** Укажите способ, которым из куба можно получить ромбокубооктаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.19, гранями которого являются шесть квадратов, как у куба, восемь правильных треугольников, как у октаэдра, и двенадцать квадратов, которые считаются ромбами.

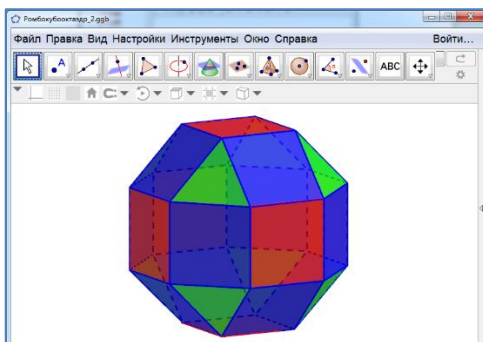


Рис. 2.19

**Задача 17.** Укажите способ, которым из додекаэдра можно получить ромбоикосододекаэдр – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.20, гранями которого являются двадцать правильных треугольников, как у икосаэдра, двенадцать правильных пятиугольников, как у додекаэдра, и тридцать квадратов, которые считаются ромбами.

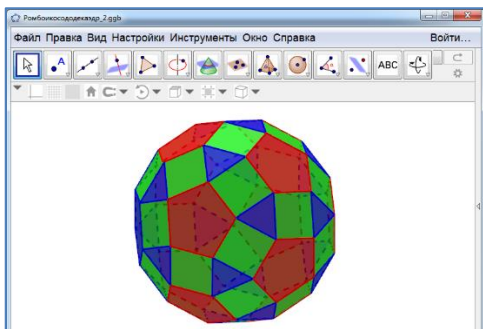


Рис. 2.20



**Задача 18.** Укажите способ, которым из куба можно получить курносый куб – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.21. Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и тридцать два правильных треугольника.

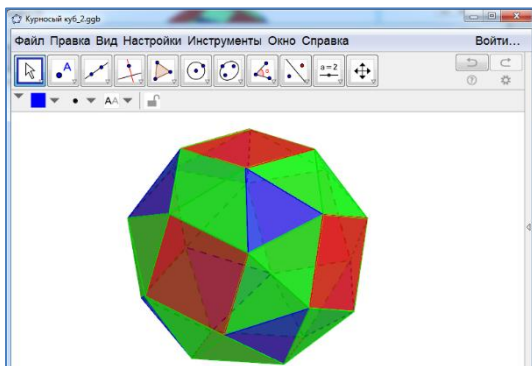


Рис. 2.21

**Задача 19.** Укажите способ, которым из додекаэдра можно получить курносый додекаэдра – полуправильный многогранник, изображённый на рисунке 2.22. Его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, как у додекаэдра, и восемьдесят правильных треугольников.

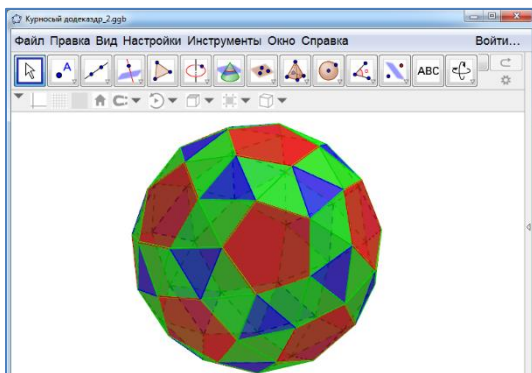


Рис. 2.22

**Задача 20.** Укажите способ, которым из додекаэдра можно получить малый звёздчатый додекаэдр – правильный звёздчатый многогранник, изображённый на рисунке 2.23. Его гранями являются двенадцать правильных звёздчатых пятиугольников.

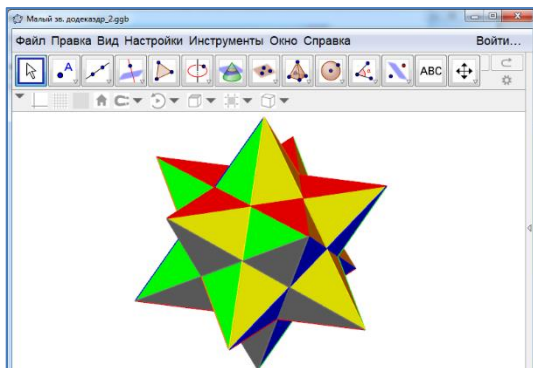


Рис. 2.23

**Задача 21.** Укажите способ, которым из икосаэдра можно получить большой звёздчатый додекаэдр - правильный звёздчатый многогранник, изображённый на рисунке 2.24. Его гранями являются двенадцать правильных звёздчатых пятиугольников.

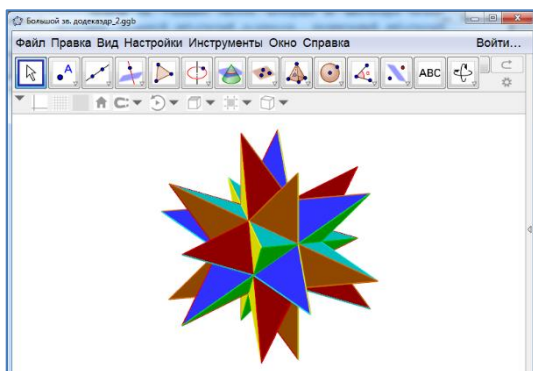


Рис. 2.24

**Задача 22.** Укажите способ, которым из икосаэдра можно получить большой додекаэдр – правильный звёздчатый многогранник, изображённый на рисунке 2.25. Его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников.

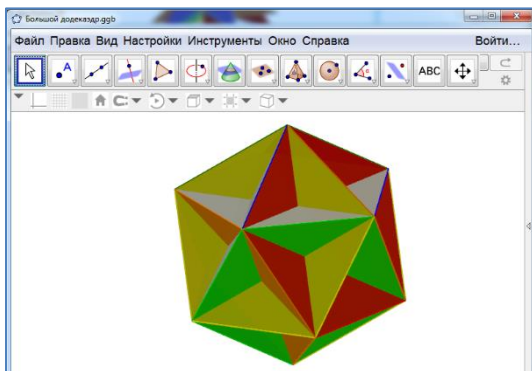


Рис. 2.25

**Задача 23.** Укажите способ, которым из икосаэдра можно получить большой икосаэдр – правильный звёздчатый многогранник, изображённый на рисунке 2.26. Его гранями являются двадцать правильных треугольников.

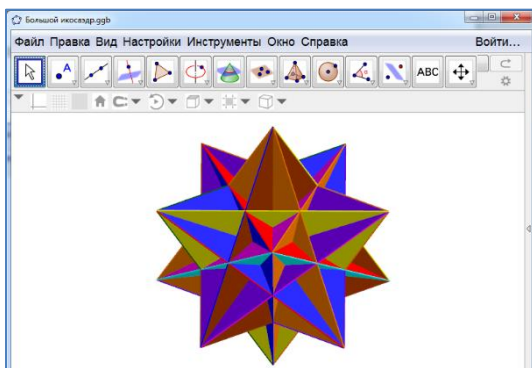


Рис. 2.26

### 3. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим задачи на расположение прямых в пространстве и нахождения углов между ними.

**Задача 1.** Как в пространстве расположены прямые  $AB_1$  и  $BC_1$ , изображённые на рисунке 3.1, проходящие через вершины куба?

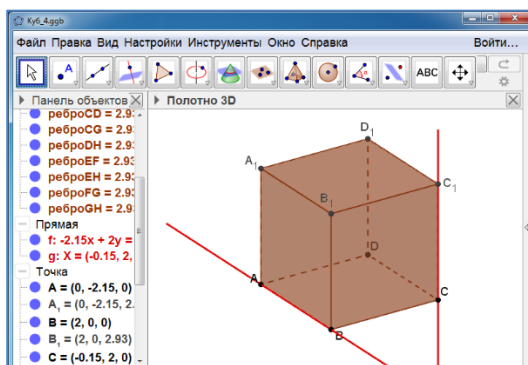


Рис. 3.1

**Задача 2.** Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $CD_1$ , изображёнными на рисунке 3.2, проходящими через вершины куба.

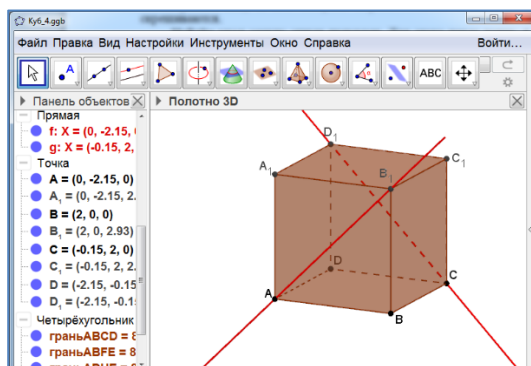


Рис. 3.2

**Задача 3.** Найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $CC_1$ , изображёнными на рисунке 3.3, проходящими через вершины куба.

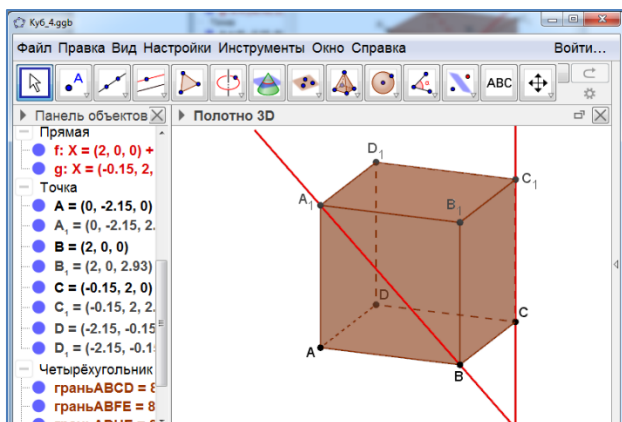


Рис. 3.3

**Задача 4.** Как в пространстве расположены прямые  $AB_1$  и  $BC$ , изображённые на рисунке 3.4, проходящие через вершины куба?

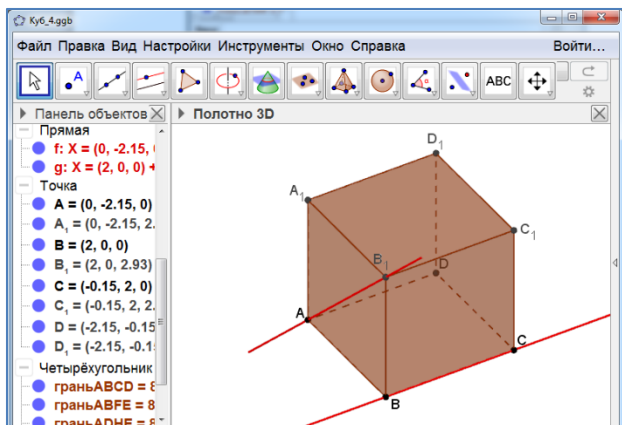


Рис. 3.4

**Задача 5.** Как в пространстве расположены прямые  $AB_1$  и  $BC_1$ , изображённые на рисунке 3.5, проходящие через вершины куба?

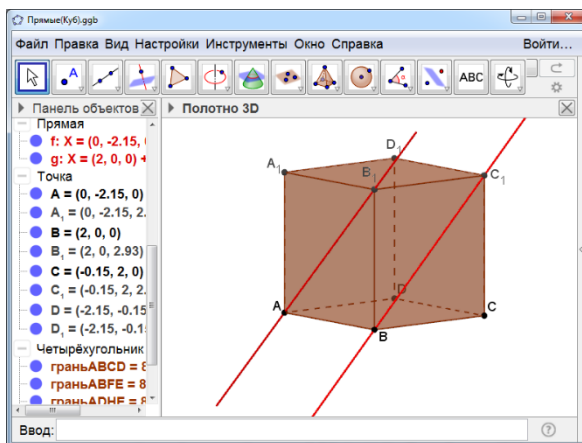


Рис. 3.5

**Задача 6.** Как в пространстве расположены прямые  $AC_1$  и  $BD$ , изображённые на рисунке 3.6, проходящие через вершины куба?

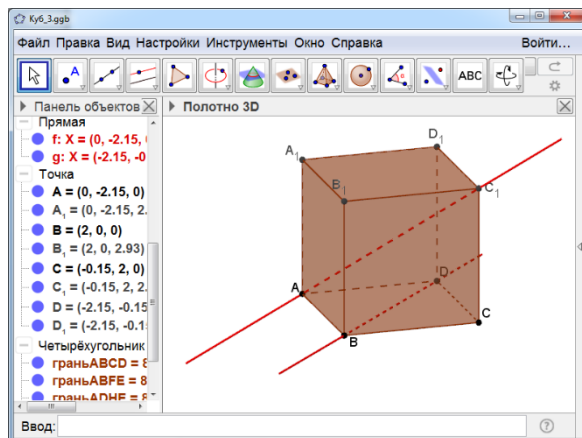


Рис. 3.6

**Задача 7.** Как в пространстве расположены прямые  $AC_1$  и  $BD$ , изображённые на рисунке 3.7, проходящие через вершины правильного тетраэдра?

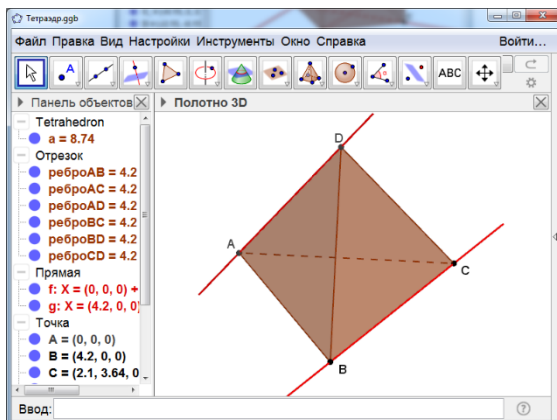


Рис. 3.7

**Задача 8.** Как в пространстве расположены отрезки  $ED$  и  $BF$ , изображённые на рисунке 3.8, проходящие через вершины и середины рёбер правильного тетраэдра?

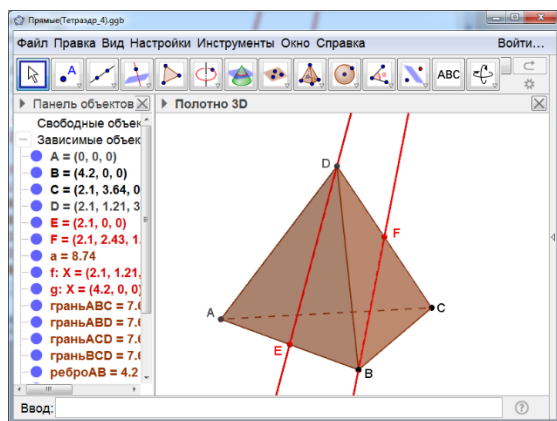


Рис. 3.8

**Задача 9.** Как в пространстве расположены отрезки  $EF$  и  $FG$ , изображённые на рисунке 3.9, соединяющие середины рёбер правильного тетраэдра?

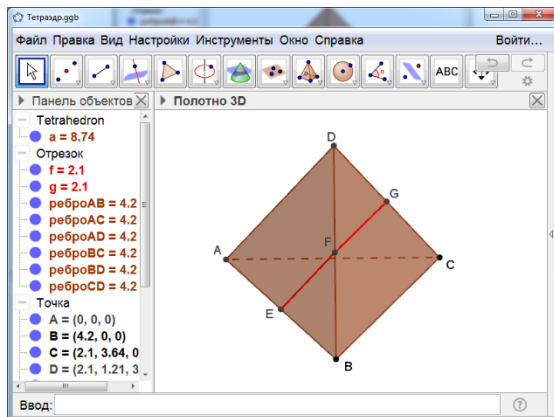


Рис. 3.9

**Задача 10.** Найдите угол между прямыми  $AS$  и  $BC$ , изображёнными на рисунке 3.10, проходящими через вершины правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 1.

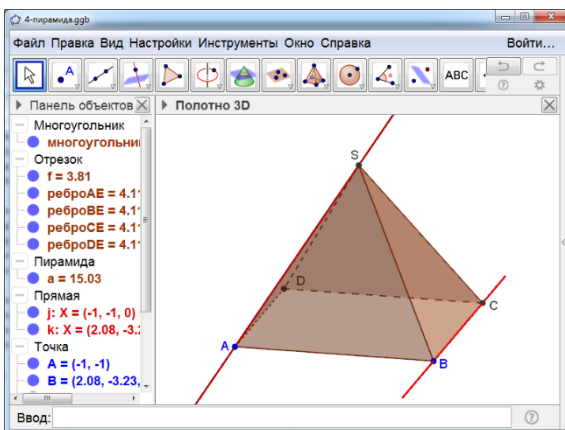


Рис. 3.10



**Задача 11.** Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $CD$ , изображёнными на рисунке 3.11, проходящими через середину  $E$  ребра  $AS$  и вершины правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 1.

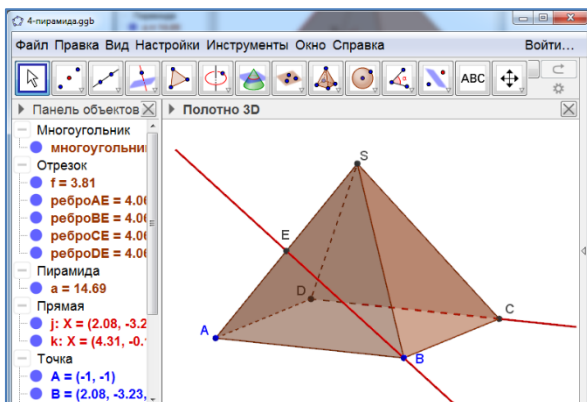


Рис. 3.11

**Задача 12.** Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $A_1C_1$ , изображёнными на рисунке 3.12, проходящими через вершины правильной треугольной призмы.

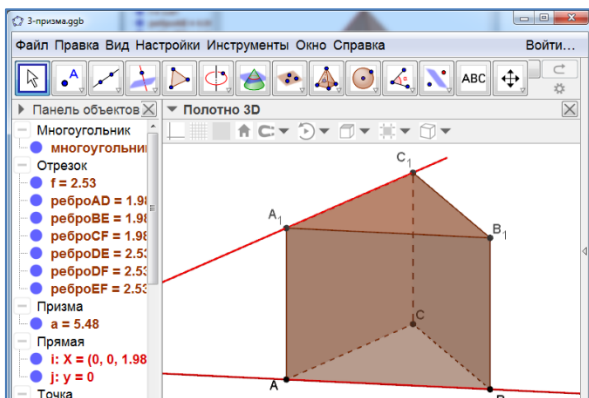


Рис. 3.12

**Задача 13.** Найдите угол между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ , изображёнными на рисунке 3.13, проходящими через вершины правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1.

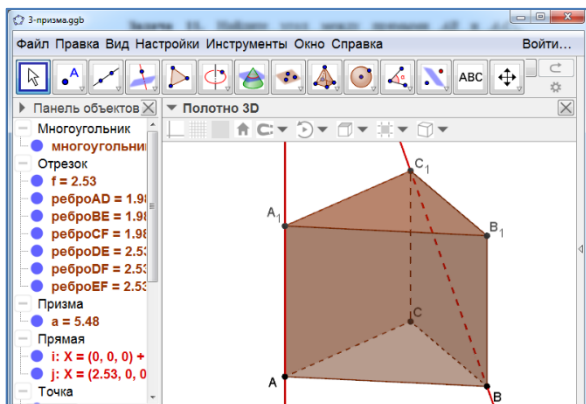


Рис. 3.13

**Задача 14.** Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $B_1C_1$ , изображёнными на рисунке 3.14, проходящими через вершины правильной шестиугольной призмы.

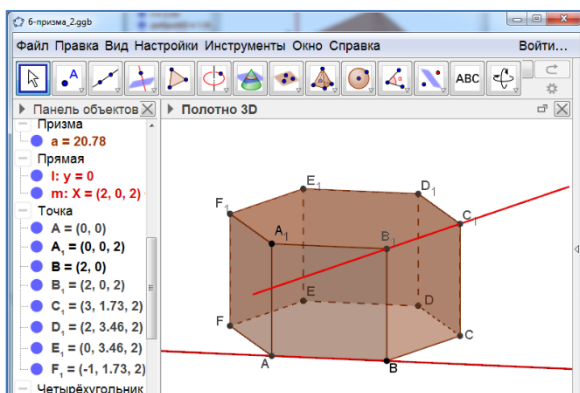


Рис. 3.14

**Задача 15.** Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $B_1C_1$ , изображёнными на рисунке 3.15, проходящими через вершины правильной шестиугольной призмы.

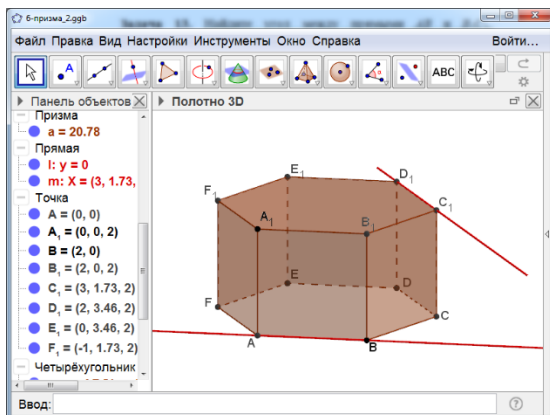


Рис. 3.15

**Задача 16.** Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $B_1C_1$ , изображёнными на рисунке 3.16, проходящими через вершины правильной шестиугольной призмы.

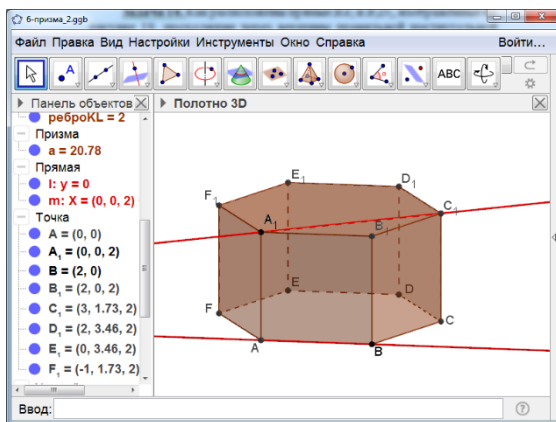


Рис. 3.16

**Задача 17.** Как расположены прямые  $BA_1$  и  $B_1D_1$ , изображённые на рисунке 3.17, проходящие через вершины правильной шестиугольной призмы.

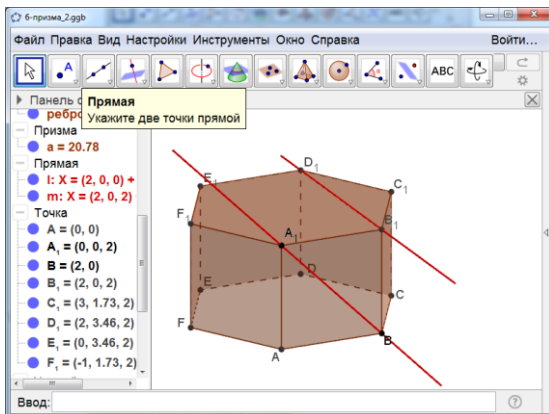


Рис. 3.17

**Задача 18.** Как расположены прямые  $SA$  и  $BC$ , изображённые на рисунке 3.18, проходящие через вершины правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2?

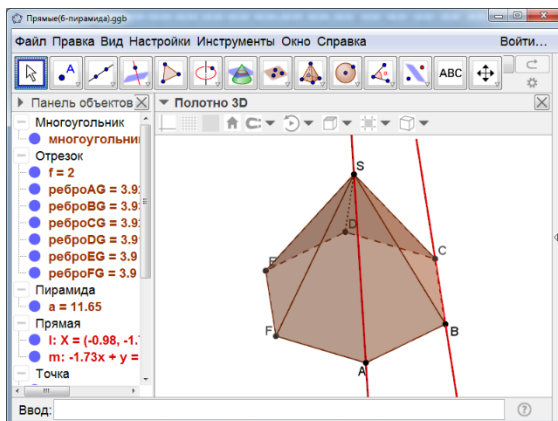


Рис. 3.18

**Задача 19.** Как расположены прямые  $SA$  и  $CE$ , изображённые на рисунке 3.19, проходящие через вершины правильной шестиугольной пирамиды?

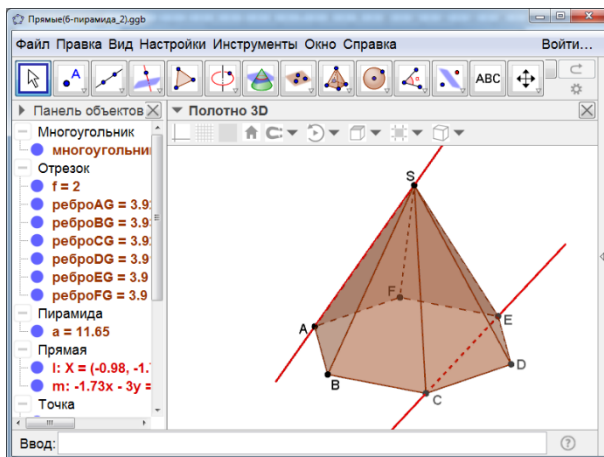


Рис. 3.19

**Задача 20.** Как расположены прямые  $DA$  и  $BC$ , проходящие через вершины октаэдра (рис. 3.20).

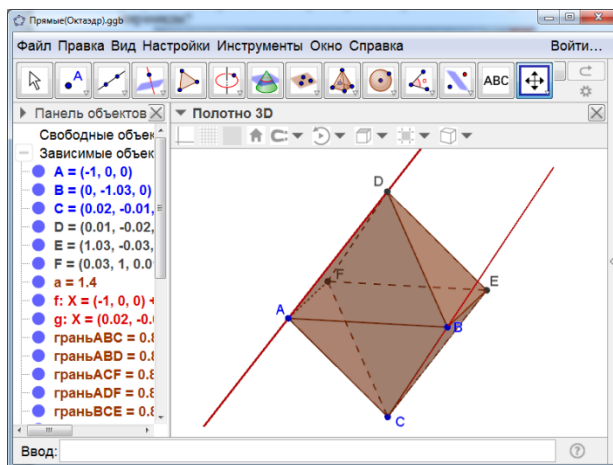


Рис. 3.20

**Задача 21.** Как расположены прямые  $DB$  и  $MC$ , проходящие через вершины икосаэдра (рис. 3.21).

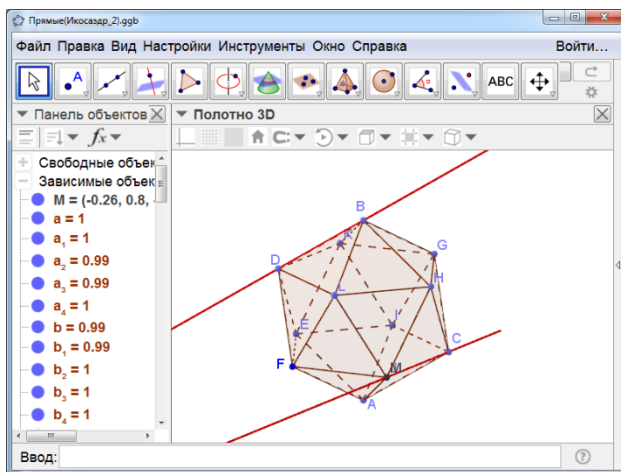


Рис. 3.21

**Задача 22.** Как расположены прямые  $DB$  и  $LH$ , проходящие через вершины икосаэдра (рис. 3.22).

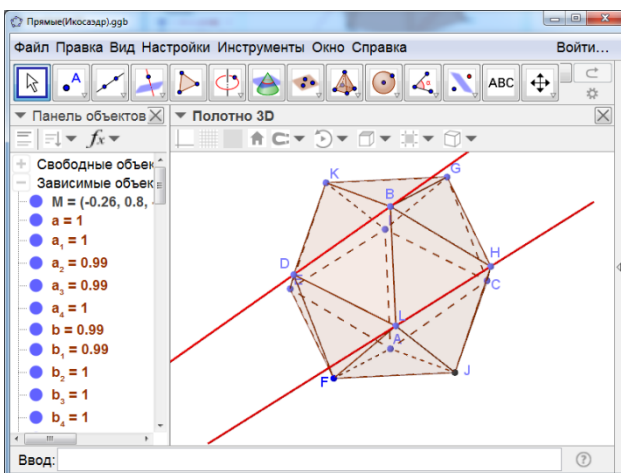


Рис. 3.21

**Задача 23.** Как расположены прямые  $AP$  и  $SC$ , проходящие через вершины додекаэдра (рис. 3.23).

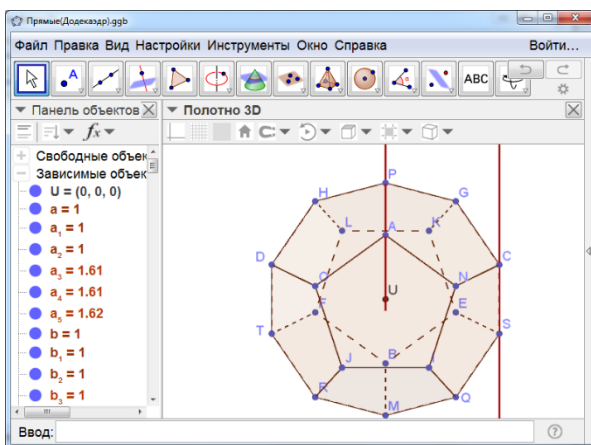


Рис. 3.23

**Задача 24.** Как расположены прямые  $AP$  и  $GK$ , проходящие через вершины додекаэдра (рис. 3.24).

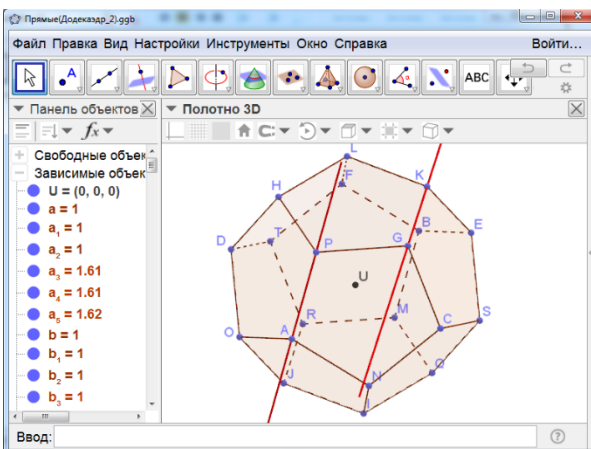


Рис. 3.24

**Задача 25.** Через вершину  $A_1$  куба проведите прямую, перпендикулярную плоскости  $AB_1D_1$ .

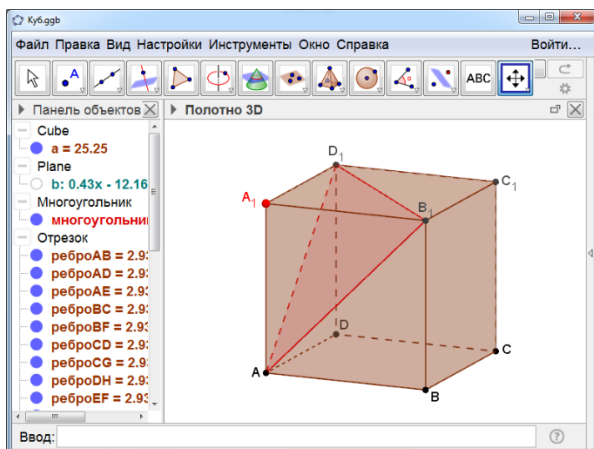


Рис. 3.25

**Задача 26.** Через вершину  $A_1$  проведите плоскость, перпендикулярную прямой  $BD_1$  (рис. 3.26).

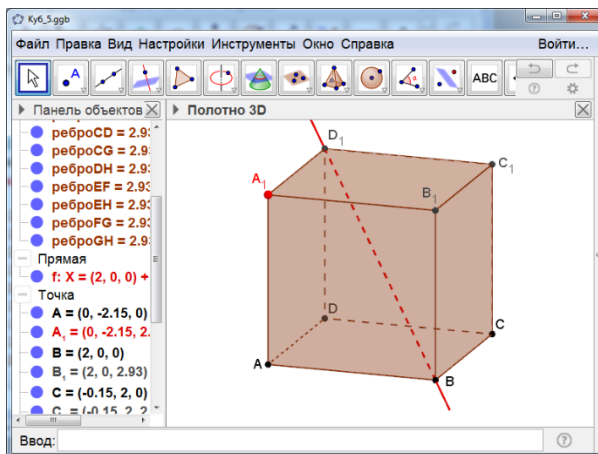


Рис. 3.26



**Задача 27.** Для куба (рис. 3.27) найдите угол между прямой  $AB_1$  и плоскостью  $ABC_1$ .

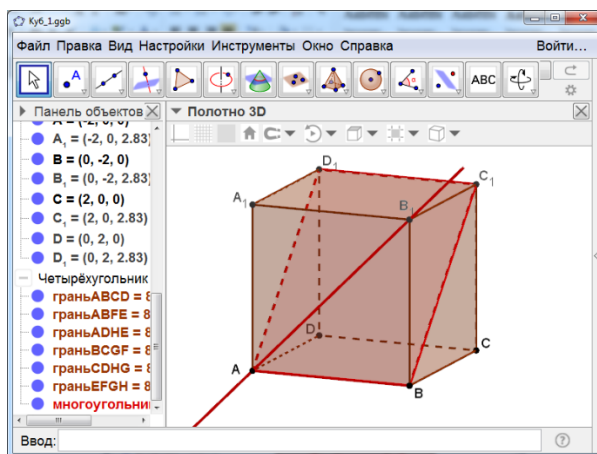


Рис. 3.27

**Задача 28.** Для куба (рис. 3.28) найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $B_1CD_1$ .

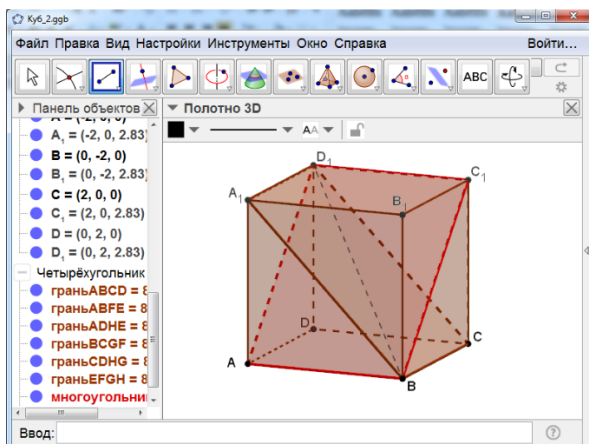


Рис. 3.28

**Задача 29.** На ребре  $AA_1$  куба найдите точки, из которых отрезок  $BD_1$  виден под: а) наименьшим углом; б) наибольшим углом (рис. 3.29).

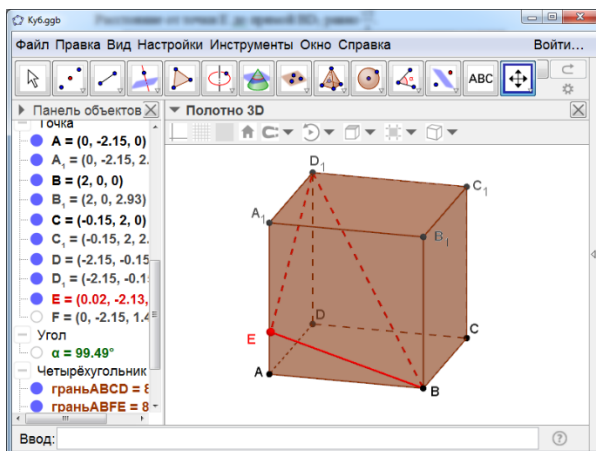


Рис. 3.29

**Задача 30.** Найдите приближённое значение градусной величины двугранного угла правильного тетраэдра (рис. 3.30).

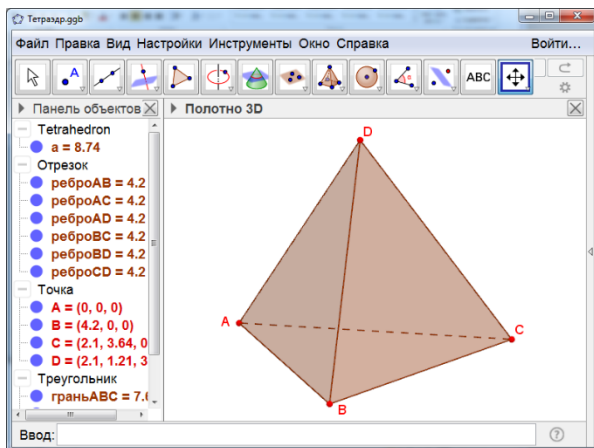


Рис. 3.30

**Задача 31.** Найдите приближённое значение градусной величины двугранного угла октаэдра (рис. 3.31).

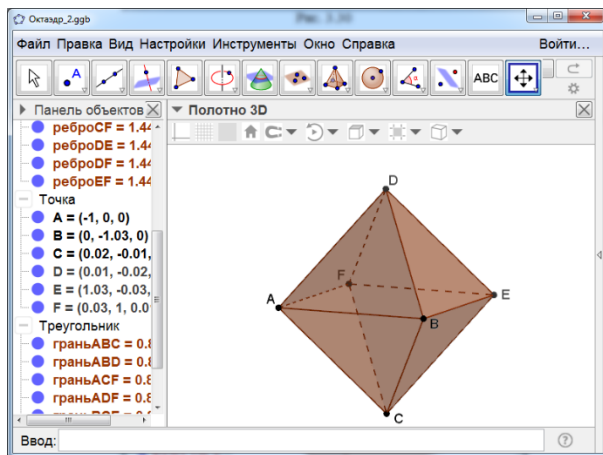


Рис. 3.31

**Задача 32.** Найдите приближённое значение градусной величины двугранного угла икосаэдра (рис. 3.32).

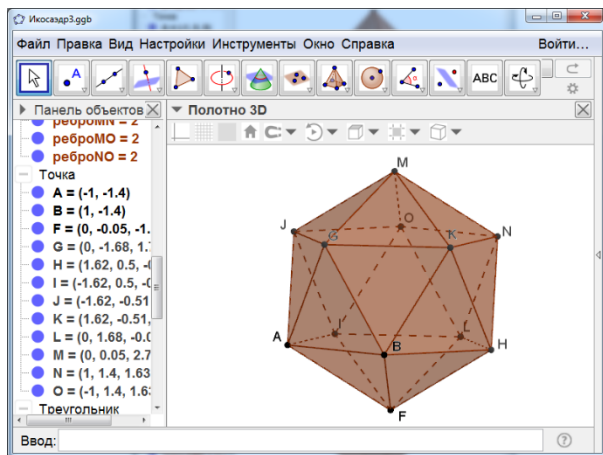


Рис. 3.32

**Задача 33.** Найдите приближённое значение градусной величины двугранного угла додекаэдра (рис. 3.33).

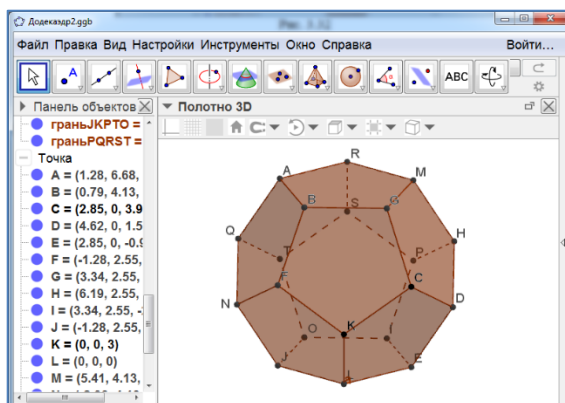


Рис. 3.33

#### 4. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Задача 1.** Опустите перпендикуляр из вершины A единичного куба на прямую  $B_1D_1$ . Найдите расстояние от точки A до прямой  $B_1D_1$  (рис. 4.1).

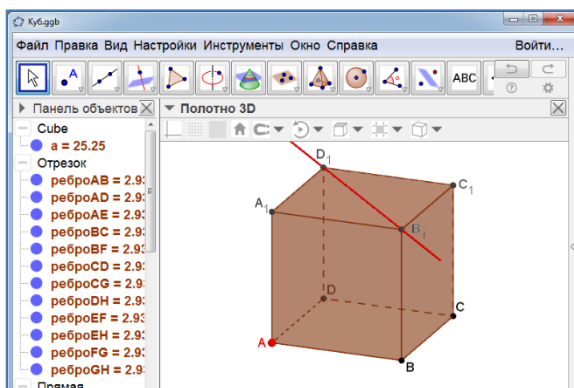


Рис. 4.1

**Задача 2.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  единичного куба на прямую  $BD_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD_1$  (рис. 4.2).

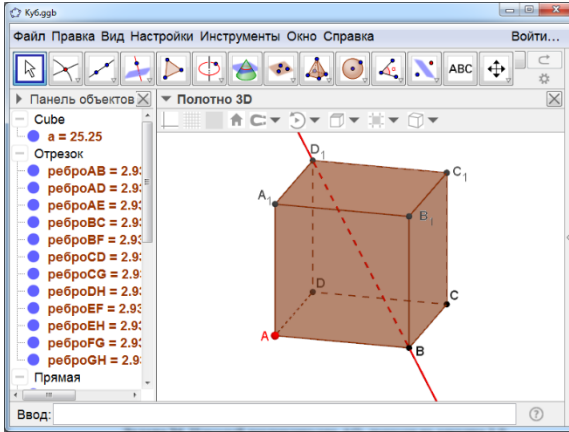


Рис. 4.2

**Задача 3.** Опустите перпендикуляр из середины  $E$  ребра  $AA_1$  единичного куба на прямую  $BD_1$ . Найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $BD_1$  (рис. 4.3).

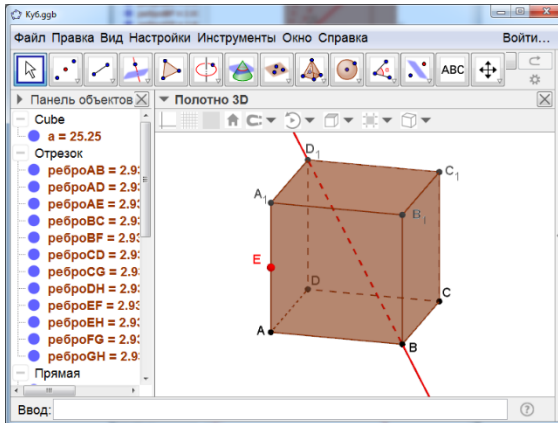


Рис. 4.3

**Задача 4.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $B_1C_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$  (рис. 4.4).

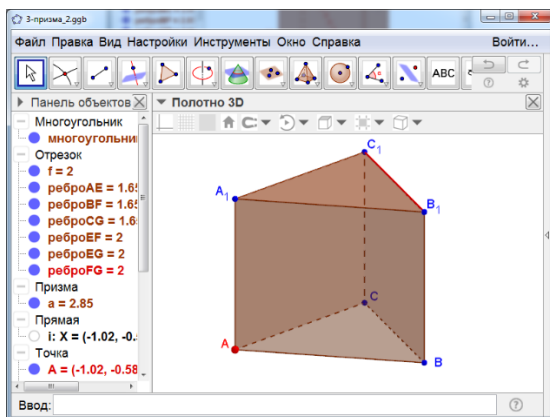


Рис. 4.4

**Задача 5.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $BC_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC_1$  (рис. 4.5).

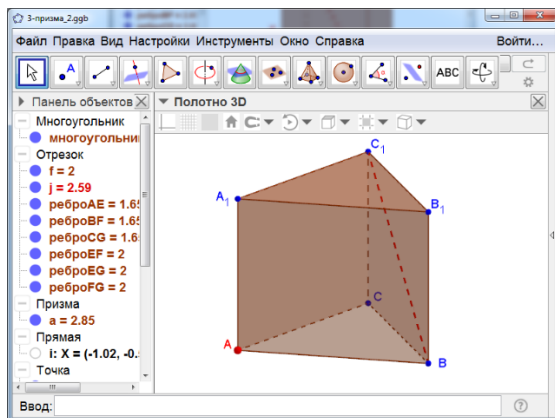


Рис. 4.5

**Задача 6.** Опустите перпендикуляр из середины  $D$  ребра  $AA_1$  единичного куба на прямую  $BC_1$ . Найдите расстояние от точки  $D$  до прямой  $BC_1$  (рис. 4.6).

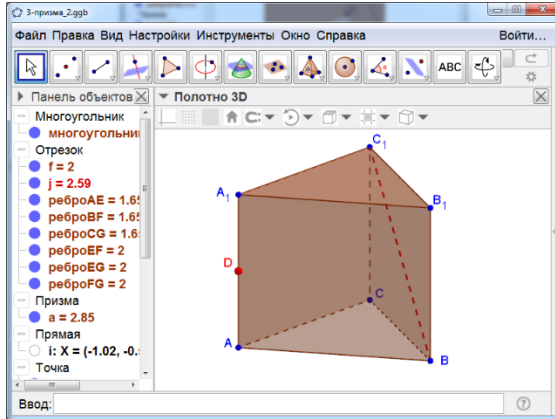


Рис. 4.6

**Задача 7.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $C_1D_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1D_1$  (рис. 4.7).

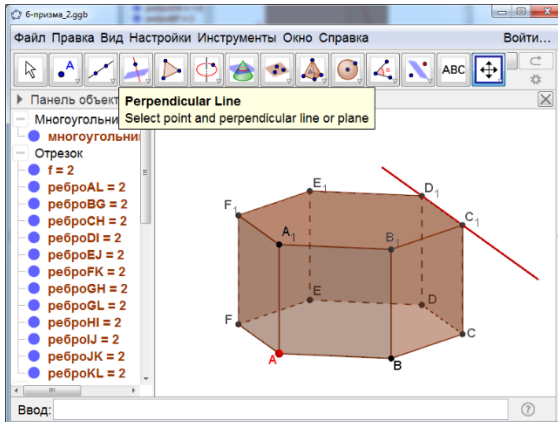


Рис. 4.7

**Задача 8.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $CD_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $CD_1$  (рис. 4.8).

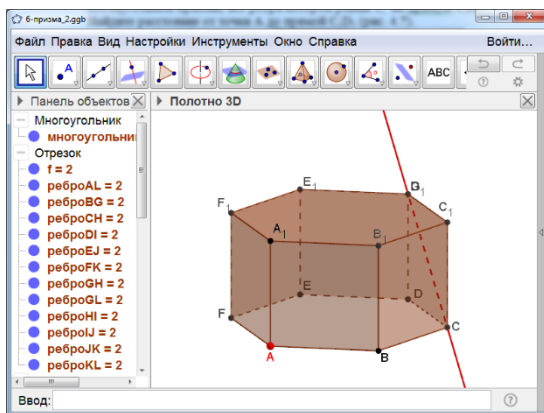


Рис. 4.8

**Задача 9.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $B_1C_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$  (рис. 4.9).

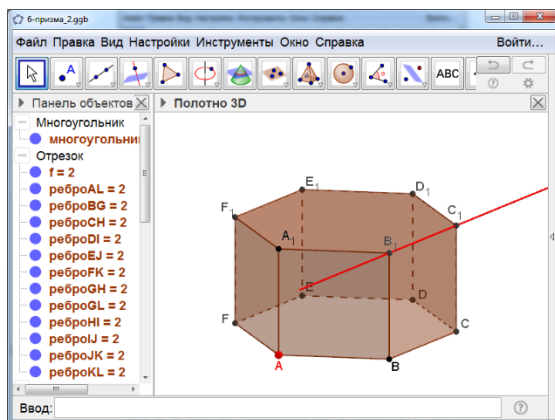


Рис. 4.9



**Задача 10.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на прямую  $BE_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $BE_1$  (рис. 4.10).

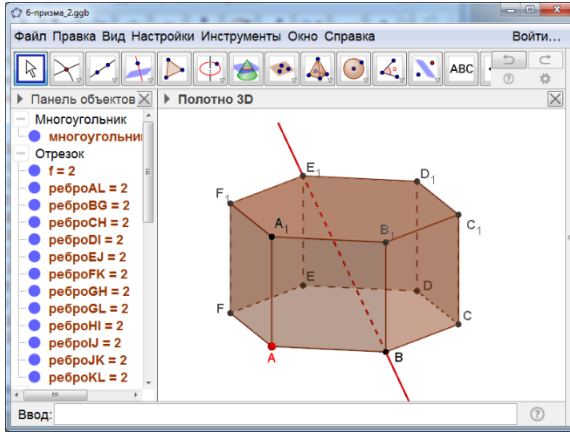


Рис. 4.10

**Задача 11.** Найдите расстояние от вершины  $A_1$  единичного куба до плоскости  $AB_1D_1$  (рис. 4.11).

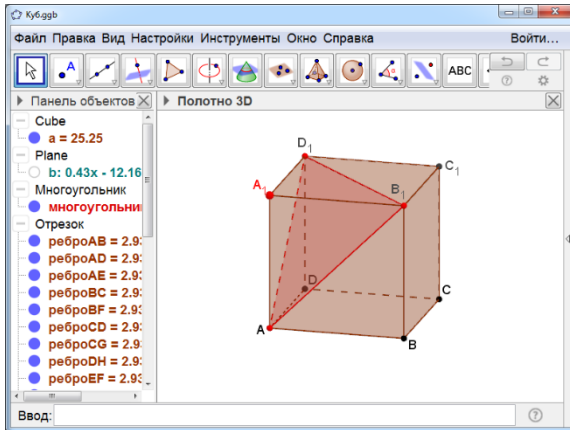


Рис. 4.11

**Задача 12.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A_1$  правильной треугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на плоскость  $AB_1C_1$ . Найдите расстояние от точки  $A_1$  до этой плоскости (рис. 4.12).

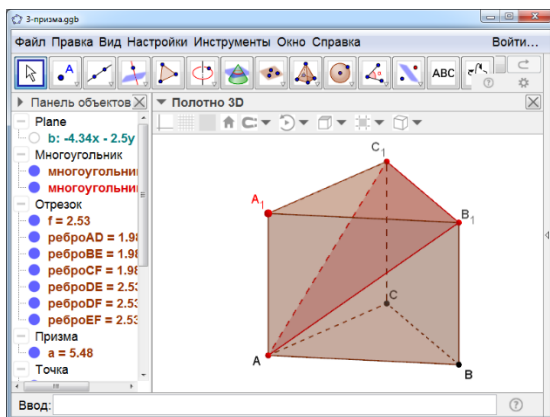


Рис. 4.12

**Задача 13.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на плоскость  $CC_1D_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до этой плоскости (рис. 4.13).

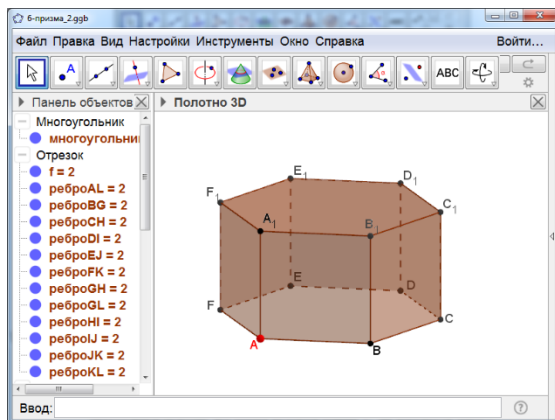


Рис. 4.13

**Задача 14.** Опустите перпендикуляр из вершины  $A$  правильной шестиугольной призмы, все рёбра которой равны 1, на плоскость  $CC_1E_1$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до этой плоскости (рис. 4.14).

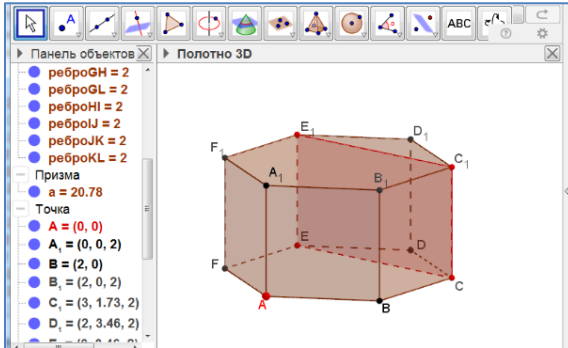


Рис. 4.14

## 5. СЕЧЕНИЯ

**Задача 1.** Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$  (рис. 5.1)

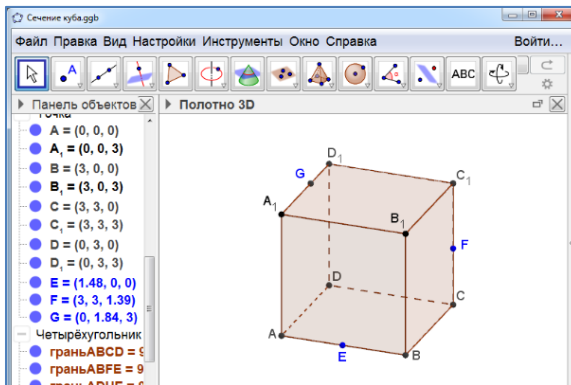


Рис. 5.1

**Задача 2.** Постройте сечение куба, проходящее через данную точку, перпендикулярное данной прямой (рис. 5.2).

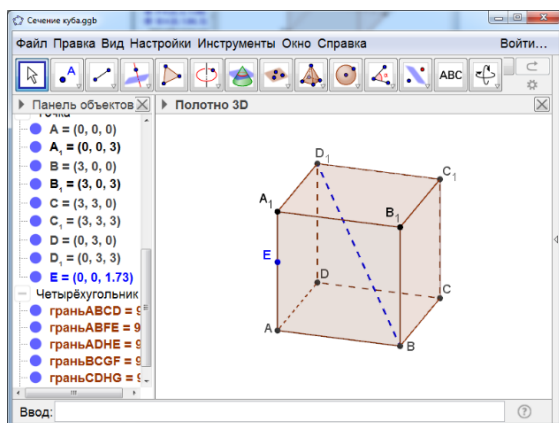


Рис. 5.2

**Задача 3.** Постройте сечение куба, являющееся: а) ромбом; б) трапецией; в) пятиугольником.

**Задача 4.** Постройте сечение правильной треугольной призмы, проходящее через данные точки (рис. 5.3).

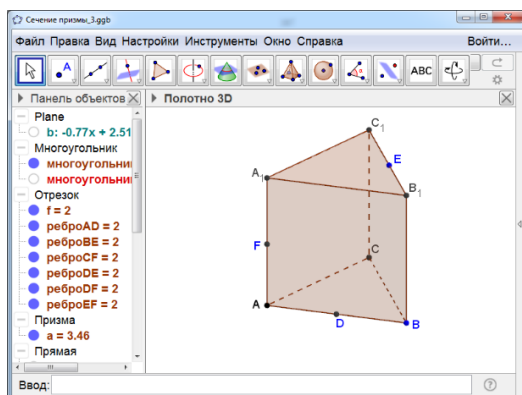


Рис. 5.3

**Задача 5.** Постройте сечение правильного тетраэдра ABCD плоскостью, проходящей середину G ребра CD, перпендикулярной прямой EF, где E, F – середины рёбер AD, BC (рис. 5.4). Какая фигура является сечением?

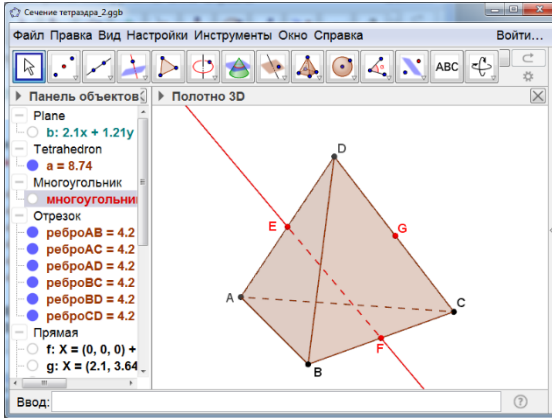


Рис. 5.4

**Задача 6.** Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды, проходящее через данные точки (рис. 5.5).

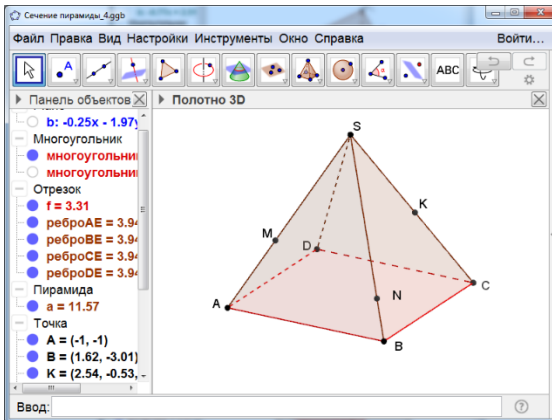


Рис. 5.5

**Задача 7.** Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды, проходящее через данную точку и перпендикулярное прямой SC (рис. 5.6).

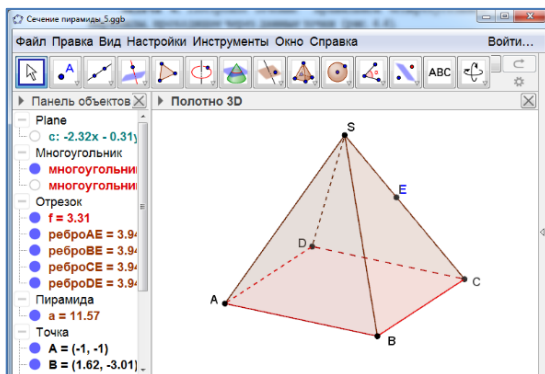


Рис. 5.6

**Задача 8.** Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды, являющееся трапецией.

**Задача 9.** Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды, проходящее через данные точки H, I, J (рис. 5.7).

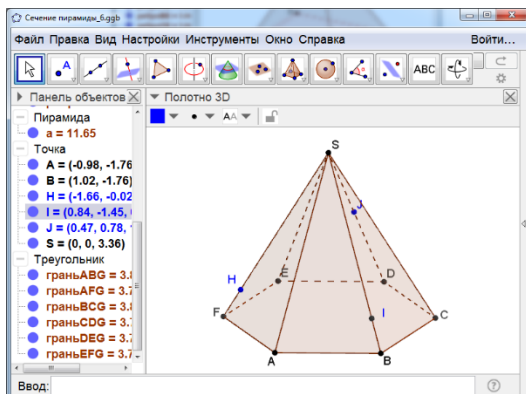


Рис. 5.7

**Задача 10.** Постройте сечение правильной шестиугольной пирамиды, проходящее через данную точку  $G$ , параллельное плоскости  $SAF$  (рис. 5.8).

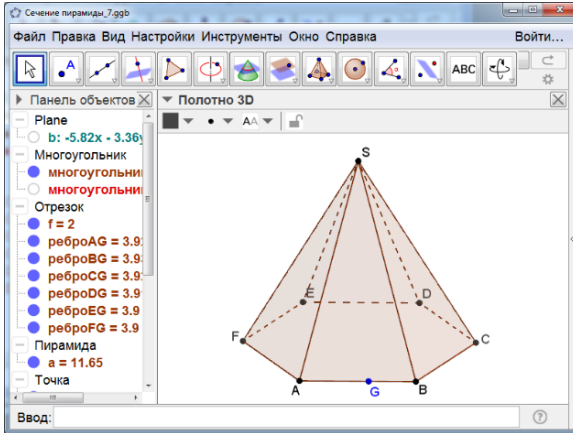


Рис. 5.8

**Задача 11.** Постройте сечение правильной шестиугольной призмы, проходящее через данные точки  $K, L, M$  (рис. 5.9).

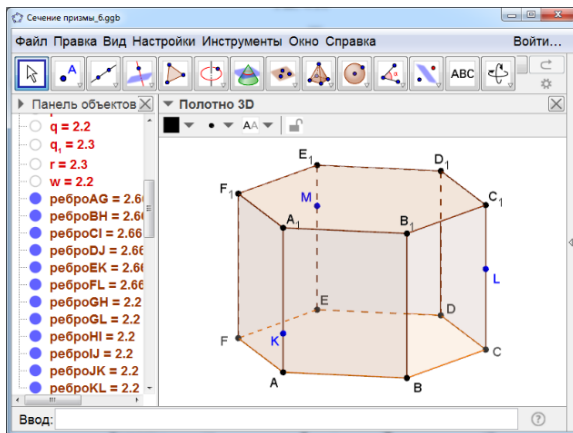


Рис. 5.9

**Задача 12.** Постройте сечение октаэдра плоскостью, проходящей через середину  $G$  ребра  $AD$ , параллельной плоскости  $BDE$  (рис. 5.10). Какая фигура является сечением?

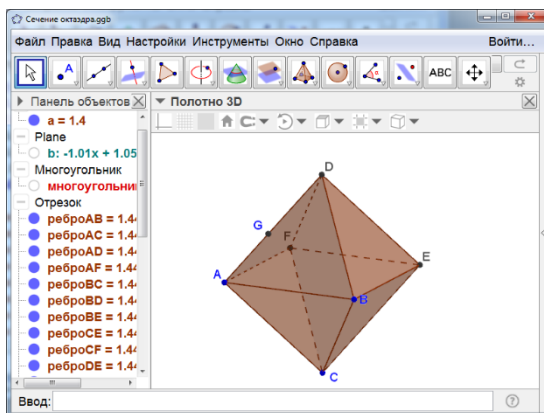


Рис. 5.10

**Задача 13.** Постройте сечение икосаэдра плоскостью, проходящей через середину  $P$  ребра, параллельной плоскости  $ABC$  (рис. 5.11). Какая фигура является сечением?

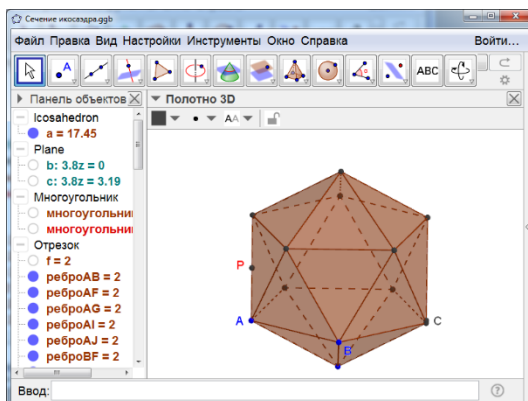


Рис. 5.11



**Задача 14.** Постройте сечение додекаэдра плоскостью, проходящей через середину  $P$  ребра, параллельной плоскости  $ABC$  (рис. 5.12). Какая фигура является сечением?

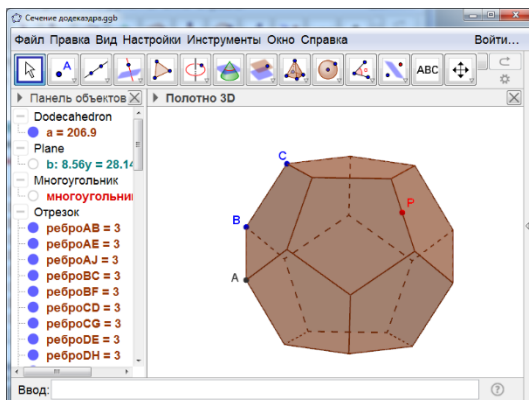


Рис. 5.12

**Задача 15.** Постройте сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью, проходящей через данные точки  $C(0,-2,0)$ ,  $D(2,0,0)$ ,  $E(0,0,1)$  (рис. 5.13). Какая кривая является сечением?

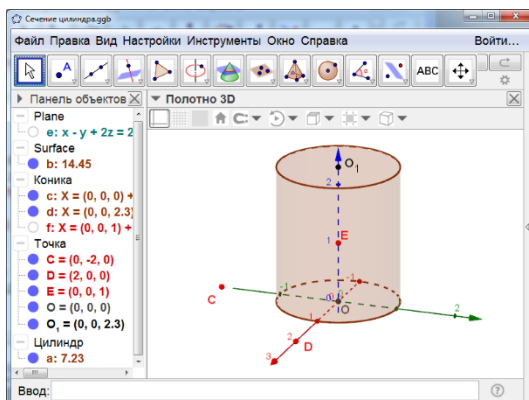


Рис. 5.13

**Задача 16.** Постройте сечение боковой поверхности конуса плоскостью, проходящей через данные точки  $C(0,-2,0)$ ,  $D(2,0,0)$ ,  $E(0,0,1)$  (рис. 5.14). Какая кривая является сечением?

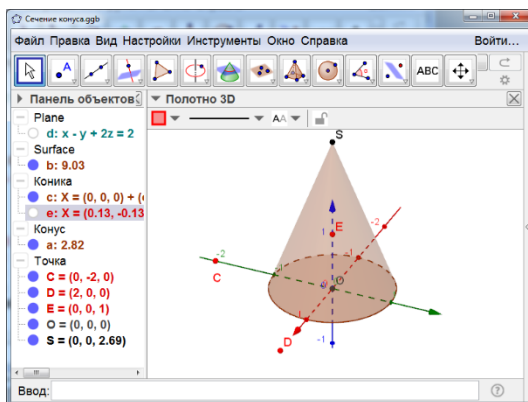


Рис. 5.14

**Задача 17.** Постройте сечение боковой поверхности конуса плоскостью, проходящей через данную точку  $E$ , параллельной плоскости  $SAB$ , где  $S(0,0,2)$ ,  $A(0,1,0)$ ,  $B(1,-1,0)$  (рис. 5.15). Какая кривая является сечением?

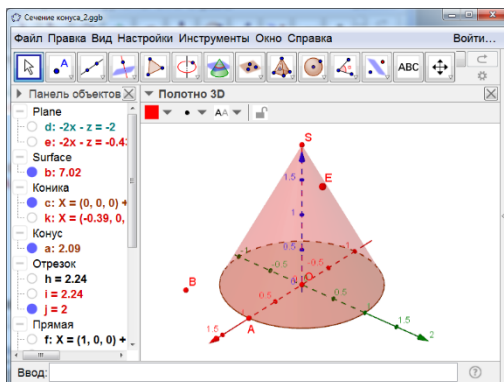


Рис. 5.15

**Задача 17.** Постройте сечение боковой поверхности конуса плоскостью, проходящей через данную точку  $G$ , перпендикулярной прямой  $OA$ , где  $O(0,0,0)$ ,  $A(-1,0,0)$  (рис. 5.16). Какая кривая является сечением?

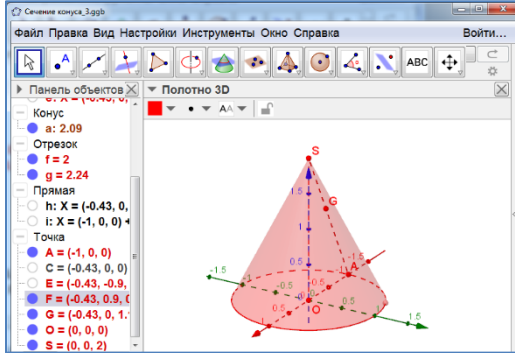


Рис. 5.16

## 6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

**Задача 1.** Изобразите сферу, вписанную в куб (рис. 6.1).

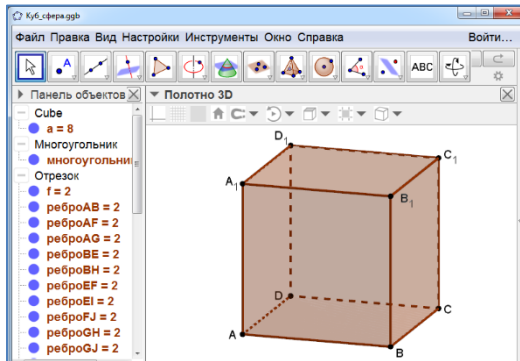


Рис. 6.1

**Задача 2.** Изобразите сферу, вписанную в правильный тетраэдр (рис. 6.2).

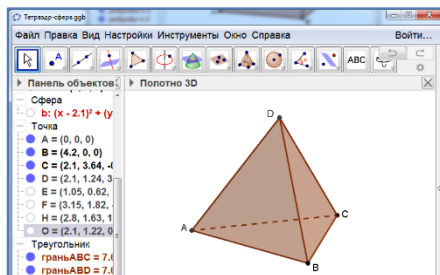


Рис. 6.2

Задача 3. Изобразите сферу, вписанную в правильную 4-ю пирамиду (рис. 6.3).

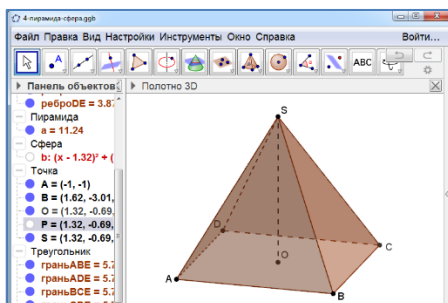


Рис. 6.3

Задача 4. Изобразите сферу, вписанную в правильную 6-ю пирамиду (рис. 6.4).

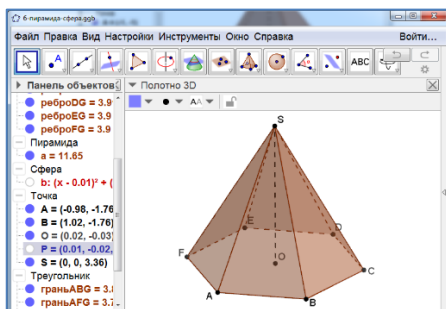


Рис. 6.4

**Задача 5.** Изобразите сферу, вписанную в правильную 3-ю призму (рис. 6.5).

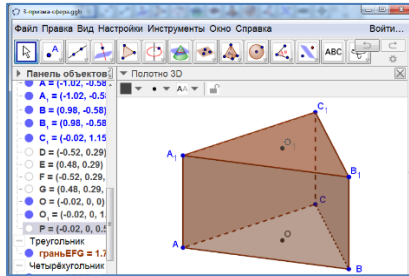


Рис. 6.5

**Задача 6.** Изобразите сферу, вписанную в правильную 6-ю призму (рис. 6.6).

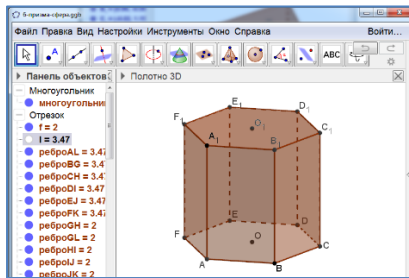


Рис. 6.6

**Задача 7.** Изобразите сферу, вписанную в октаэдр (рис. 6.7).

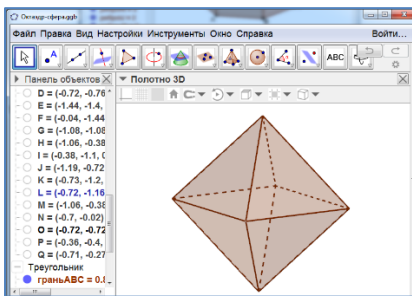


Рис. 6.7

Задача 8. Изобразите сферу, вписанную в икосаэдр (рис. 6.8).

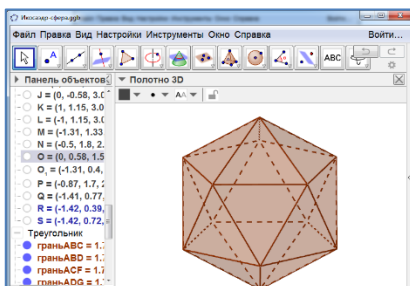


Рис. 6.8

Задача 9. Изобразите сферу, вписанную в додекаэдр (рис. 6.9).

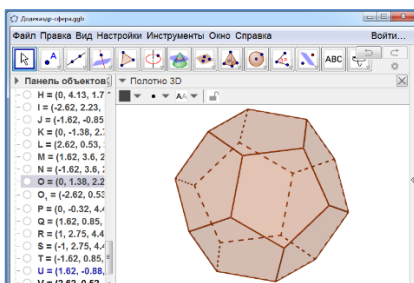


Рис. 6.9

Задача 10. Изобразите сферу, вписанную в цилиндр (рис. 6.10).

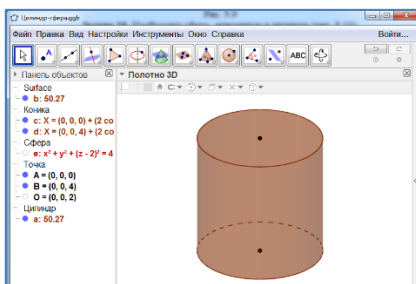


Рис. 6.10

**Задача 11.** Изобразите сферу, вписанную в конус (рис. 6.11).

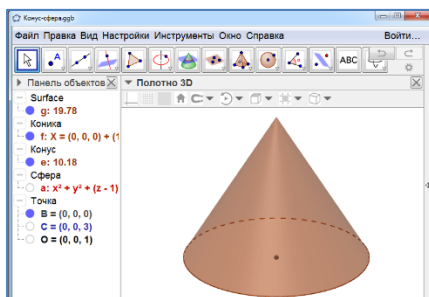


Рис. 6.11

**Задача 12.** Изобразите сферу, описанную около куба (рис. 6.1).

**Задача 13.** Изобразите сферу, описанную около правильного тетраэдра (рис. 6.2).

**Задача 14.** Изобразите сферу, описанную около правильной 4-й пирамиды (рис. 6.3).

**Задача 15.** Изобразите сферу, описанную около правильной 6-й пирамиды (рис. 6.4).

**Задача 16.** Изобразите сферу, описанную около правильной 3-й призмы (рис. 6.5).

**Задача 17.** Изобразите сферу, описанную около правильной 6-й призмы (рис. 6.6).

**Задача 18.** Изобразите сферу, описанную около октаэдра (рис. 6.7).

**Задача 19.** Изобразите сферу, описанную около икосаэдра (рис. 6.8).

**Задача 20.** Изобразите сферу, описанную около додекаэдра (рис. 6.9).

**Задача 21.** Изобразите сферу, описанную около цилиндра (рис. 6.10).

**Задача 22.** Изобразите сферу, описанную около конуса (рис. 6.11).

**Задача 23.** Изобразите прямую треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$ , основанием которой может быть произвольный треугольник  $ABC$  (рис. 6.12). Найдите центр сферы и постройте саму сферу, описанную около этой призмы.

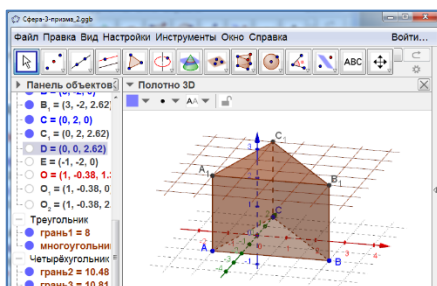


Рис. 6.12

**Задача 24.** Изобразите треугольную пирамиду  $SABC$ , основанием которой может быть произвольный треугольник  $ABC$  (рис. 6.13). Найдите центр сферы и постройте саму сферу, описанную около этой пирамиды.

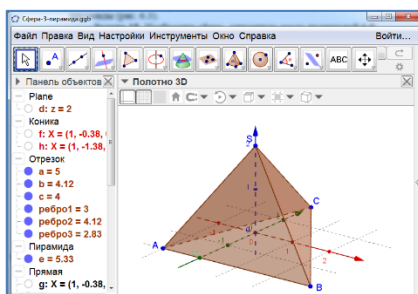


Рис. 6.13



## 7. КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Программа GeoGebra позволяет получать правильные многогранники, вписанные друг в друга.

При этом возможны следующие случаи:

1. Вершинами вписанного многогранника являются некоторые вершины описанного многогранника.
2. Вершинами вписанного многогранника являются середины ребер описанного многогранника.
3. Вершинами вписанного многогранника являются центры граней описанного многогранника.
4. Серединами ребер вписанного многогранника являются центры граней описанного многогранника.
5. Центрами граней вписанного многогранника являются некоторые центры граней описанного многогранника.

Последовательное вписывание друг в друга правильных многогранников называется каскадом.

Здесь мы рассмотрим возможные варианты вписанности правильных многогранников. Всего имеется  $5! = 120$  каскадов.

**Задача 1.** Впишите тетраэдр в куб так, чтобы вершинами тетраэдра были вершины куба (рис. 7.1).

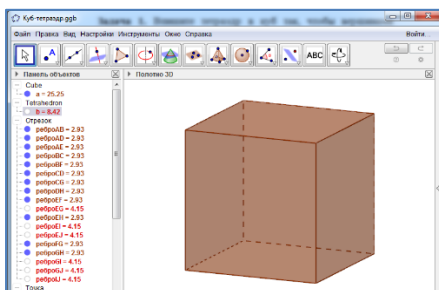


Рис. 7.1

**Задача 2.** Впишите октаэдр в куб так, чтобы вершинами октаэдра являются центры граней куба (рис. 7.1).

**Задача 3.** Впишите икосаэдр в куб так, чтобы центры граней куба являлись серединами рёбер икосаэдра (рис. 7.1).

**Задача 4.** Впишите додекаэдр в куб так, чтобы центры граней куба являлись серединами рёбер додекаэдра (рис. 7.1).

**Задача 5.** Впишите октаэдр в тетраэдр так, чтобы вершинами октаэдра являлись середины рёбер тетраэдра (рис. 7.2).

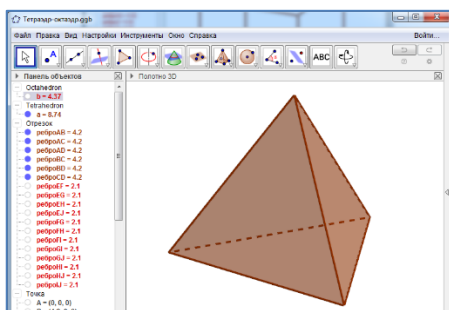


Рис. 7.2

**Задача 6.** Впишите куб в октаэдр так, чтобы вершинами куба являлись центры граней октаэдра (рис. 7.3).

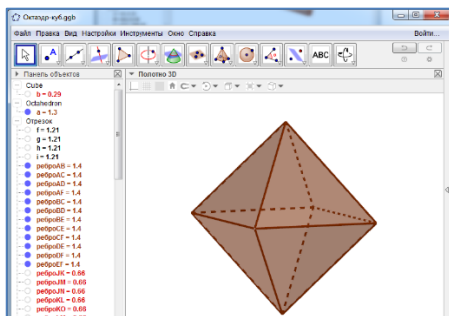


Рис. 7.3

**Задача 7.** Впишите икосаэдр в октаэдр так, чтобы центры граней октаэдра являлись центрами граней икосаэдра (рис. 7.3).

**Задача 8.** Впишите додекаэдр в икосаэдр так, чтобы вершинами додекаэдра являлись центры граней икосаэдра (рис. 7.4).

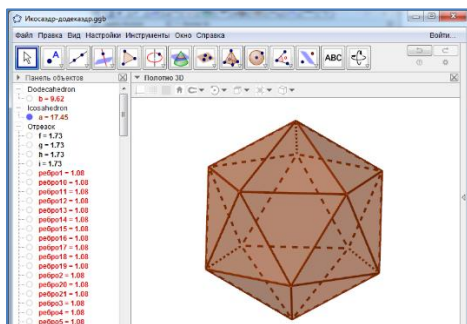


Рис. 7.4

**Задача 9.** Впишите куб в додекаэдр так, чтобы вершинами куба являлись вершины додекаэдра (рис. 7.5).

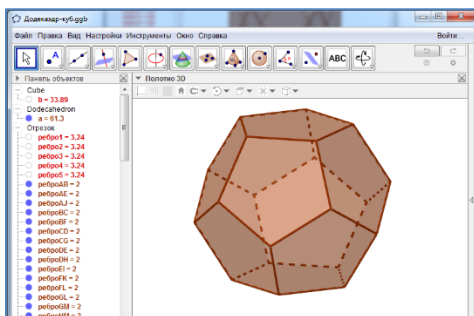


Рис. 7.5

**Задача 10.** Впишите икосаэдр в додекаэдр так, чтобы вершинами икосаэдра являлись центры граней додекаэдра (рис. 7.5).

**Задача 11.** Впишите додекаэдр в икосаэдр и куб в додекаэдр так, чтобы вершинами додекаэдра являлись центры граней икосаэдра, а вершинами куба являлись вершины додекаэдра (рис. 7.4).

**Задача 12.** Изобразите полный каскад: икосаэдр  $\rightarrow$  додекаэдр  $\rightarrow$  куб  $\rightarrow$  тетраэдр  $\rightarrow$  октаэдр так, чтобы вершинами додекаэдра являлись центры граней икосаэдра, вершинами куба являлись вершины додекаэдра, вершинами тетраэдра являлись вершины куба, вершинами октаэдра являлись середины рёбер тетраэдра (рис. 7.4).

## 8. ДВИЖЕНИЕ

**Задача 1.** Правильный тетраэдр повёрнут вокруг прямой, содержащей его высоту, на угол  $60^\circ$  (рис. 8.1). Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повёрнутого?

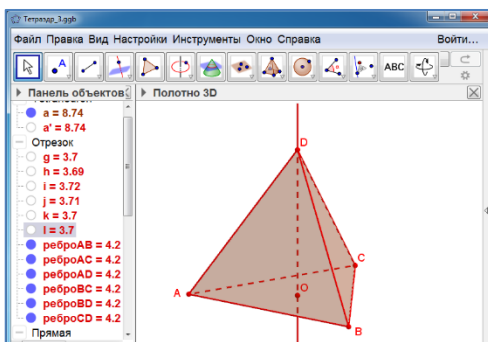


Рис. 8.1

**Задача 2.** Правильная четырёхугольная пирамида повёрнута вокруг прямой, содержащей её высоту, на угол  $45^\circ$  (рис. 8.2). Какая фигура является общей частью исходной пирамиды и повёрнутой?

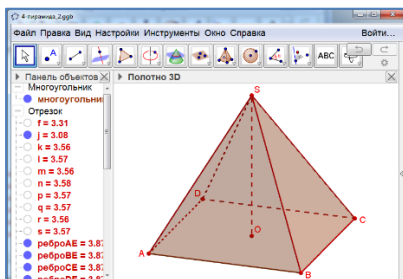


Рис. 8.2

**Задача 3.** Правильная пятиугольная призма повернута вокруг прямой, содержащей её высоту, на угол  $36^\circ$  (рис. 8.3). Какая фигура является общей частью исходной призмы и повернутой?

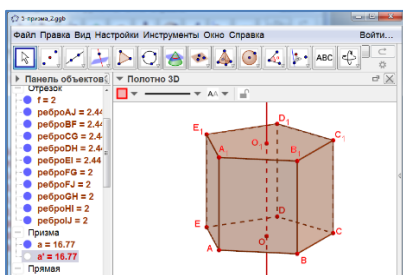


Рис. 8.3

**Задача 4.** Правильный тетраэдр повернут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер, на угол  $90^\circ$  (рис. 8.4). Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и повернутого?

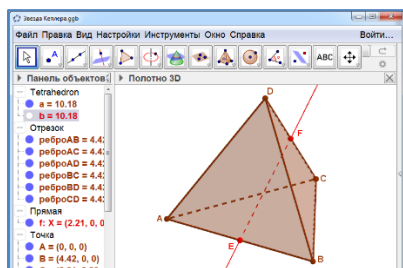


Рис. 8.4

**Задача 5.** Куб повернут вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, на угол  $60^\circ$  (рис. 8.5). Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?

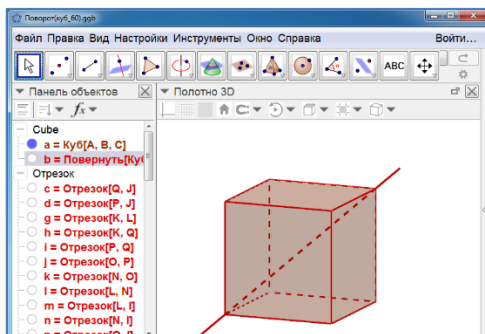


Рис. 8.5

**Задача 6.** Куб повернут вокруг прямой, проходящей через середины противоположных рёбер, на угол  $90^\circ$  (рис. 8.6). Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?

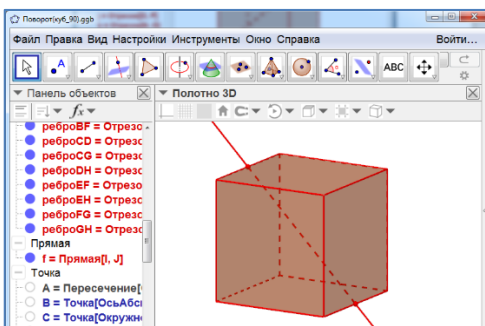


Рис. 8.6

**Задача 7.** Правильный тетраэдр симметрично отражён относительно центра описанной сферы (рис. 8.7). Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и отражённого?

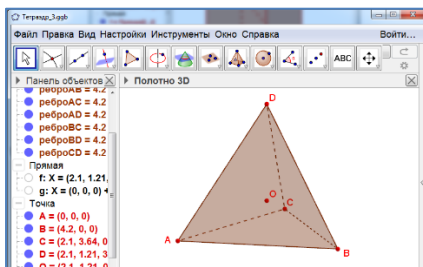


Рис. 8.7

**Задача 8.** Правильный тетраэдр симметрично отражён относительно середины высоты (рис. 8.8). Какая фигура является общей частью исходного тетраэдра и отражённого?

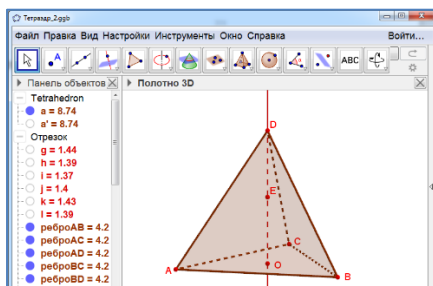


Рис. 8.8

**Задача 9.** Какая фигура получается вращением отрезка  $AB$  вокруг оси  $Oz$  (рис. 8.9).

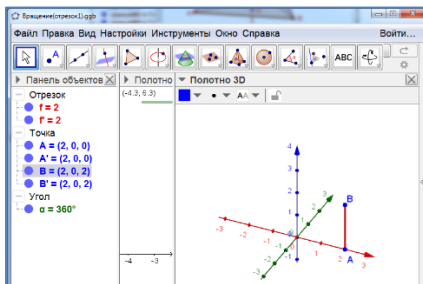


Рис. 8.9

**Задача 10.** Какая фигура получается вращением отрезка АВ вокруг оси Oz (рис. 8.10).

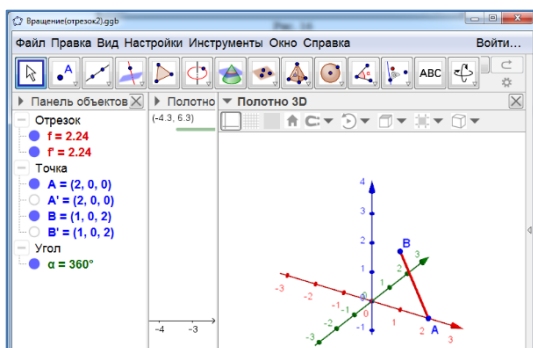


Рис. 8.10

**Задача 11.** Опишите фигуру, полученную вращением равнобедренного треугольника ABC вокруг его оси симметрии (рис. 8.11).

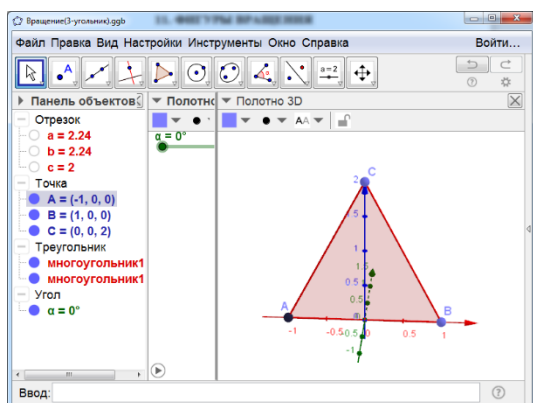


Рис. 8.11

**Задача 12.** Опишите фигуру, полученную вращением квадрата ABCD вокруг прямой AC (рис. 8.12).



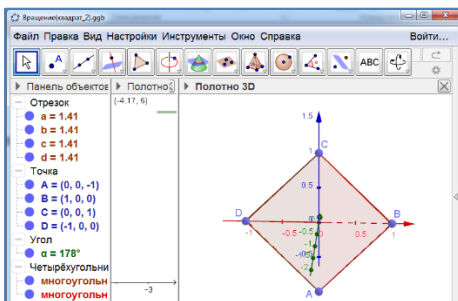


Рис. 8.12

**Задача 13.** Опишите фигуру, полученную вращением трапеции ABCD вокруг прямой AB (рис. 8.13).

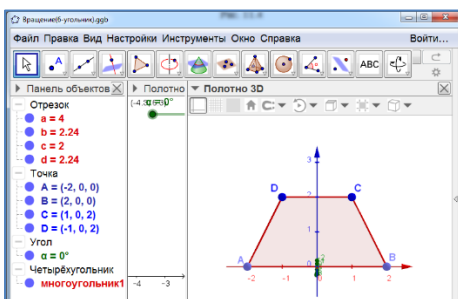


Рис. 8.13

**Задача 14.** Опишите фигуру, полученную вращением шестиугольника ABCDEF вокруг прямой AF (рис. 8.14).

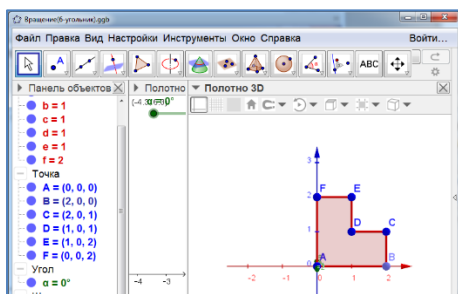


Рис. 8.14

**Задача 15.** Опишите фигуру, полученную вращением отрезка  $AB$  вокруг оси  $Oz$  (рис. 8.15).

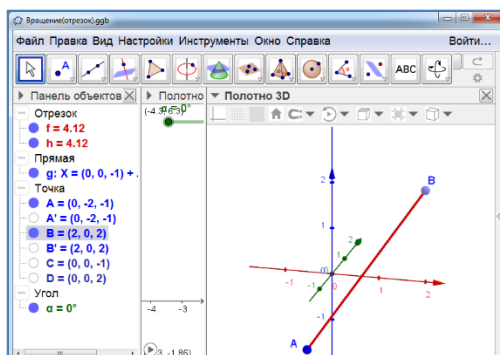


Рис. 8.15

**Задача 16.** Опишите фигуру, полученную вращением октаэдра вокруг прямой, проходящей через его противоположные вершины (рис. 8.16).

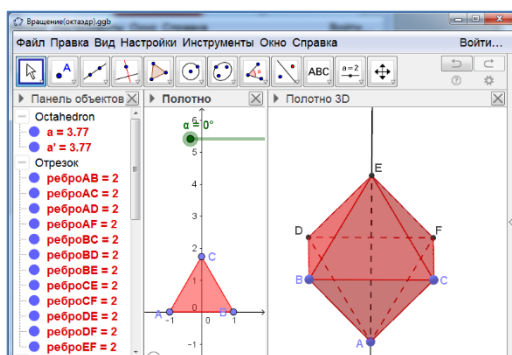


Рис. 8.16

**Задача 17.** Опишите фигуру, полученную вращением тетраэдр  $ABCD$  вокруг прямой  $AB$  (рис. 8.17).

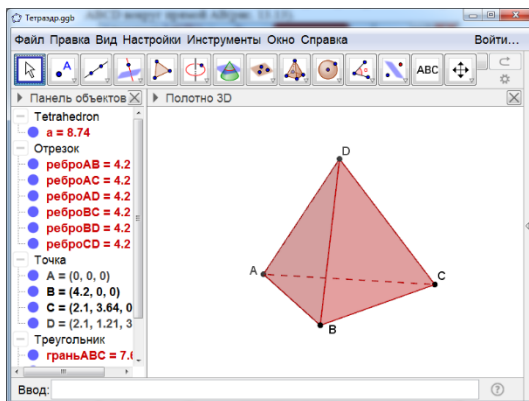


Рис. 8.17

**Задача 18.** Опишите фигуру, полученную вращением «сапога» (рис. 8.18) вокруг прямой AF.

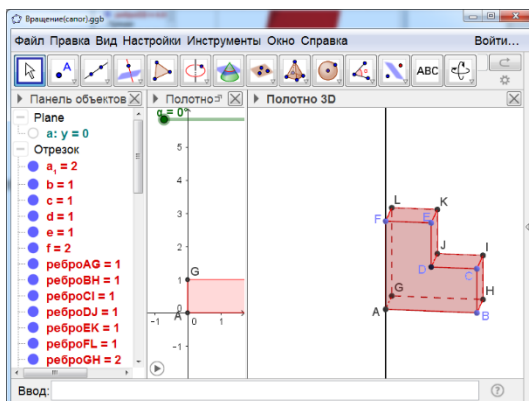


Рис. 8.18

**Задача 19.** Опишите фигуру, полученную вращением тетраэдра вокруг прямой, проходящей через середины его противоположных рёбер (рис. 8.19).

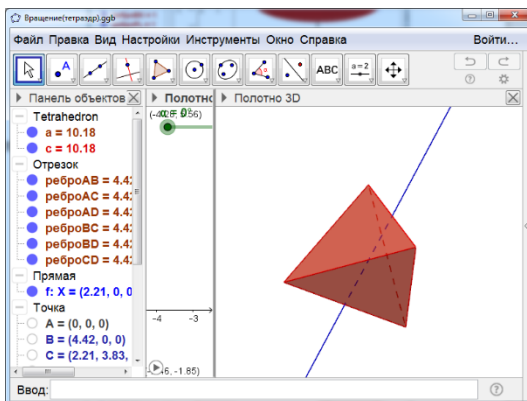


Рис. 8.19

**Задача 20.** Опишите фигуру, полученную вращением куба вокруг прямой, проходящей через середины его противоположных рёбер (рис. 8.20).

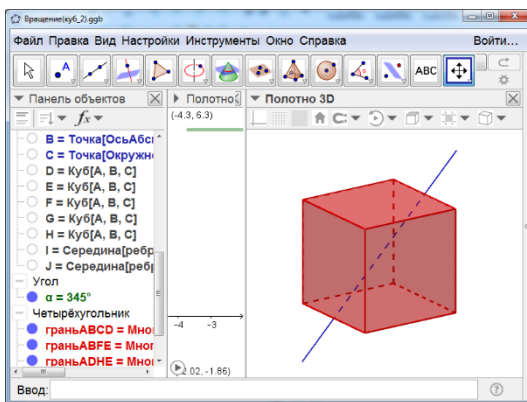


Рис. 8.20

**Задача 21.** Опишите фигуру, полученную вращением икосаэдра вокруг прямой, проходящей через его противоположные вершины (рис. 8.21).

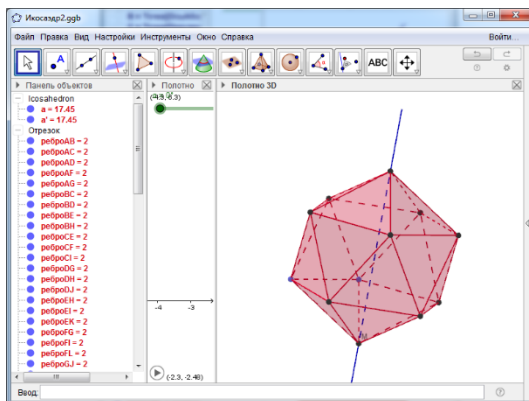


Рис. 8.21

**Задача 22.** Опишите фигуру, полученную вращением додекаэдра вокруг прямой, проходящей через его противоположные вершины (рис. 8.22).

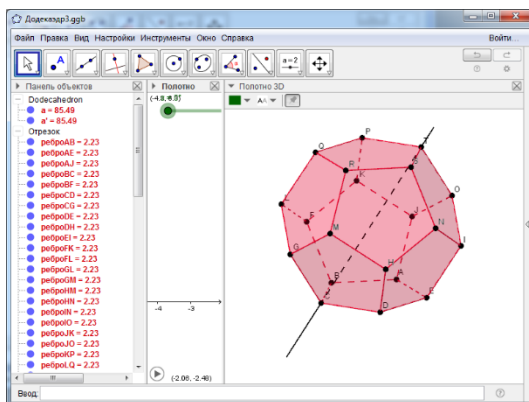


Рис. 8.22

**Задача 23.** Опишите фигуру, полученную вращением окружности вокруг оси  $Oz$  (рис. 8.23).

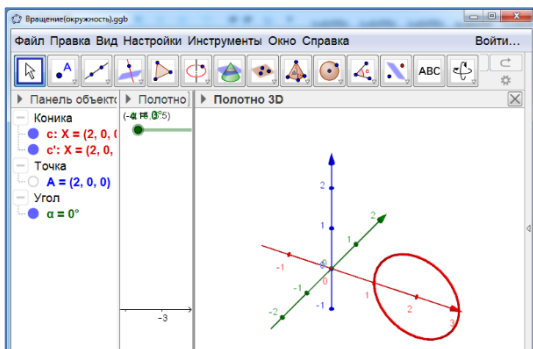


Рис. 8.23

## 9. ОБЪЁМЫ

**Задача 1.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, D, A_1, B, C, B_1$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём этого многогранника.

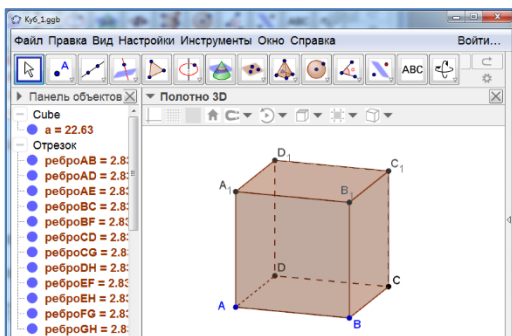


Рис. 9.1

**Задача 2.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A_1, A, B, C, D$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём этого многогранника.

**Задача 3.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A_1, A, B, C$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём этого многогранника.

**Задача 4.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, C, B_1, D_1$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём этого многогранника.

**Задача 5.** Изобразите две призмы с вершинами  $A, D, A_1, B, C, B_1$  и  $A, D, D_1, B, C, C_1$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 6.** Изобразите две призмы с вершинами  $A, B, A_1, D, C, D_1$  и  $A, D, D_1, B, C, C_1$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 7.** Изобразите две пирамиды с вершинами  $A_1, A, B, C$  и  $C_1, A, B, C$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 8.** Изобразите две пирамиды с вершинами  $A_1, A, B, C$  и  $B_1, A, B, C$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 9.** Изобразите две пирамиды с вершинами  $A_1, A, B, C, D$  и  $C_1, A, B, C, D$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 10.** Изобразите две пирамиды с вершинами  $A_1, A, B, C, D$  и  $B_1, A, B, C, D$  единичного куба (рис. 9.1). Найдите объём их общей части.

**Задача 11.** Объём треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равен 1 (рис. 9.1). Точки  $D$  и  $E$  – середины рёбер  $AB$  и  $AC$  соответственно. Изобразите призму  $ADEA_1D_1E_1$  и найдите её объём.

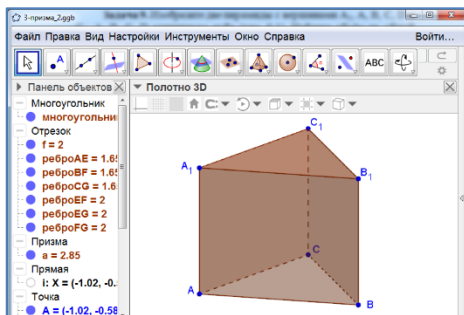


Рис. 9.1

**Задача 12.** Объём треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равен 1 (рис. 9.1). Точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  – середины рёбер  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно. Изобразите призму  $DEFD_1E_1F_1$  и найдите её объём.

**Задача 13.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $B_1$  правильной треугольной призмы (рис. 9.4). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.

**Задача 14.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $B_1$  правильной треугольной призмы (рис. 9.4). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.

**Задача 15.** Изобразите две пирамиды с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $B_1$  и  $B$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $A_1$  правильной треугольной призмы (рис. 9.2). Найдите объём их общей части, если объём данной призмы равен 1.

**Задача 16.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $B_1$  правильной шестиугольной призмы (рис. 9.3). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.



**Задача 17.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $F, A, B, D_1$  правильной шестиугольной призмы (рис. 9.3). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.

**Задача 18.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, B, B_1, C_1$  правильной шестиугольной призмы (рис. 9.3). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.

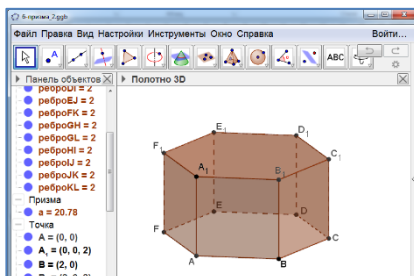


Рис. 9.3

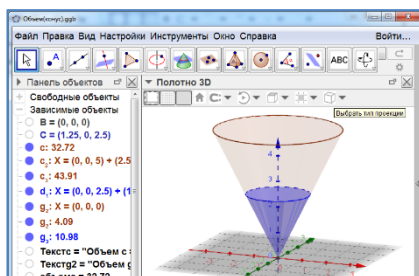


Рис. 9.4

**Задача 19.** Изобразите многогранник, вершинами которого являются вершины  $A, B, B_1, A_1, D_1$  правильной шестиугольной призмы (рис. 9.3). Найдите объём этого многогранника, если объём данной призмы равен 1.

**Задача 20.** В конусообразный сосуд налили воду, уровень которой находится на середине высоты сосуда (рис. 9.4). Какую часть объёма сосуда занимает вода?

**Задача 21.** Изобразите два равных конуса, которые имеют общую высоту, а их основания лежат в параллельных плоскостях. Найдите объём их общей части, если объёмы данных конусов равны 1.

**Задача 22.** На рисунке 9.5 изображены два шара. Радиус меньшего шара составляет 0,8 радиуса большего шара. Какую часть объёма большего шара составляет объём меньшего шара?

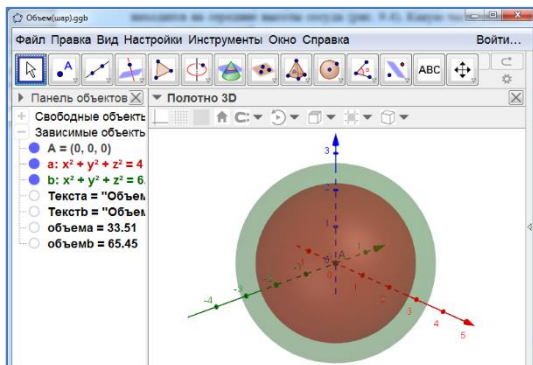


Рис. 9.5

**Задача 23.** В плоскости  $ХОУ$  изобразите какой-нибудь многоугольник  $M$ . Проведите плоскость  $\alpha$ , параллельную плоскости  $ХОУ$ . Постройте призму, одним основанием которой является многоугольник  $M$ , а второе основание лежит в плоскости  $\alpha$  (рис. 9.6). Проверьте, что при перемещении второго основания в плоскости  $\alpha$  объём призмы не меняется.

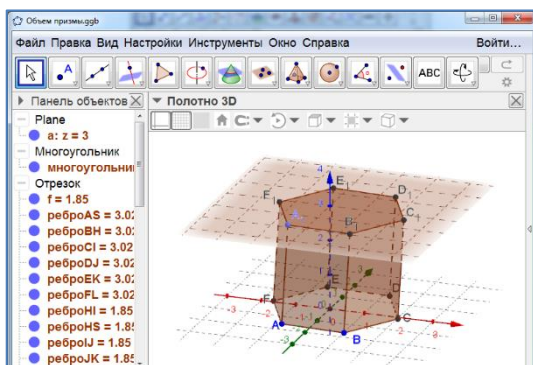


Рис. 9.6

**Задача 24.** В плоскости  $ХОУ$  изобразите какой-нибудь многоугольник  $M$ . Проведите плоскость  $\alpha$ , параллельную плоскости  $ХОУ$ . Постройте пирамиду, основанием которой является многоугольник  $M$ , а вершина принадлежит плоскости  $\alpha$  (рис. 9.7). Проверьте, что при перемещении вершины в плоскости  $\alpha$  объём пирамиды не меняется.

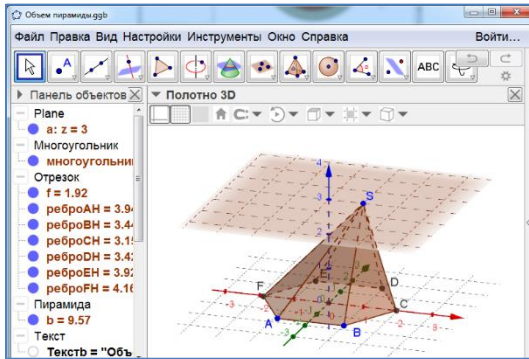


Рис. 9.7

**Задача 25.** Изобразите две скрещивающиеся прямые. Постройте на них отрезки  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ , заданной длины  $a$  и  $b$ . Проверьте, что при перемещении этих отрезков по данным прямым объём тетраэдра  $A_1A_2B_1B_2$  не меняется (рис. 9.8).

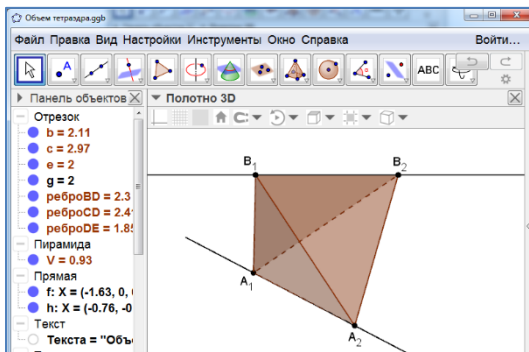


Рис. 9.8

## 10. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

**Задача 1.** Получите график функции  $f(x,y)=ax + by + c$ .

**Задача 2.** Получите график функции  $f(x,y) = x^2 + y^2$ .

**Задача 3.** Получите график функции  $f(x,y) = x^2 - y^2$ .

**Задача 4.** Получите график функции  $f(x,y) = xy$ .

**Задача 5.** Получите график функции  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Задача 6.** Получите график функции  $f(x,y) = |x| + |y|$ .

**Задача 7.** Получите график функции  $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$ .

**Задача 8.** Получите график функции  $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ .

**Задача 9.** Получите график функции  $f(x,y) = \sin(xy)$ .

**Задача 10.** Получите график функции  $f(x,y) = \frac{a}{1+x^2+y^2}$ .

**Задача 11.** Получите плоскость, заданную уравнением  $x + y + z = c$ .

**Задача 12.** Получите сферу, заданную уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

**Задача 13.** Получите гиперboloид, заданный уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ .

**Задача 14.** Получите винтовую линию - кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \sin(t), \\ y = a \cos(t), \\ z = bt. \end{cases}$$

**Задача 15.** Получите геликоид – поверхность, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = u \sin(v), \\ y = u \cos(v), \\ z = av. \end{cases}$$

**Задача 16.** Получите тор – поверхность, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = (a + \cos(u)) \cos(v), \\ y = (a + \cos(u)) \sin(v), \\ z = \sin(u). \end{cases}$$

**Задача 17.** Вращением графика какой функции получена поверхность, изображённая на рисунке 10.1?

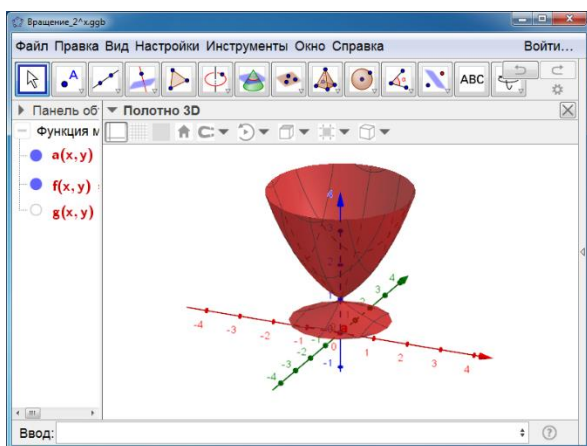


Рис. 10.1

**Задача 18.** Вращением графика какой функции получена поверхность, изображённая на рисунке 10.2?

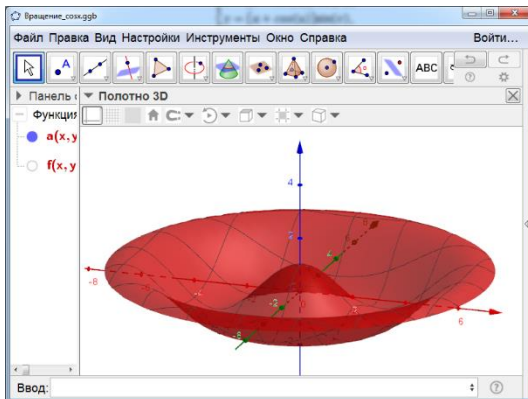


Рис. 10.2

**Задача 19.** Вращением графика какой функции получена поверхность, изображённая на рисунке 10.3?

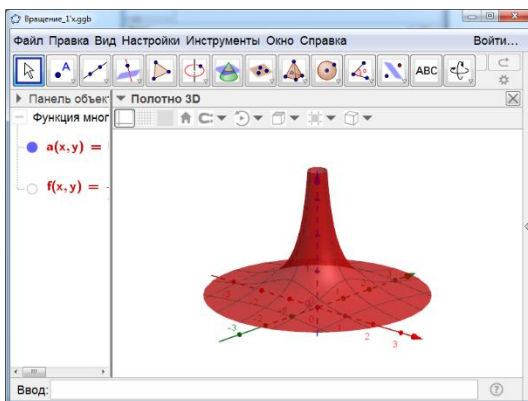


Рис. 10.3

**Задача 20.** Какая поверхность задаётся уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 3 = 0?$$

# ОТВЕТЫ

## 2. МНОГОГРАННИКИ

**Задача 1.** Указанная призма не является прямой. На рисунке 2.1 показана призма, полученная поворотом данной.

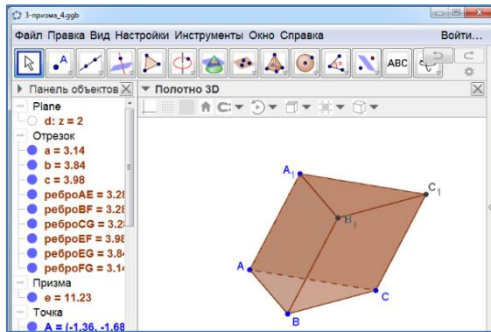


Рис. 2.1

**Задача 2.** На рисунке 2.1 показана наклонная призма.

**Задача 3.** В полотне 2D строим правильный пятиугольник (рис. 2.2).

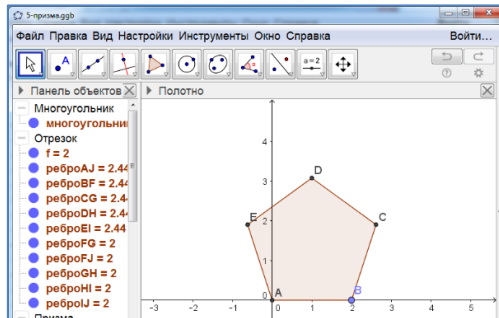


Рис. 2.2

Перейдём на полотно 3D и с помощью инструмента «Призма» строим правильную пятиугольную призму (рис. 2.3).

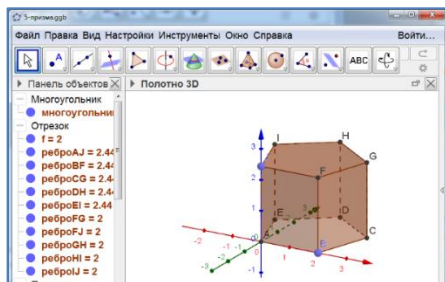


Рис. 2.3

С помощью инструмента «Развёртка» можно получить развёртку этой пирамиды. Для этого нужно просто указать левой кнопкой мыши на эту пирамиду (рис. 2.4).

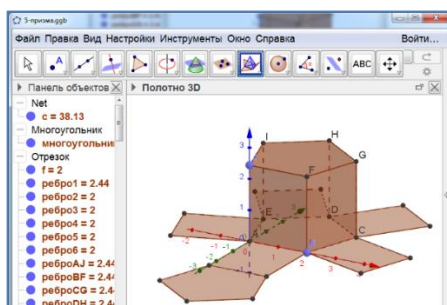


Рис. 2.4

**Задача 4.** В полотно 2D строим правильный треугольник (рис. 2.5).

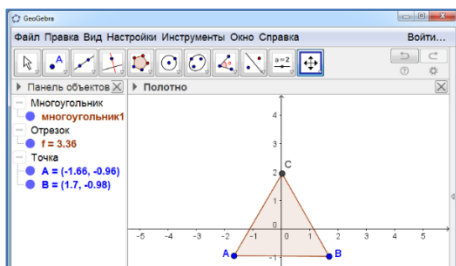


Рис. 2.5



Перейдём на полотно 3D и с помощью инструмента «Пирамида» строим правильную треугольную пирамиду (рис. 2.6).

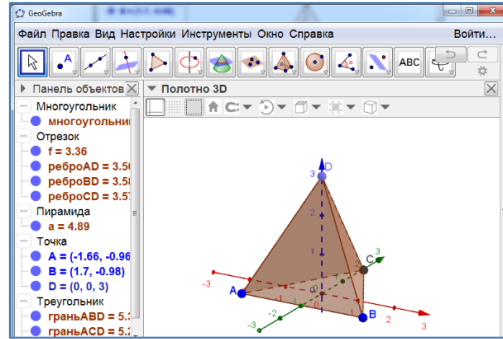


Рис. 2.6

С помощью инструмента «Развёртка» можно получить развёртку этой пирамиды. Для этого нужно просто указать левой кнопкой мыши на эту пирамиду (рис. 2.7).

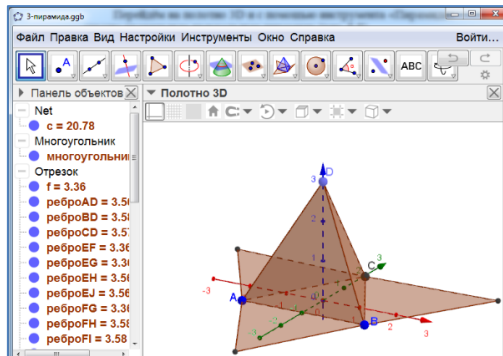


Рис. 2.7

**Задача 5.** В строке «Ввод» наберём  $A=(0,0,0)$  и нажмем «Enter». На полотне появится точка  $A(0,0,0)$ . Аналогичным образом построим точки,  $B(3,0,0)$ ,  $C(3,2,0)$ ,  $D(0,2,0)$ ,  $A_1(0,0,2)$ . Построим четырёхугольник

ABCD. С помощью инструмента «Призма» построим прямоугольный параллелепипед (рис. 2.8).

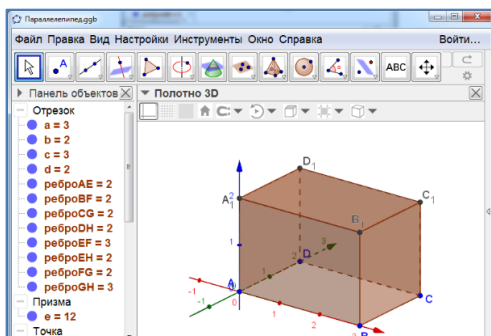


Рис. 2.8

**Задача 6.** В строке «Ввод» наберём  $A=(-2,1,0)$  и нажмем «Enter». На полотне появится точка  $A(-2,1,0)$ . Аналогичным образом построим точки,  $B(2,1,0)$ ,  $C(2,1,1)$ ,  $D(1,1,1)$ ,  $E(1,1,2)$ ,  $F(-1,1,2)$ ,  $G(-1,1,1)$ ,  $H(-2,1,1)$ .

Построим восьмиугольник ABCDEFGH. С помощью инструмента «Призма» построим восьмиугольную призму (рис. 2.9).

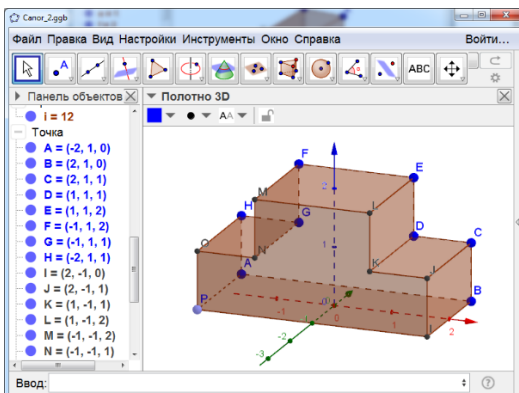


Рис. 2.9

**Задача 7.** Построим куб, одной гранью которого является квадрат ABCD. Остальные кубы получаются из построенного с помощью инструмента «Параллельный перенос по вектору» (рис. 2.10).

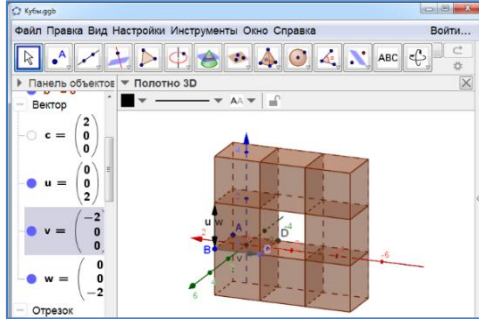


Рис. 2.10

**Задача 8.** Сначала изображаем правильный пятиугольник с двумя вершинами  $A$  и  $B$ . Затем параллельно переносим его на вектор с координатами  $(0, 0, t)$ . Получаем правильный пятиугольник с двумя вершинами  $A_1, B_1$ . Поворачиваем этот пятиугольник вокруг оси  $Oz$  на угол  $36^\circ$ . Получаем пятиугольник с двумя вершинами  $G, H$  (рис. 2.11). Строим треугольники, образующие боковую поверхность антипризмы. Подбираем параметр  $t$  так, чтобы эти треугольники были правильными. Скрываем пятиугольник с вершинами  $A_1, B_1$ .

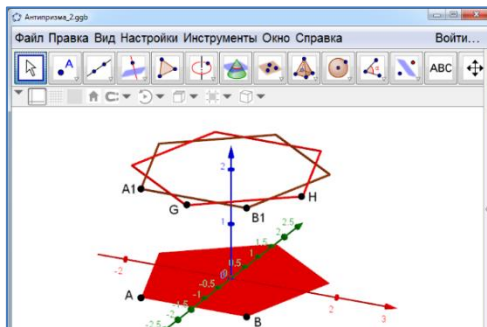


Рис. 2.11

**Задача 9.** Кубоктаэдр получается отсечением углов куба плоскостями, проходящими через середины рёбер куба, выходящих из одной вершины. Сначала получаем изображение куба. Затем отмечаем середины его рёбер. Изображаем квадраты и треугольники с вершинами в серединах рёбер куба (рис. 2.12). Убираем изображение куба.

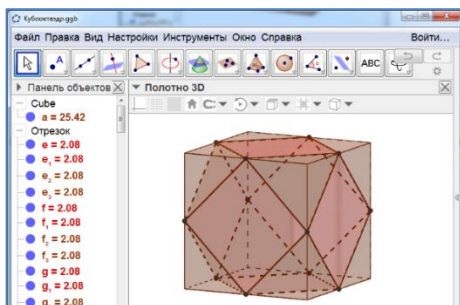


Рис. 2.12

**Задача 10.** Икосододекаэдр получается отсечением углов икосаэдра плоскостями, проходящими через середины рёбер икосаэдра, выходящих из одной вершины. Сначала получаем изображение икосаэдра. Затем отмечаем середины его рёбер. Изображаем пятиугольники и треугольники с вершинами в серединах рёбер икосаэдра (рис. 2.13). Убираем изображение икосаэдра.

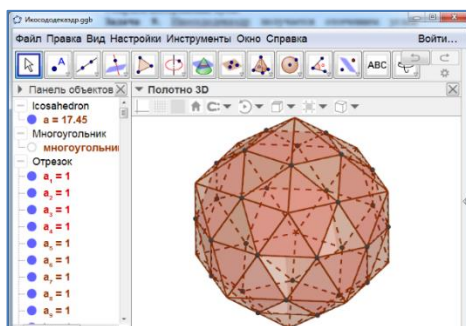


Рис. 2.13

**Задача 11.** Сначала получаем изображение тетраэдра. Затем отмечаем точки, делящие его рёбра на три равные части. (Это можно сделать, построив сферы с центрами в вершинах тетраэдра и радиусом, равным одной третьей ребра, а затем найти точки пересечения этих сфер с рёбрами тетраэдра.) Изображаем шестиугольники и треугольники с вершинами в этих точках (рис. 2.14). Убираем изображение тетраэдра.

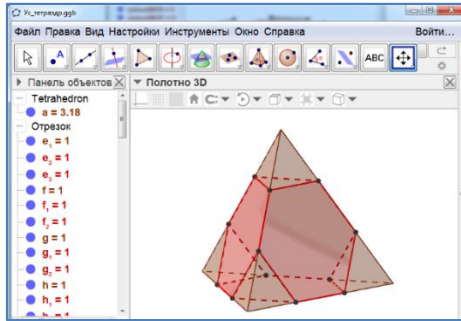


Рис. 2.14

**Задача 12.** Сначала получаем изображение октаэдра. Затем отмечаем точки, делящие его рёбра на три равные части. Изображаем шестиугольники и квадраты с вершинами в этих точках (рис. 2.15). Убираем изображение октаэдра.

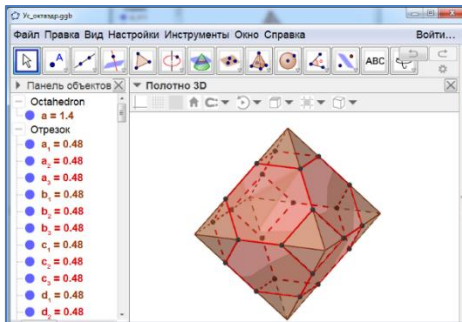


Рис. 2.15

**Задача 13.** Сначала получаем изображение икосаэдра. Затем отмечаем точки, делящие его рёбра на три равные части. Изображаем шестиугольники и пятиугольники с вершинами в этих точках (рис. 2.16). Убираем изображение икосаэдра.

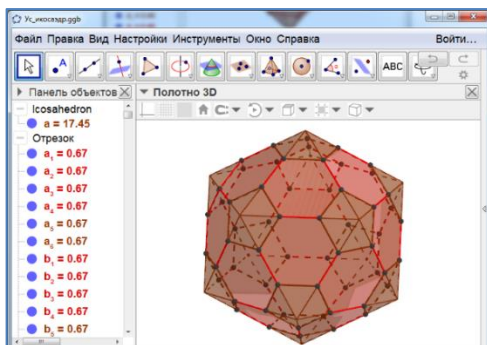


Рис. 2.16

**Задача 14.** Сначала получаем изображение додекаэдра. Затем отмечаем точки, отстоящие от вершин додекаэдра на расстояние, равное длине ребра додекаэдра, умноженной на  $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ . Изображаем треугольники и десятиугольники с вершинами в этих точках (рис. 2.17). Убираем изображение додекаэдра.

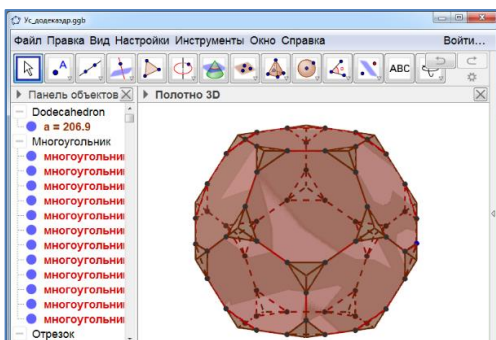


Рис. 2.17

**Задача 15.** Искомым полуправильным многогранником является кубооктаэдр (рис. 2.18).

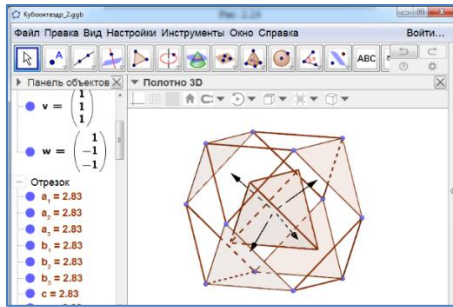


Рис. 2.18

**Задача 16.** Сначала получаем изображение куба. Затем грани куба параллельно переносим на векторы с началом в центре куба, направленные перпендикулярно граням куба и имеющие длину, равную длине ребра куба, делёной на  $\sqrt{2}$  (рис. 2.19). Дополнительно изображаем квадраты и треугольники.

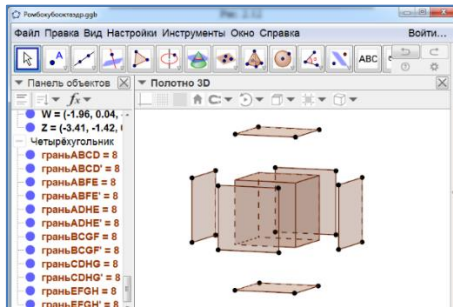


Рис. 2.19

**Задача 17.** Сначала получаем изображение додекаэдра. Затем грани додекаэдра параллельно переносим на векторы с началом в центре додекаэдра, направленные перпендикулярно граням додекаэдра и имеющие длину, равную длине ребра додекаэдра, умноженной на  $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$  (рис.

2.20). Дополнительно изображаем квадраты и треугольники. Убираем изображение додекаэдра.

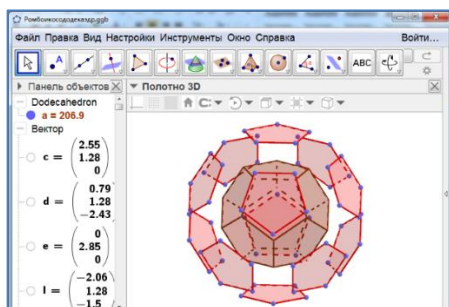


Рис. 2.20

**Задача 18.** Сначала отмечаем точки  $A(-1, -1, -1)$ ,  $B(1, -1, -1)$ ,  $C(1, 1, -1)$ ,  $D(-1, 1, -1)$ ,  $A_1(-1, -1, 1)$ ,  $B_1(1, -1, 1)$ ,  $C_1(1, 1, 1)$ ,  $D_1(-1, 1, 1)$ . Изображаем грани куба с вершинами в этих точки. Создаём ползунок  $a$ , изменяющийся от 0 до 2, и ползунок  $\alpha$ , изменяющийся от  $0^\circ$  до  $45^\circ$ . Затем грани куба параллельно переносим на векторы, направленные перпендикулярно граням куба, и имеющие длину  $a$  (рис. 2.21).

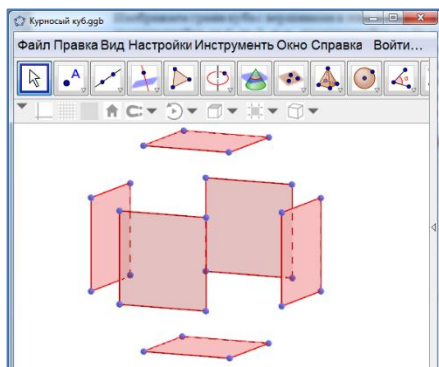


Рис. 2.21

Поворачиваем полученные грани вокруг прямых, содержащих указанные векторы, на угол  $\alpha$  по часовой стрелке (рис. 2.22).



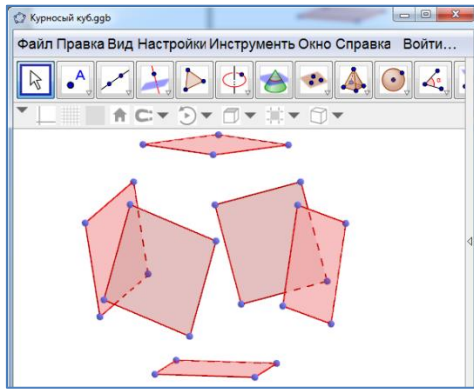


Рис. 2.22

Дополнительно изображаем треугольники. Подбираем величины ползунков так, чтобы треугольники были равносторонними.

**Задача 19.** Сначала изображаем додекаэдр. Создаём ползунок  $a$ , изменяющийся от 0 до 2, и ползунок  $\alpha$ , изменяющийся от  $0^\circ$  до  $45^\circ$ . Грани додекаэдра параллельно переносим на векторы, направленные перпендикулярно граням додекаэдра и имеющие длину  $a$  (рис. 2.23).

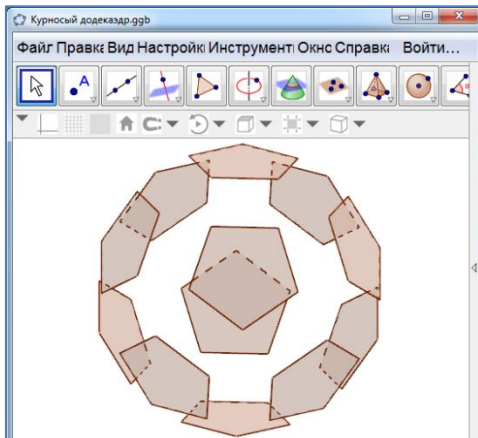


Рис. 2.23

Поворачиваем полученные грани вокруг прямых, содержащих указанные векторы, на угол  $\alpha$  по часовой стрелке (рис. 2.24).

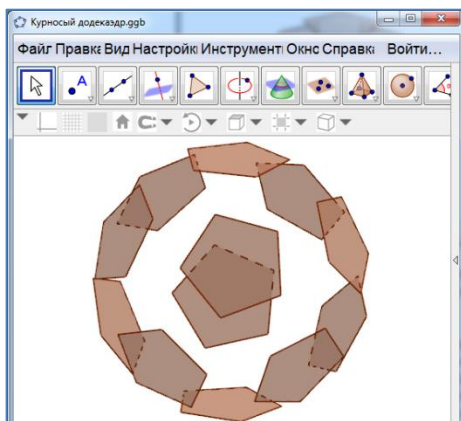


Рис. 2.24

Дополнительно изображаем треугольники. Подбираем величины ползунков так, чтобы треугольники были равносторонними.

**Задача 20.** Сначала получаем изображение рёберного икосаэдра. Затем строим правильные звёздчатые пятиугольники, один из которых показан на рисунке 2.25.

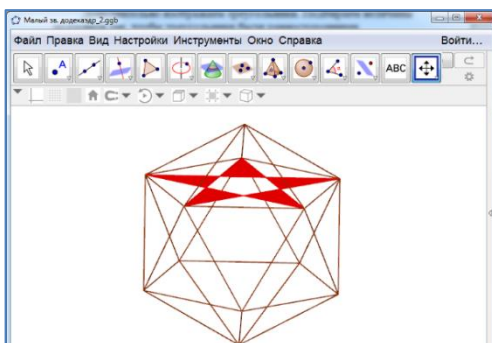


Рис. 2.25

**Задача 21.** Сначала получаем изображение рёберного додекаэдра. Затем строим правильные звёздчатые пятиугольники, один из которых показан на рисунке 2.26.

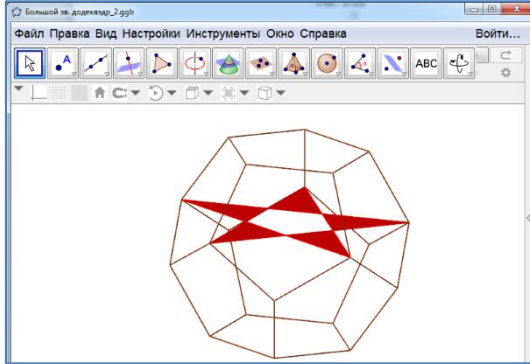


Рис. 2.26

**Задача 22.** Сначала получаем изображение рёберного икосаэдра. Затем строим правильный пятиугольник, вершинами которого являются концы рёбер, выходящих из одной вершины икосаэдра (рис. 2.27).

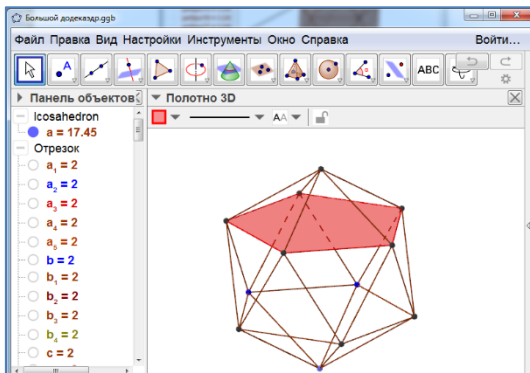


Рис. 2.27

**Задача 23.** Сначала получаем изображение рёберного икосаэдра. Затем строим правильный треугольник, вершинами которого являются три вершины икосаэдра (рис. 2.28).

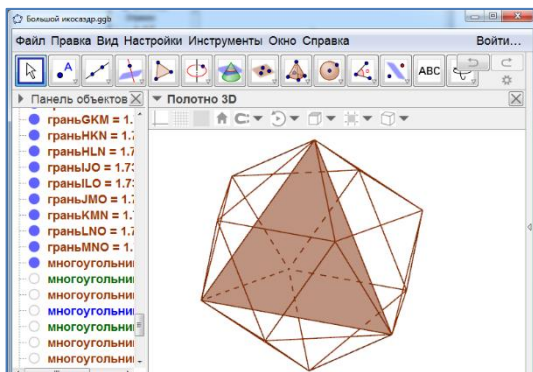


Рис. 2.28

Такие же треугольники строим для всех остальных вершин икосаэдра так, чтобы в каждой вершине сходилось пять треугольников.

### 3. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Задача 1.** Прямые перпендикулярны.

**Задача 2.**  $90^\circ$ .

**Задача 3.**  $45^\circ$ .

**Задача 4.** Прямые  $AB_1$  и  $BC$  кажутся параллельными. Однако они скрещиваются. Найдём угол между этими прямыми. Для этого через точку  $A$  проведём прямую, параллельную  $BC$  (рис. 3.1). Прямые  $AB_1$  и  $AD$  перпендикулярны. Следовательно, перпендикулярны и прямые  $AB_1$  и  $BC$ .

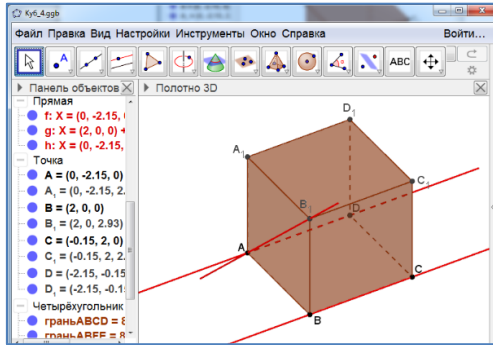


Рис. 3.1

**Задача 5.** Прямые  $AB_1$  и  $BC_1$  кажутся параллельными. Однако они скрещиваются. Это можно показать, поворачивая куб. Найдём угол между этими прямыми. Для этого через точку  $A$  проведём прямую, параллельную  $BC_1$  (рис. 3.2). Треугольник  $AB_1D_1$  равносторонний. Следовательно, искомый угол равен  $60^\circ$ .

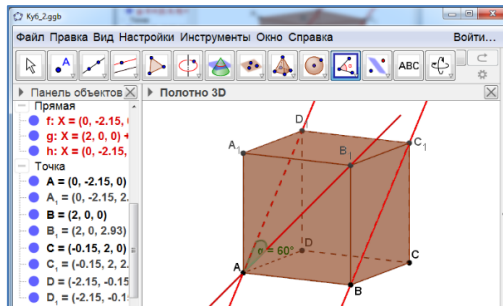


Рис. 3.2

**Задача 6.** Прямые  $AC_1$  и  $BD$  кажутся параллельными. Однако они скрещиваются. Найдём угол между этими прямыми. Ортогональная проекция прямой  $AC_1$  на плоскость  $ABC$  является прямой  $AC$ , перпендикулярная прямой  $BD$  (рис. 3.3). По теореме о трёх перпендикулярах из этого следует, что прямые  $AC_1$  и  $BD$  перпендикулярны.

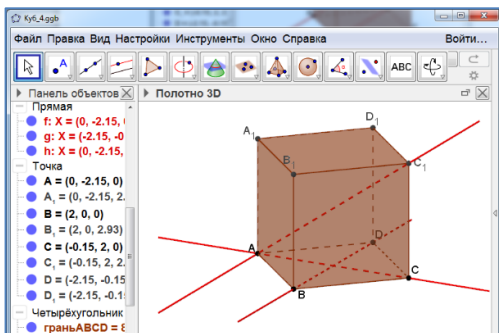


Рис. 3.3

**Задача 7.** Прямые  $AD$  и  $BC$  кажутся параллельными. Однако они перпендикулярны.

**Задача 8.** Прямые  $ED$  и  $BF$  кажутся параллельными. Однако они скрещиваются.

**Задача 9.** Отрезки  $EF$  и  $FG$  кажутся лежащими на одной прямой. Однако они перпендикулярны. Это можно увидеть, поворачивая тетраэдр.

**Задача 10.** Через точку  $A$  проведём прямую, параллельную  $BC$  (рис. 3.4). Треугольник  $SAD$  равносторонний. Следовательно, искомый угол равен  $60^\circ$ .

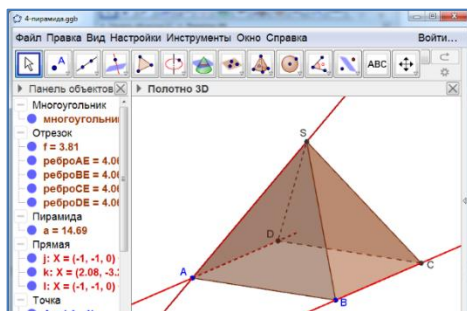


Рис. 3.4

Задача 11.  $30^\circ$ .

Задача 12.  $60^\circ$ .

Задача 13.  $45^\circ$ .

Задача 14.  $60^\circ$ .

Задача 15.  $60^\circ$ .

Задача 16.  $30^\circ$ .

Задача 17. Прямые перпендикулярны. Это можно увидеть, поворачивая призму. Ортогональная проекция прямой  $VA_1$  на плоскость  $A_1B_1C_1$  является прямой  $A_1B_1$ . Она перпендикулярна прямой  $B_1D_1$ . Следовательно, и сама прямая  $VA_1$  перпендикулярна прямой  $B_1D_1$ .

Задача 18. Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $60^\circ$ .

Задача 19. Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $90^\circ$ .

Задача 20. Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $60^\circ$ .

Задача 21. Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $60^\circ$  (рис. 3.5).

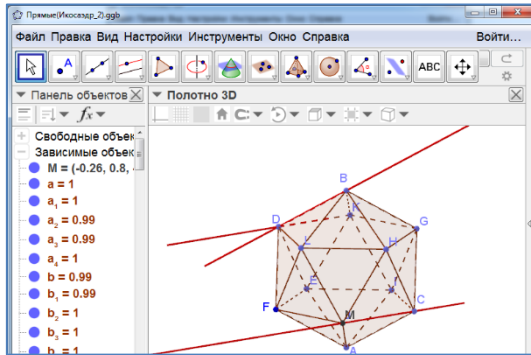


Рис. 3.5

**Задача 22.** Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $36^\circ$  (рис. 3.6).

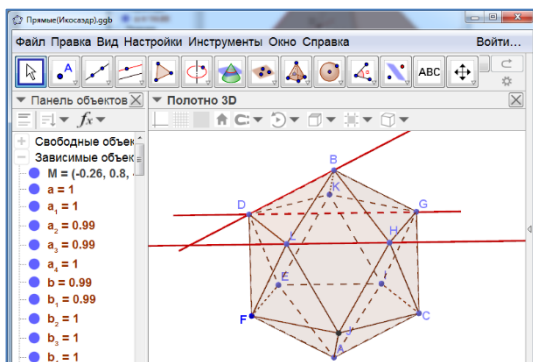


Рис. 3.6

**Задача 23.** Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $90^\circ$  (рис. 3.7).

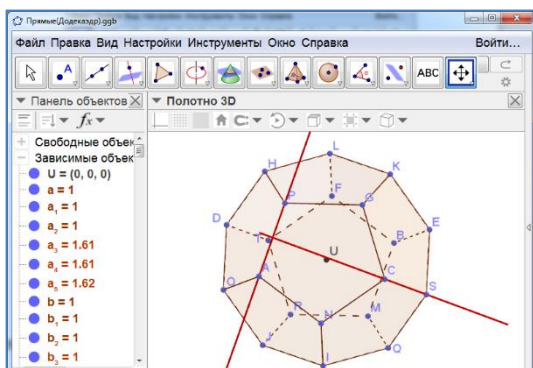


Рис. 3.7

**Задача 24.** Прямые скрещиваются. Угол между ними равен  $60^\circ$  (рис. 3.8).



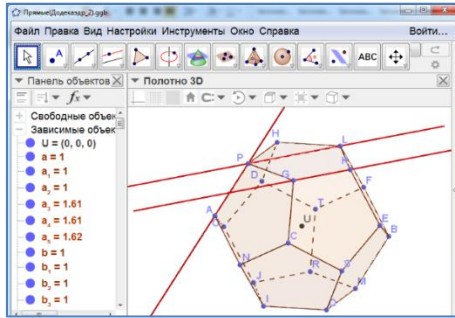


Рис. 3.8

Задача 25. Искомая прямая показана на рисунке 3.9.

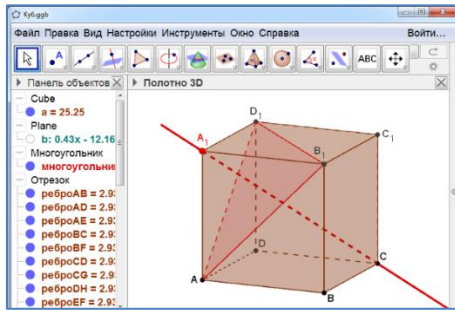


Рис. 3.9

Задача 26. Искомая плоскость показана на рисунке 3.10.

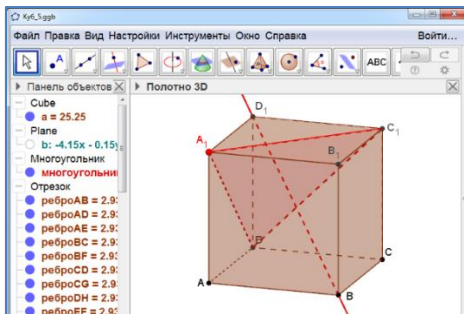


Рис. 3.10

Задача 27. Искомый угол равен  $30^\circ$  (рис. 3.11).

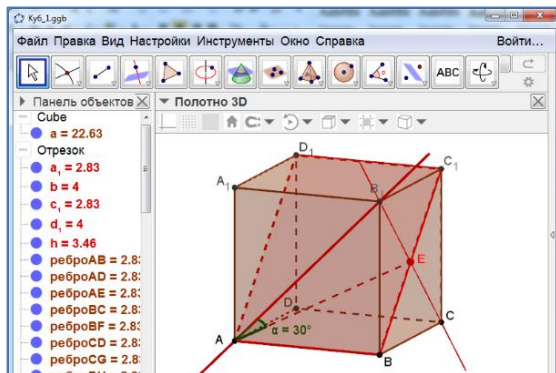


Рис. 3.11

Задача 28. Линейным углом искомого угла между плоскостями является угол  $AGF$ . Он равен  $60^\circ$  (рис. 3.12).

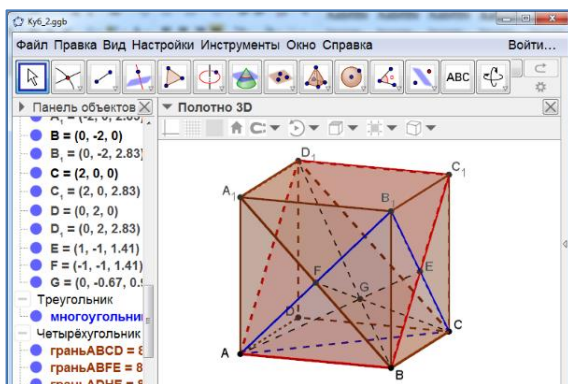


Рис. 3.12

Задача 29. Из вершин  $A$  и  $A_1$  отрезок  $BD_1$  виден под наименьшим углом, равным  $90^\circ$  (рис. 3.13,a);

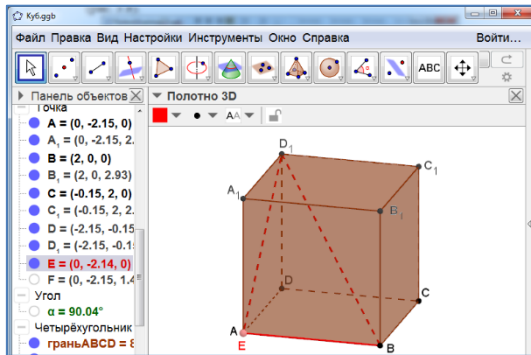


Рис. 3.13,а

б) из середины E ребра AA<sub>1</sub> отрезок BD<sub>1</sub> виден под наибольшим углом, примерно равным 101,54° (рис. 3.13,б).

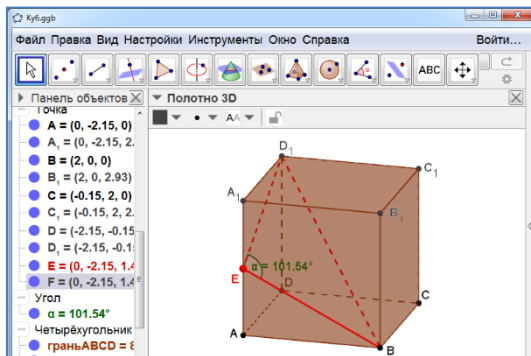


Рис. 3.13,б

**Задача 30.** Отметим середину E ребра AB тетраэдра ABCD. Угол CED является линейным углом двугранного угла тетраэдра (рис. 3.14). Приближённое значение его градусной величины равно 70,53°.

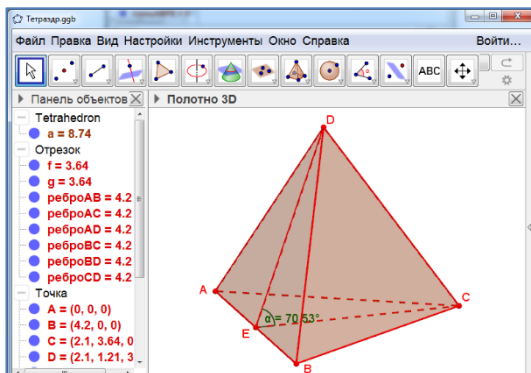


Рис. 3.14

**Задача 31.** Отметим середину  $G$  ребра  $AB$  октаэдра. Угол  $CGD$  является линейным углом двугранного угла октаэдра (рис. 3.15). Приближённое значение его градусной величины равно  $109,47^\circ$ .

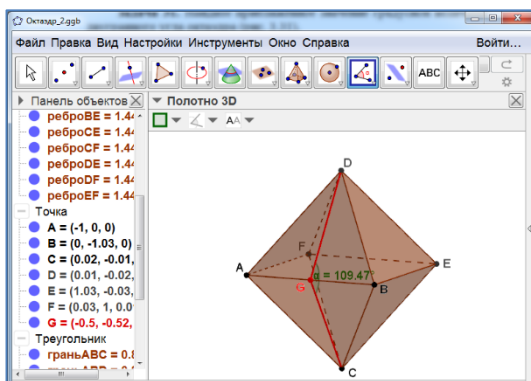


Рис. 3.15

**Задача 32.** Отметим середину  $C$  ребра  $AB$  икосаэдра. Угол  $FCG$  является линейным углом двугранного угла икосаэдра (рис. 3.16). Приближённое значение его градусной величины равно  $138,19^\circ$ .

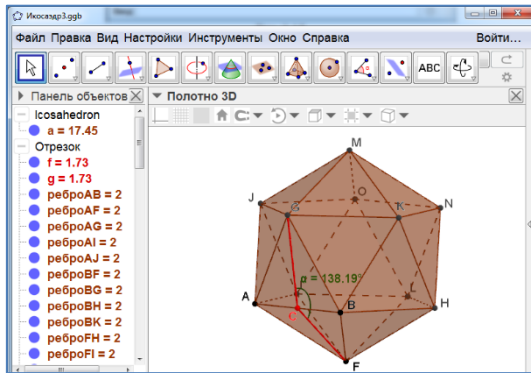


Рис. 3.16

**Задача 33.** Отметим середину  $U$  ребра  $AB$  додекаэдра. Угол  $NUM$  является линейным углом двугранного угла додекаэдра (рис. 3.17). Приближённое значение его градусной величины равно  $116,57^\circ$ .

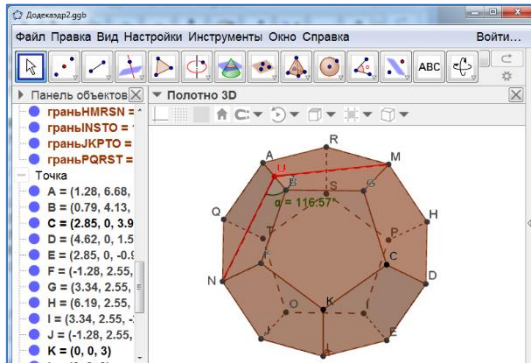


Рис. 3.17

#### 4. РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

**Задача 1.** Искомый перпендикуляр  $AO_1$  показан на рисунке 4.1. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1D_1$  равно  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

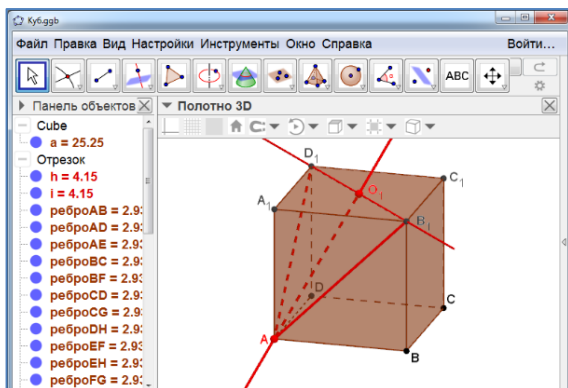


Рис. 4.1

**Задача 2.** Искомый перпендикуляр  $AE$  показан на рисунке 4.2. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $BD_1$  равно  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

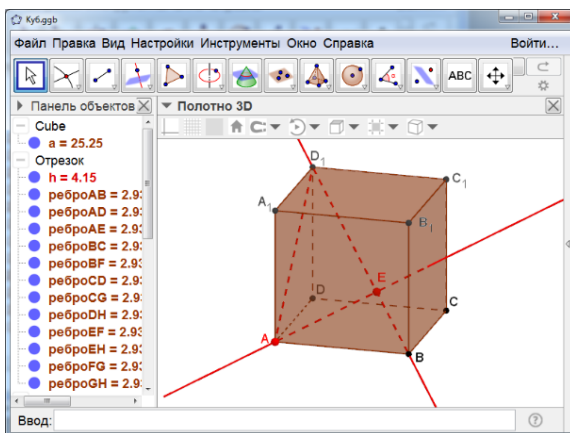


Рис. 4.2

**Задача 3.** Искомый перпендикуляр EF показан на рисунке 4.3. Расстояние от точки E до прямой  $BD_1$  равно  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

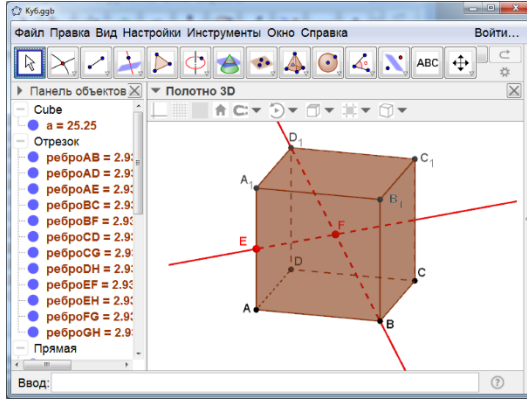


Рис. 4.3

**Задача 4.** Искомый перпендикуляр AD показан на рисунке 4.4. Расстояние от точки A до прямой  $B_1C_1$  равно  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

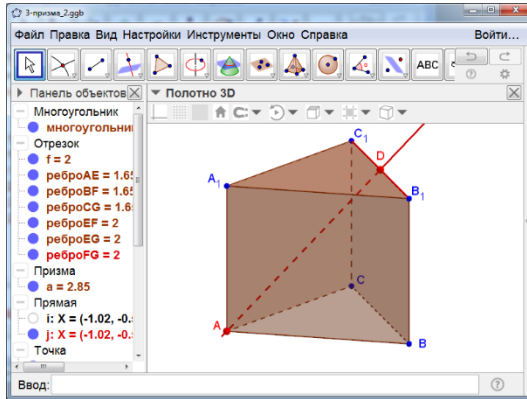


Рис. 4.4

**Задача 5.** Искомый перпендикуляр AD показан на рисунке 4.5. Расстояние от точки A до прямой  $BC_1$  равно  $\frac{\sqrt{14}}{4}$ .

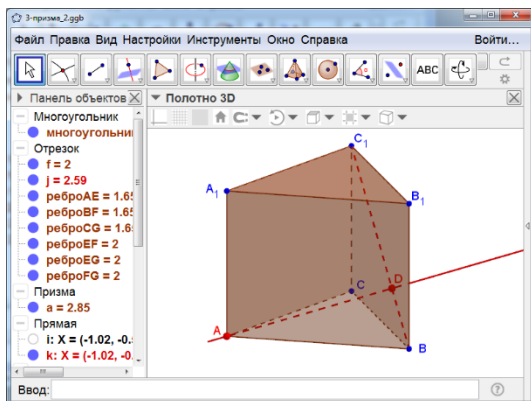


Рис. 4.5

**Задача 6.** Искомый перпендикуляр DE показан на рисунке 4.6. Расстояние от точки D до прямой  $BC_1$  равно  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

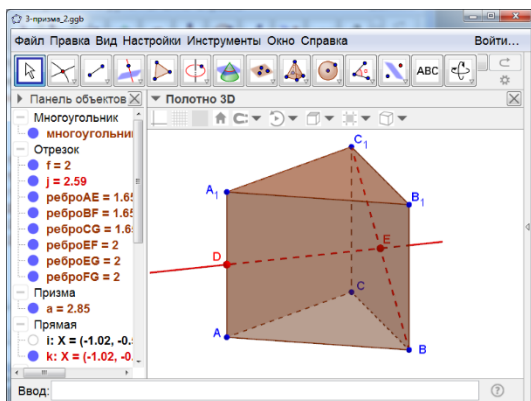


Рис. 4.6



**Задача 7.** Искомый перпендикуляр  $AC_1$  показан на рисунке 4.7. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1D_1$  равно 2.

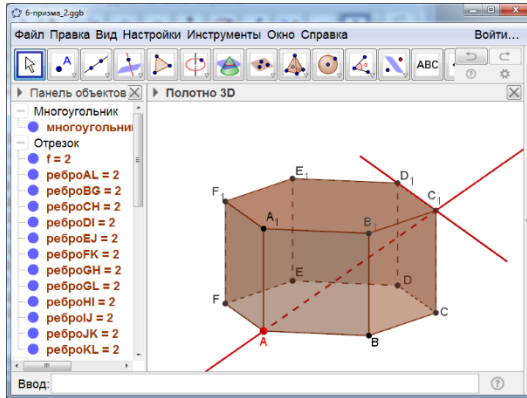


Рис. 4.7

**Задача 8.** Искомый перпендикуляр  $AC$  показан на рисунке 4.8. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $CB_1$  равно  $\sqrt{3}$ .

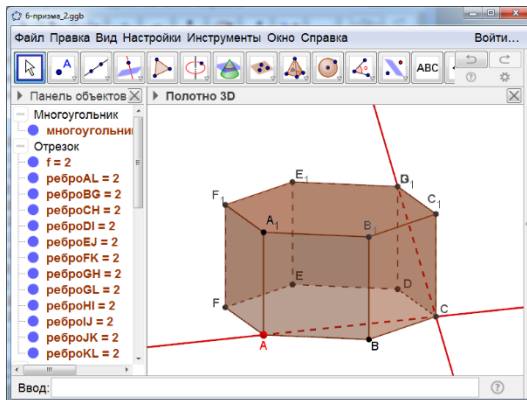


Рис. 4.8

**Задача 9.** Искомый перпендикуляр АН показан на рисунке 4.9. Расстояние от точки А до прямой В<sub>1</sub>С<sub>1</sub> равно  $\frac{\sqrt{7}}{2}$ .

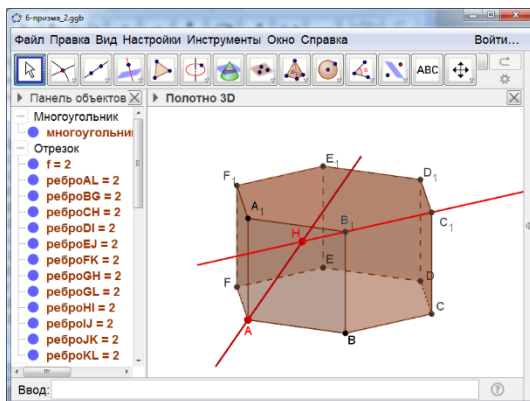


Рис. 4.9

**Задача 10.** Искомый перпендикуляр АН показан на рисунке 4.10. Расстояние от точки А до прямой ВЕ<sub>1</sub> равно  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

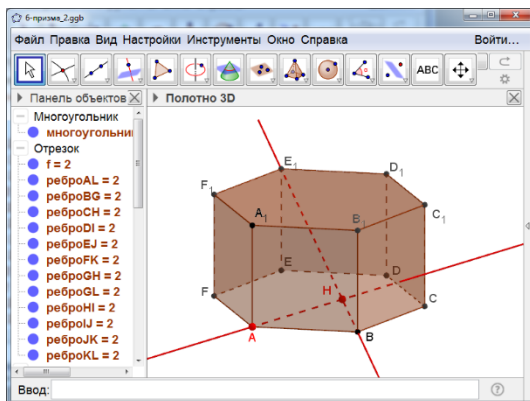


Рис. 4.10

**Задача 11.** Искомый перпендикуляр  $A_1H$  показан на рисунке 4.11. Расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $AB_1D_1$  равно  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

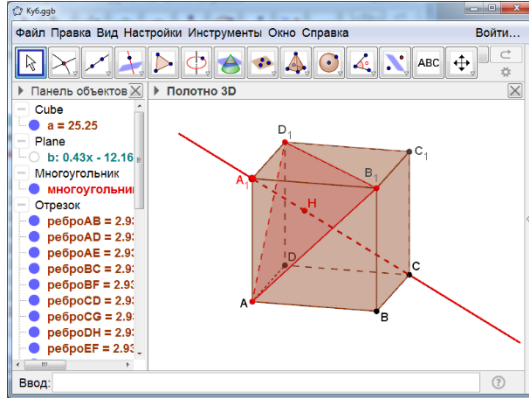


Рис. 4.11

**Задача 12.** Искомый перпендикуляр  $A_1H$  показан на рисунке 4.12. Расстояние от точки  $A_1$  до плоскости  $AB_1C_1$  равно  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

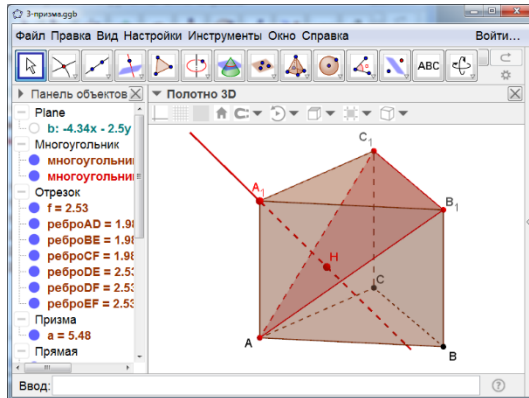


Рис. 4.12

**Задача 13.** Искомый перпендикуляр  $AC$  показан на рисунке 4.13. Расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CC_1D_1$  равно  $\sqrt{3}$ .

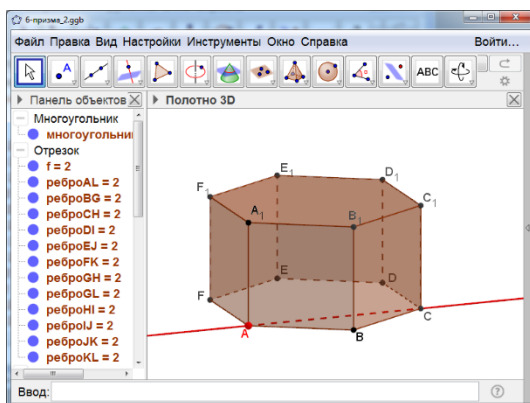


Рис. 4.13

**Задача 14.** Искомый перпендикуляр  $AN$  показан на рисунке 4.14. Расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CC_1E_1$  равно  $1,5$ .

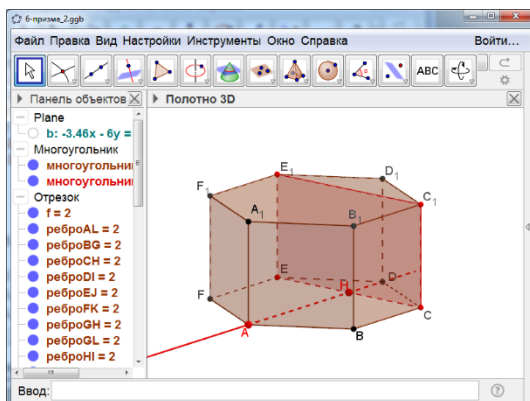


Рис. 4.14

## 5. СЕЧЕНИЯ

**Задача 1.** Выберем в меню окошко с изображением трёх точек и плоскости. Отметим левой кнопкой мыши три точки, принадлежащие указанным рёбрам куба. В результате появится плоскость, проходящая через эти точки (рис. 5.1).

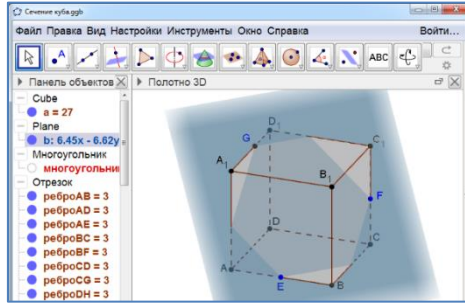


Рис. 5.1

Для получения сечения куба этой плоскостью выберем в меню окошко с изображением конуса, пересеченного плоскостью. Нажмем левой кнопкой мыши по надписи "Cube" в левой верхней части рабочего окна и затем по плоскости. В результате получится искомое сечение (рис. 5.2).

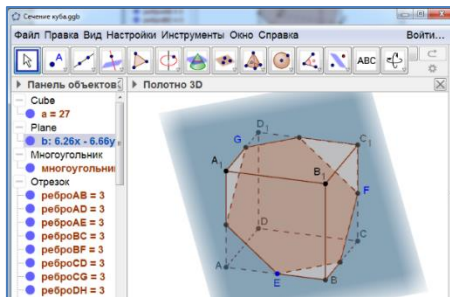


Рис. 5.2

Саму плоскость можно убрать, нажав на неё правой кнопкой мыши и затем нажав на окошко в строке «Показывать объект». В результате останется только само сечение куба (рис. 5.3).

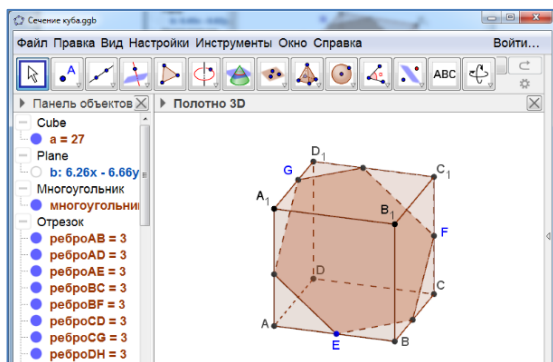


Рис. 5.3

Положение точек, указанных для построения сечения можно изменять. Для этого нужно нажать левой кнопкой мыши на одну из них и перемещать её по ребру. При этом сечение будет также изменяться. На рисунке 5.4 показан пример такого изменения.

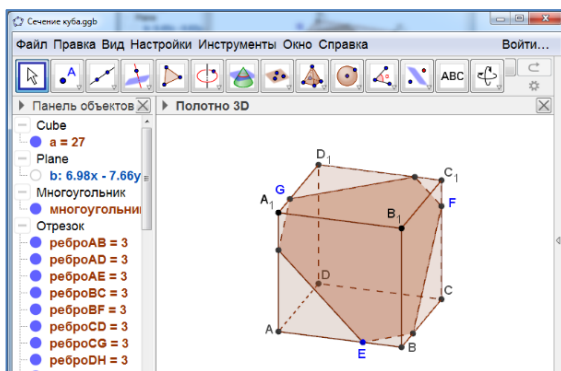


Рис. 5.4

**Задача 2.** С помощью инструмента «Перпендикулярная плоскость» проведём плоскость через точку E, перпендикулярную прямой  $BD_1$  (рис. 5.5).

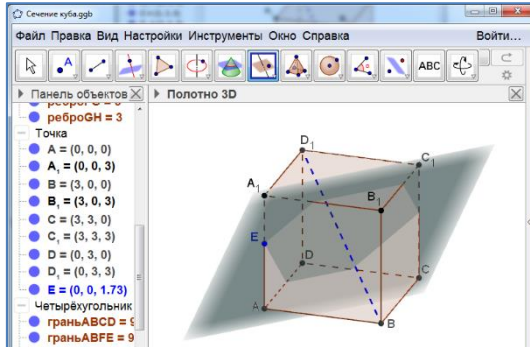


Рис. 5.5

Найдём линию пересечения этой плоскости и куба. Скроем саму плоскость (рис. 5.6).

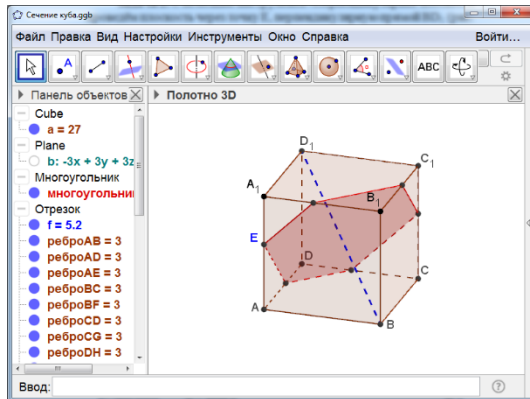


Рис. 5.6

Положение точки, указанной для построения сечения можно изменять. При этом сечение будет также изменяться. На рисунке 5.7 показан пример такого изменения.

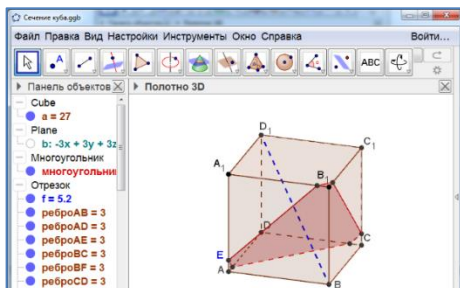


Рис. 5.7

Задача 3. Пример, когда сечением куба является ромб, показан на рисунке 5.8,а.

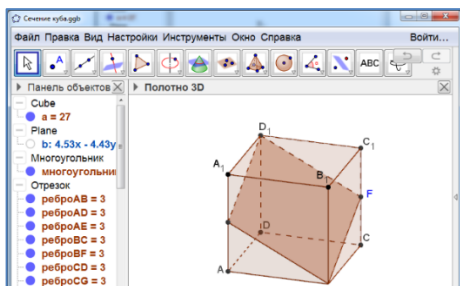


Рис. 5.8,а

Пример, когда сечением куба является трапеция, показан на рисунке 5.8,б.

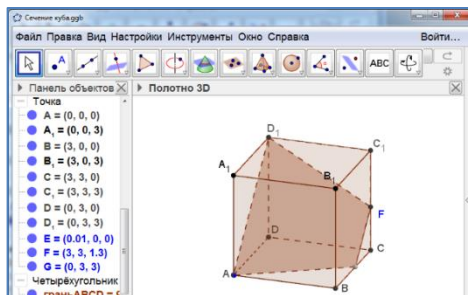


Рис. 5.8,б



Пример, когда сечением куба является пятиугольник, показан на рисунке 5.8,в.

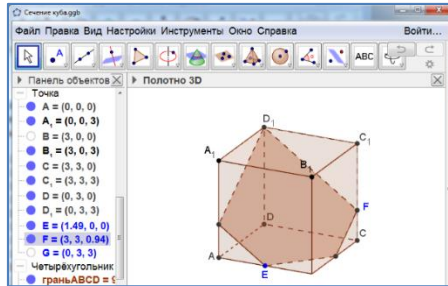


Рис. 5.8,в

Задача 4. Сечение показано на рисунке 5.9.

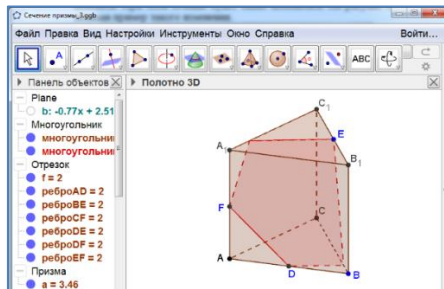


Рис. 5.9

Задача 5. Сечением является квадрат (рис. 5.10).

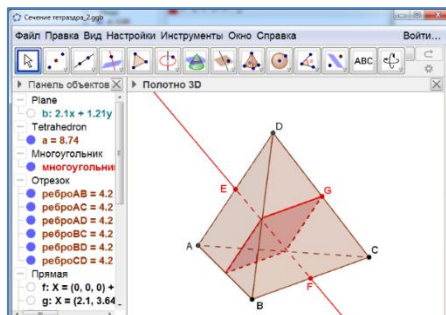


Рис. 5.10

Задача 6. Сечение показано на рисунке 5.11.

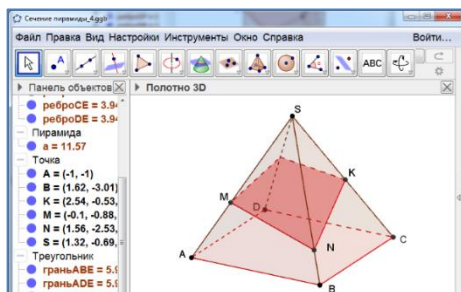


Рис. 5.11

Задача 7. Сечение показано на рисунке 5.12.

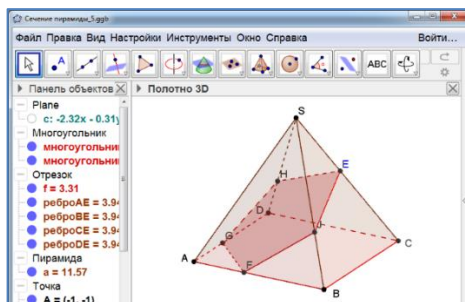


Рис. 5.12

Задача 8. Пример, когда сечением правильной 4-й пирамиды является трапеция, показан на рисунке 5. 13.

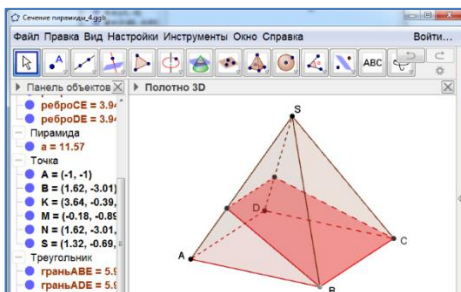


Рис. 5.13

Задача 9. Сечение показано на рисунке 5.14.

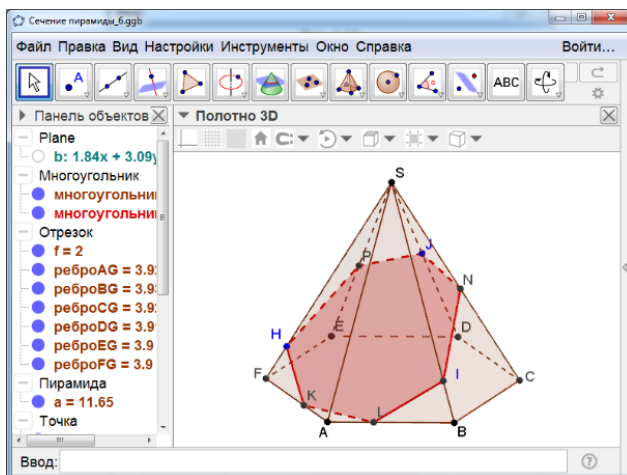


Рис. 5.14

Задача 10. Сечение показано на рисунке 5.15.

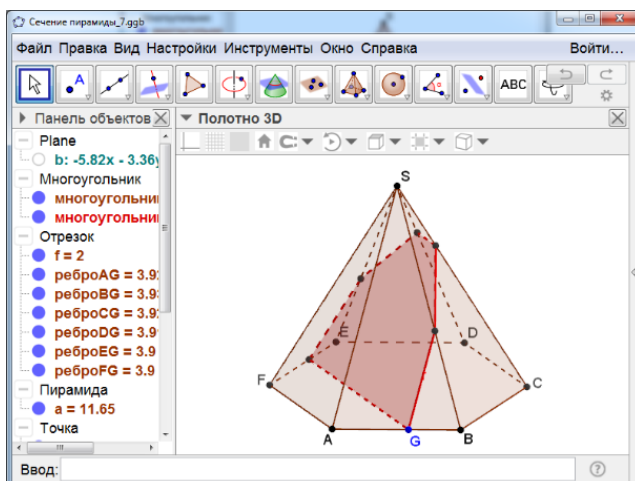


Рис. 5.15

Задача 11. Сечение показано на рисунке 5.16.

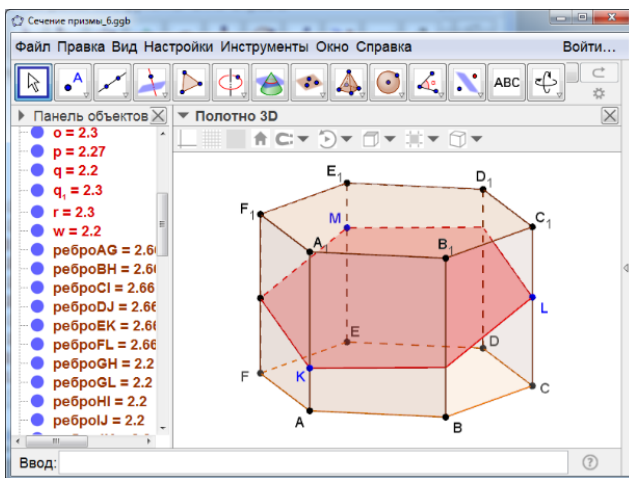


Рис. 5.16

Задача 12. Сечением является правильный шестиугольник (рис. 5.17).

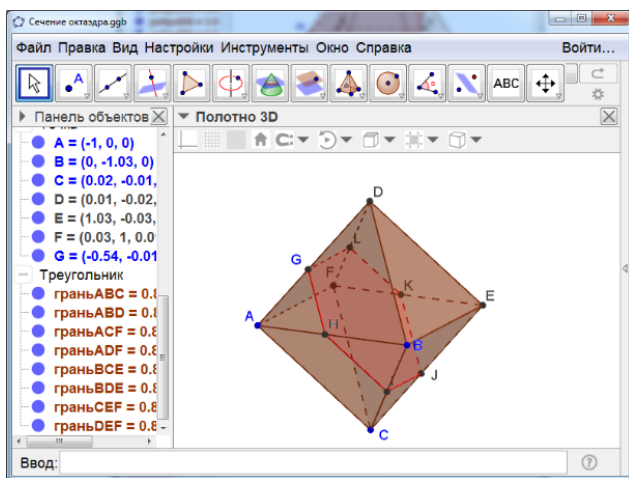


Рис. 5.17

Задача 13. Сечением является правильный 10-угольник (рис. 5.18).

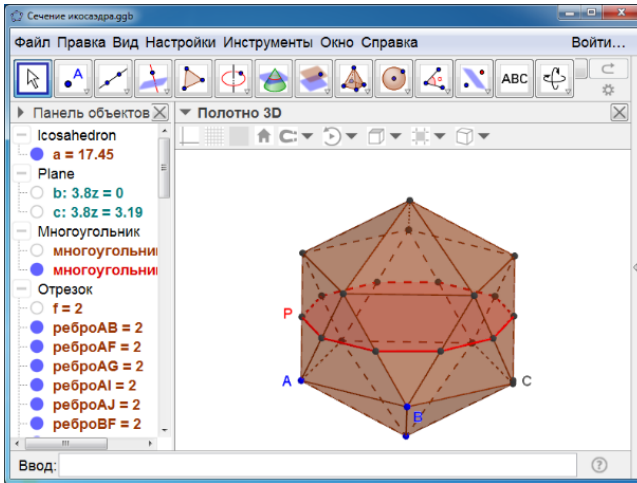


Рис. 5.18

Задача 14. Сечением является правильный 10-угольник (рис. 5.19).

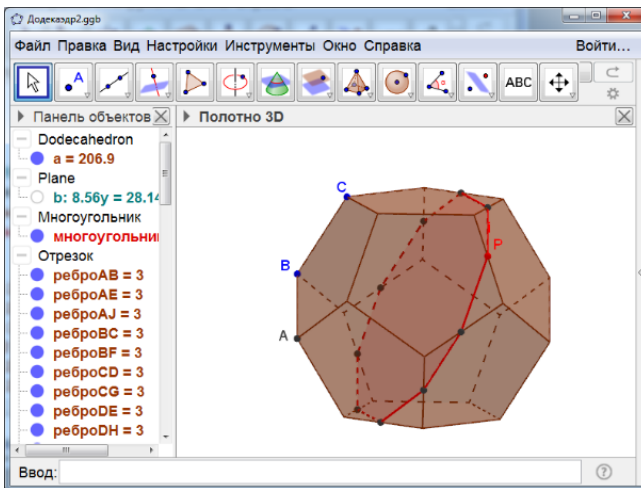


Рис. 5.19

Задача 15. Сечением является эллипс (рис. 5.20).

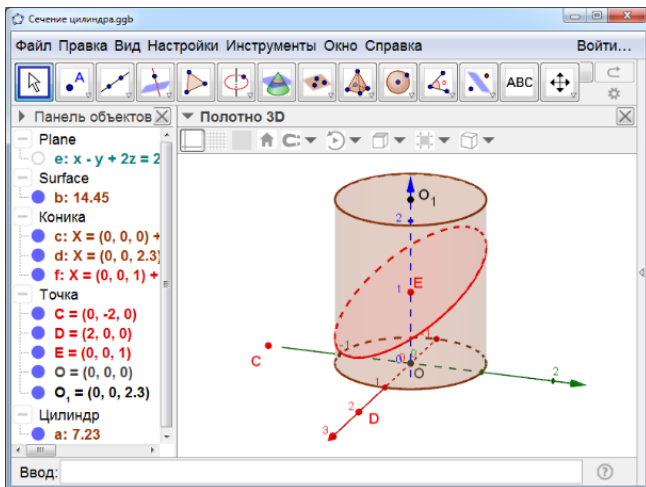


Рис. 5.20

Задача 16. Сечением является эллипс (рис. 5.21).

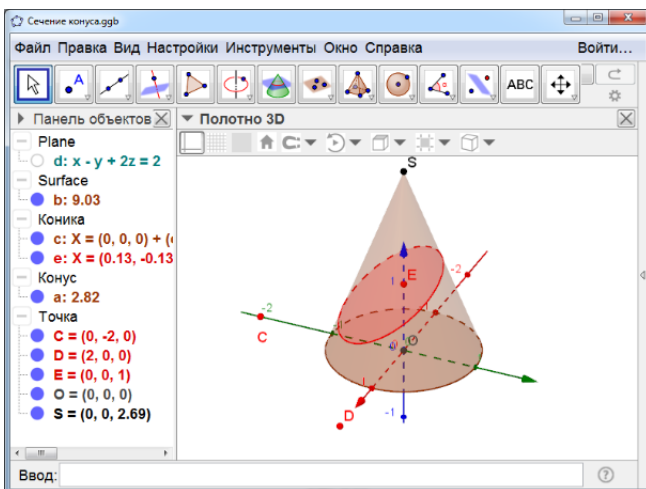


Рис. 5.21

Задача 17. Сечением является парабола (рис. 5.22).

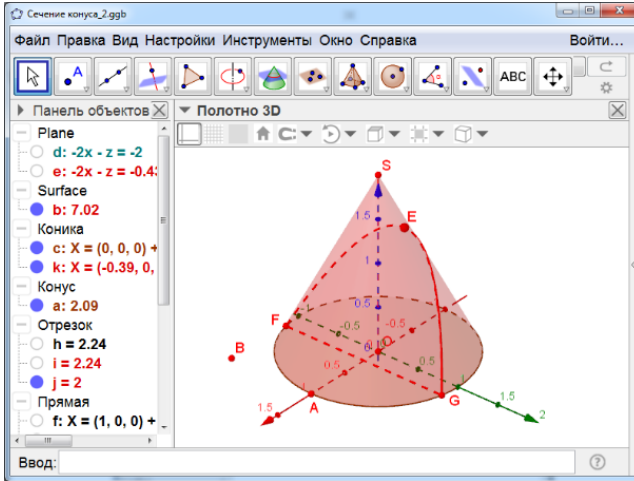


Рис. 5.22

Задача 18. Сечением является ветвь гиперболы (рис. 5.23).

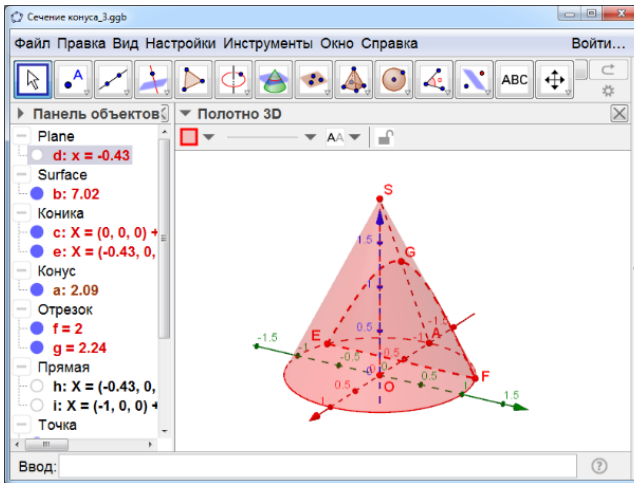


Рис. 5.23

## 6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Задача 1. Сфера, вписанная в куб, изображена на рисунке 6.1.

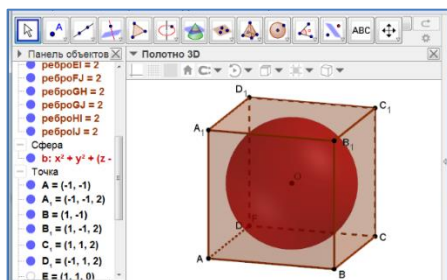


Рис. 6.1

Задача 2. Сфера, вписанная в тетраэдр, изображена на рисунке 6.2.

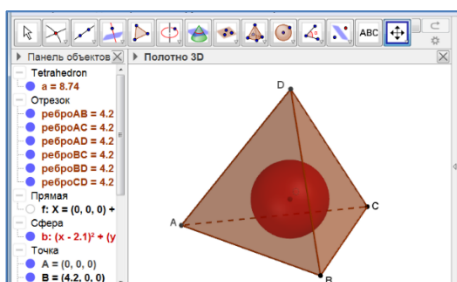


Рис. 6.2

Задача 3. Сфера, вписанная в правильную 4-ю пирамиду, изображена на рисунке 6.3.

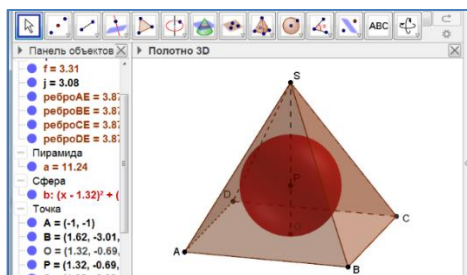


Рис. 6.3



**Задача 4.** Сфера, вписанная в правильную 6-ю пирамиду, изображена на рисунке 6.4.

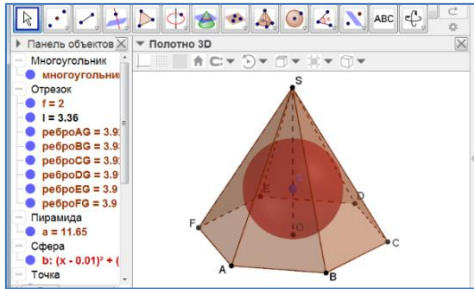


Рис. 6.4

**Задача 5.** Сфера, вписанная в правильную 3-ю призму, изображена на рисунке 6.5.

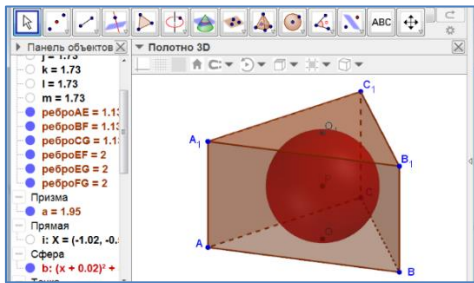


Рис. 6.5

**Задача 6.** Сфера, вписанная в правильную 6-ю призму, изображена на рисунке 6.6.

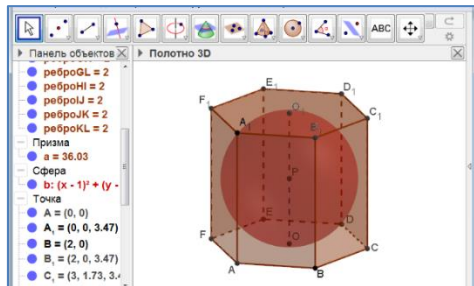


Рис. 6.6

Задача 7. Сфера, вписанная в октаэдр, изображена на рисунке 6.7.

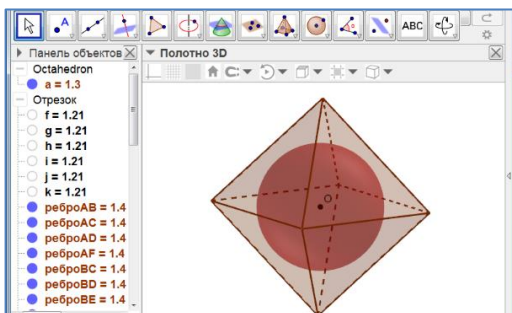


Рис. 6.7

Задача 8. Сфера, вписанная в икосаэдр, изображена на рисунке 6.8.

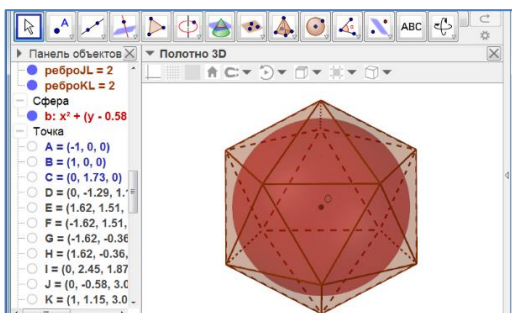


Рис. 6.8

Задача 9. Сфера, вписанная в додекаэдр, изображена на рисунке 6.9.

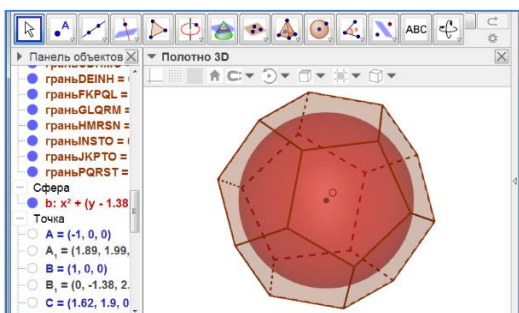


Рис. 6.9

Задача 10. Сфера, вписанная в цилиндр, изображена на рисунке 6.10.

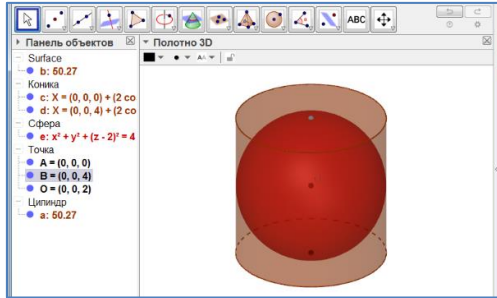


Рис. 6.10

Задача 11. Сфера, вписанная в конус, изображена на рисунке 6.11.

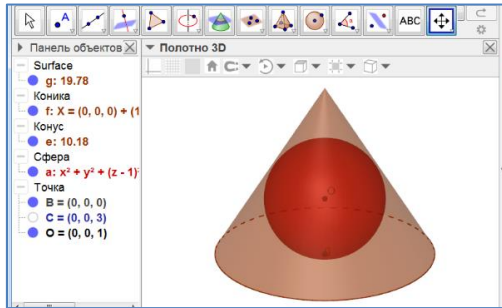


Рис. 6.11

Задача 12. Сфера, описанная около куба, изображена на рисунке 6.12.

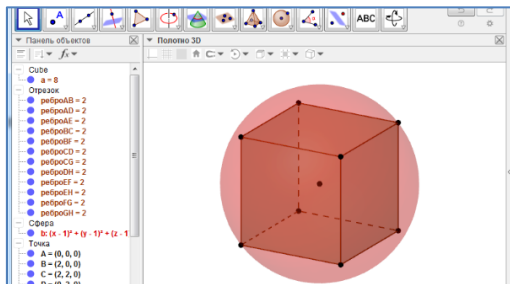


Рис. 6.12

**Задача 13.** Сфера, описанная около тетраэдра, изображена на рисунке 6.13.

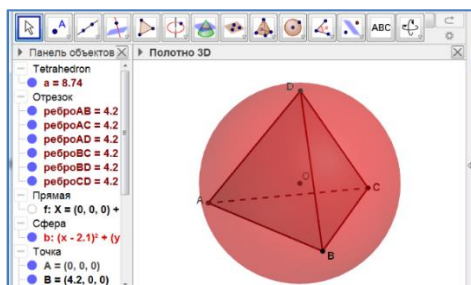


Рис. 6.13

**Задача 14.** Сфера, описанная около правильной 4-й пирамиды, изображена на рисунке 6.14.

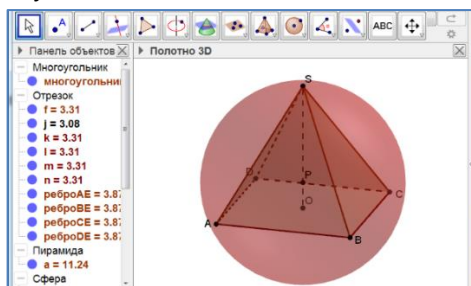


Рис. 6.14

**Задача 15.** Сфера, описанная около правильной 4-й пирамиды, изображена на рисунке 6.15.

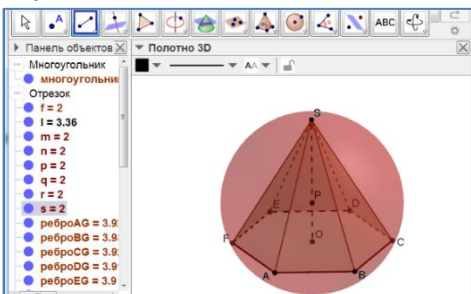


Рис. 6.15

**Задача 16.** Сфера, описанная около правильной 3-й призмы, изображена на рисунке 6.16.

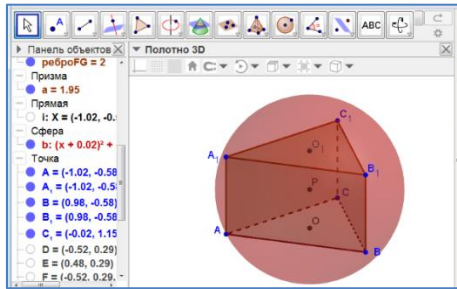


Рис. 6.16

**Задача 17.** Сфера, описанная около правильной 6-й призмы, изображена на рисунке 6.17.

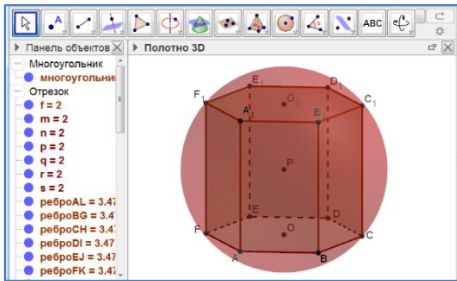


Рис. 6.17

**Задача 18.** Сфера, описанная около октаэдра, изображена на рисунке 6.18.

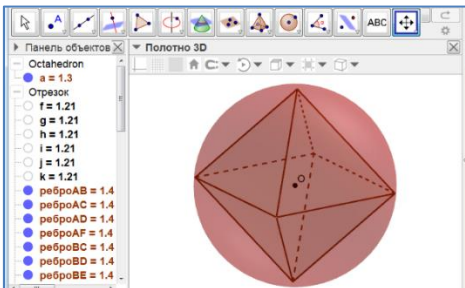


Рис. 6.18

**Задача 19.** Сфера, описанная около икосаэдра, изображена на рисунке 6.19.

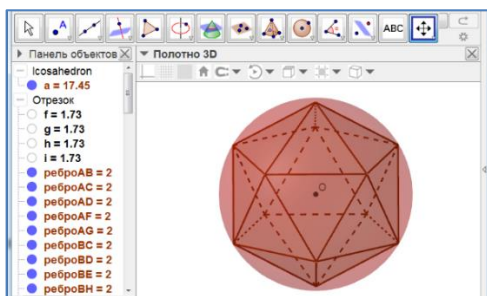


Рис. 6.19

**Задача 20.** Сфера, описанная около додекаэдра, изображена на рисунке 6.20.

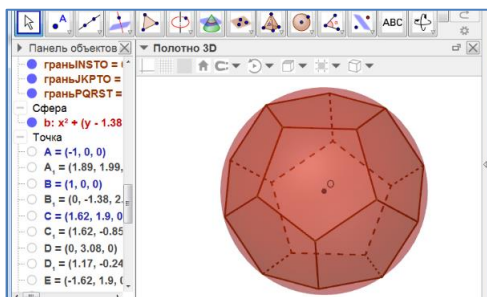


Рис. 6.20

**Задача 21.** Сфера, описанная около цилиндра, изображена на рисунке 6.21.

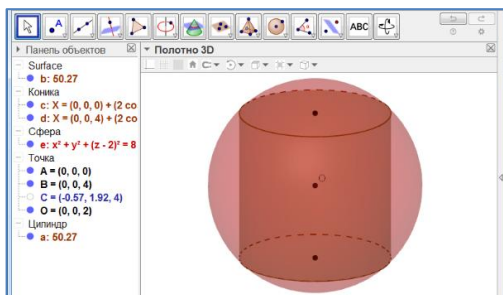


Рис. 6.21

**Задача 22.** Сфера, описанная около конуса, изображена на рисунке 6.22.

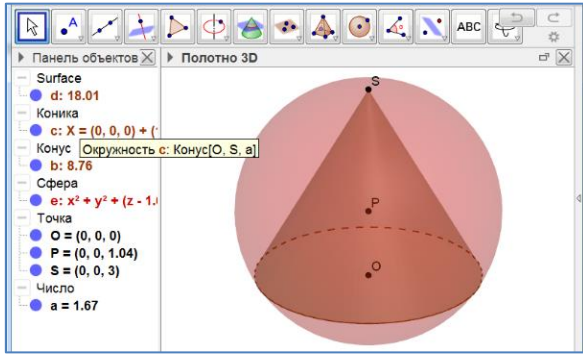


Рис. 6.22

**Задача 23.** Изобразим прямую треугольную призму  $ABC A_1 B_1 C_1$ . Опишем окружность около треугольника  $ABC$  и найдём её центр  $O_1$ . Через точку  $O_1$  проведём прямую, перпендикулярную плоскости  $ABC$ . Найдём точку  $O_2$  пересечения этой прямой с плоскостью  $A_1 B_1 C_1$ . Отметим середину  $O$  отрезка  $O_1 O_2$ . Проведём сферу с центром в точке  $O$ , проходящую через точку  $A$  (рис. 6.23). Эта сфера и будет искомой сферой, описанной около данной треугольной призмы.

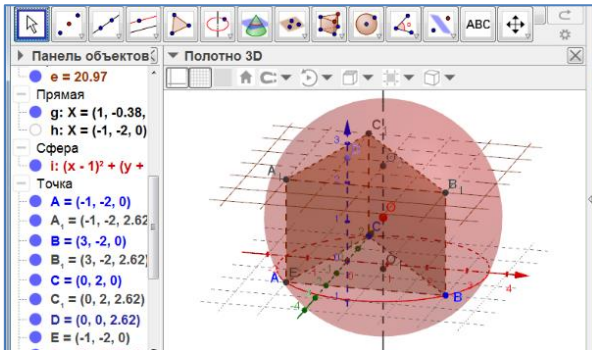


Рис. 6.23

**Задача 24.** Изобразим треугольную пирамиду  $SABC$ . Опишем окружность около треугольника  $ABC$  и найдём её центр  $F$ . Опишем

окружность около треугольника  $ABS$  и найдём её центр  $G$ . Через точку  $F$  проведём прямую, перпендикулярную плоскости  $ABC$ . Через точку  $G$  проведём прямую, перпендикулярную плоскости  $ABS$ . Найдём точку  $O$  пересечения этих прямых. Проведём сферу с центром в точке  $O$ , проходящую через точку  $A$  (рис. 6.24). Эта сфера и будет искомой сферой, описанной около данной треугольной пирамиды.

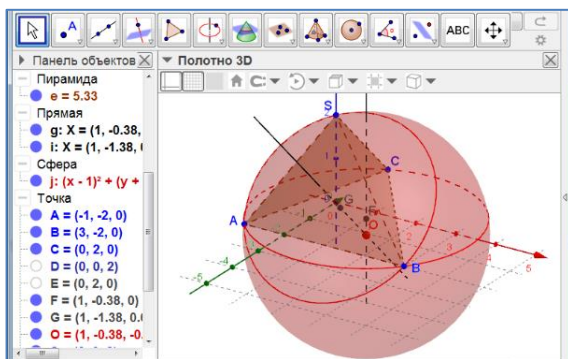


Рис. 6.24

## 7. КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

**Задача 1.** Тетраэдр, вписанный в куб, изображён на рисунке 7.1.

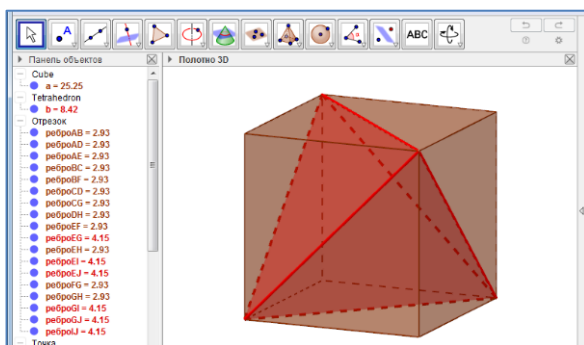


Рис. 7.1



Задача 2. Октаэдр, вписанный в куб, изображён на рисунке 7.2.

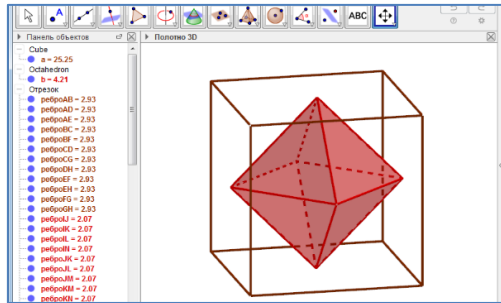


Рис. 7.2

Задача 3. Икосаэдр, вписанный в куб, изображён на рисунке 7.3.

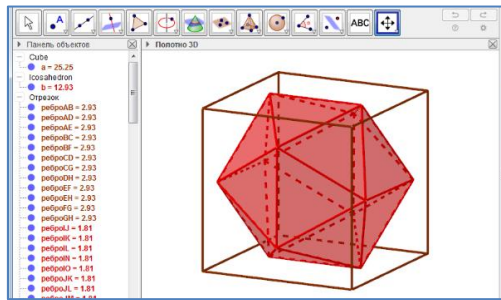


Рис. 7.3

Задача 4. Додекаэдр, вписанный в куб, изображён на рисунке 7.4.

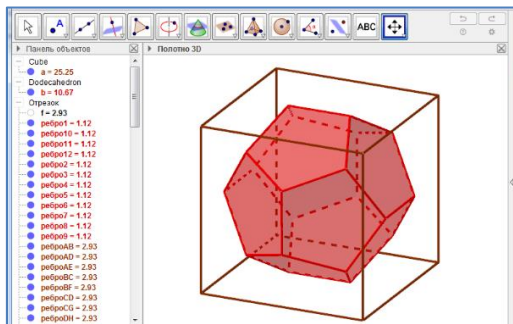


Рис. 7.4

Задача 5. Октаэдр, вписанный в тетраэдр, изображён на рисунке 7.5.

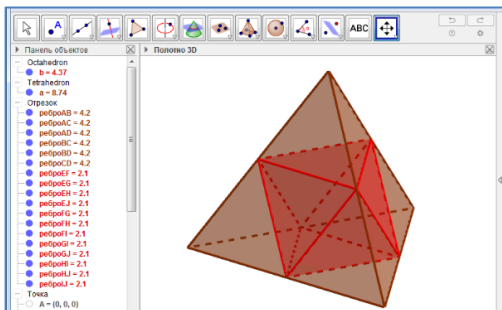


Рис. 7.5

Задача 6. Куб, вписанный в октаэдр, изображён на рисунке 7.6.

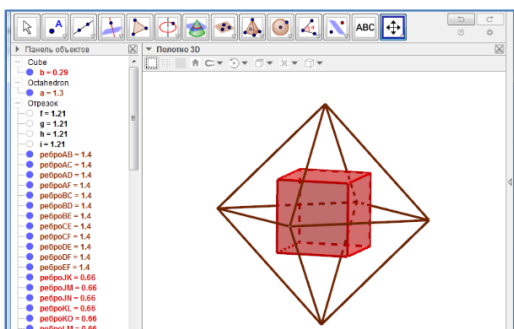


Рис. 7.6

Задача 7. Икосаэдр, вписанный в октаэдр, изображён на рисунке 7.7.

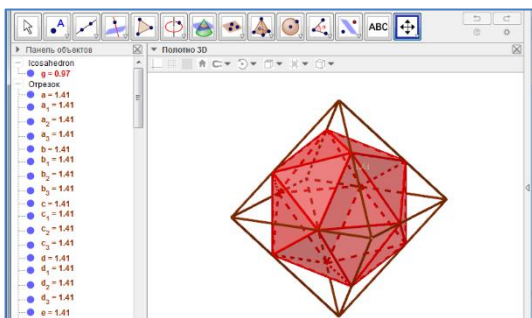


Рис. 7.7

Задача 8. Додекаэдр, вписанный в икосаэдр, изображён на рисунке 7.8.

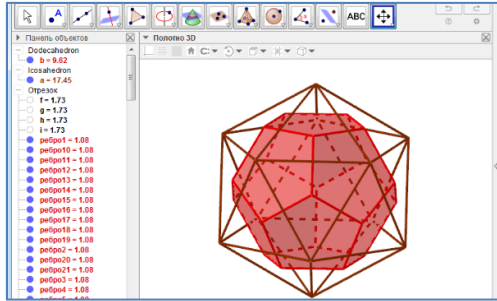


Рис. 7.8

Задача 9. Куб, вписанный в додекаэдр, изображён на рисунке 7.9.

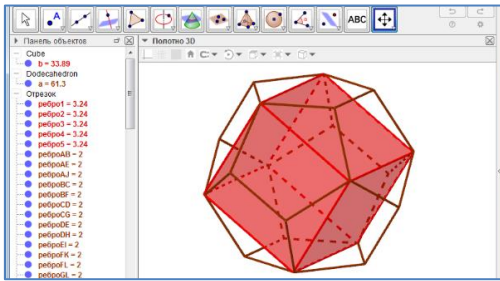


Рис. 7.9

Задача 10. Икосаэдр, вписанный в додекаэдр, изображён на рисунке 7.10.

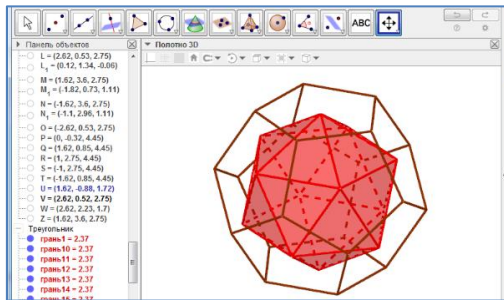


Рис. 7.10

**Задача 11.** Куб, вписанный в додекаэдр, вписанный в икосаэдр, изображён на рисунке 7.11.

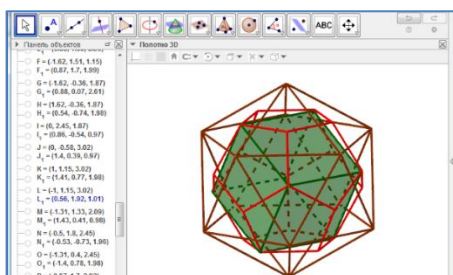


Рис. 7.11

**Задача 12.** Октаэдр, вписанный в тетраэдр, вписанный в куб, вписанный в додекаэдр, вписанный в икосаэдр, изображён на рисунке 7.12.

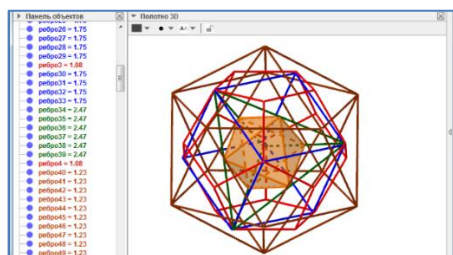


Рис. 7.12

## 8. ДВИЖЕНИЕ

**Задача 1.** Правильная шестиугольная пирамида (рис. 8.1).

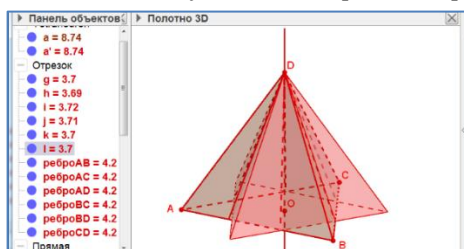


Рис. 8.1

Задача 2. Правильная восьмиугольная пирамида (рис. 8.2).

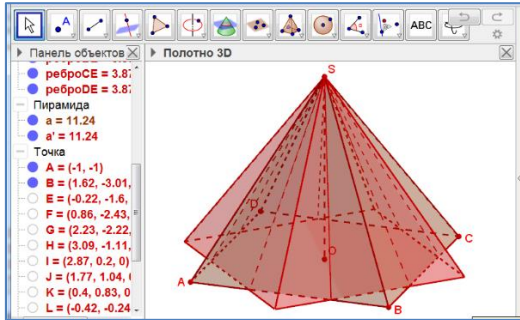


Рис. 8.2

Задача 3. Правильная десятиугольная призма (рис. 8.3).

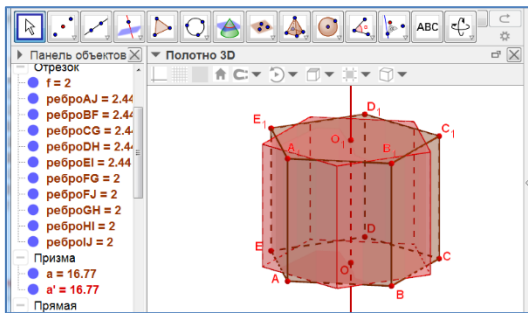


Рис. 8.3

Задача 4. Октаэдр (рис. 8.4).

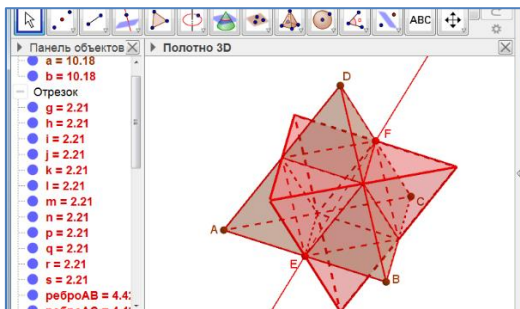


Рис. 8.4

Задача 5. Правильная шестиугольная бипирамида (рис. 8.5).

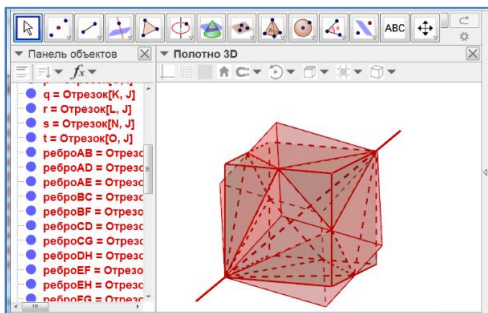


Рис. 8.5

Задача 6. Правильная четырёхугольная призма, на две противоположные грани которой поставлены правильные четырёхугольные пирамиды (рис. 8.6).

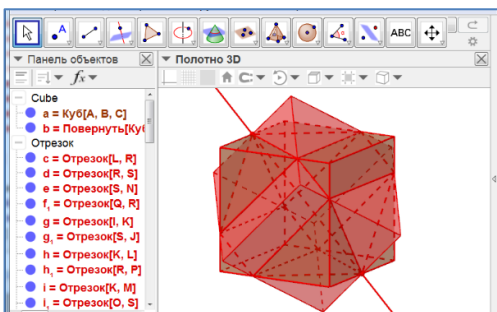


Рис. 8.6

Задача 7. Октаэдр (рис. 8.7).

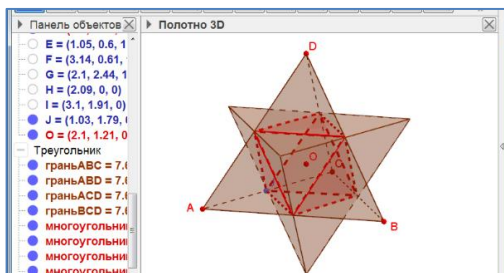


Рис. 8.7

Задача 8. Октаэдр, на две противоположные грани которого поставлены правильные тетраэдры (рис. 8.8).

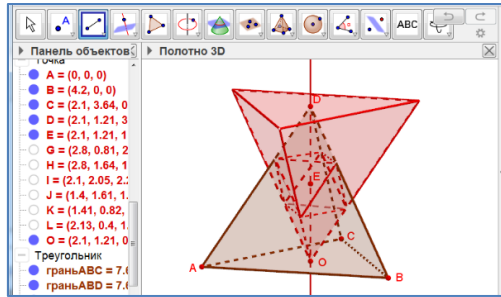


Рис. 8.8

Задача 9. Боковая поверхность цилиндра (рис. 8.9).

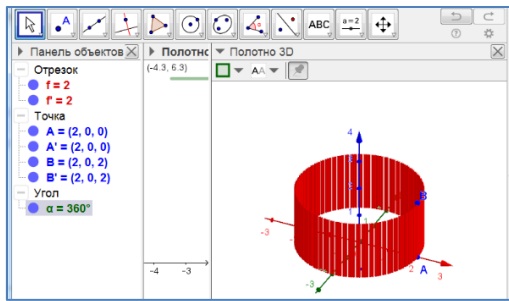


Рис. 8.9

Задача 10. Боковая поверхность усечённого конуса (рис. 8.10).

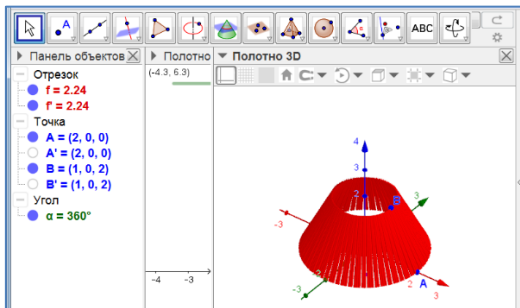


Рис. 8.10

Задача 11. Конус (рис. 8.11).

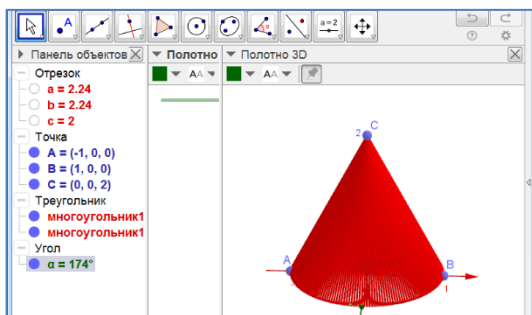


Рис. 8.11

Задача 12. Два конуса с общим основанием (рис. 8.12).

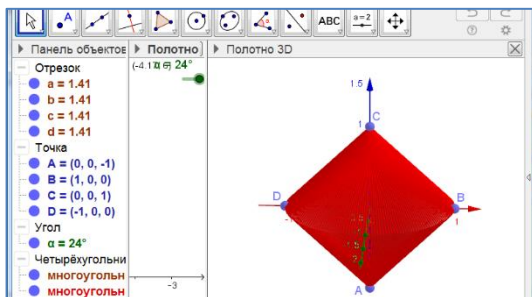


Рис. 8.12

Задача 13. Цилиндр и два конуса с основаниями, поставленными на основания цилиндра (рис. 8.13).

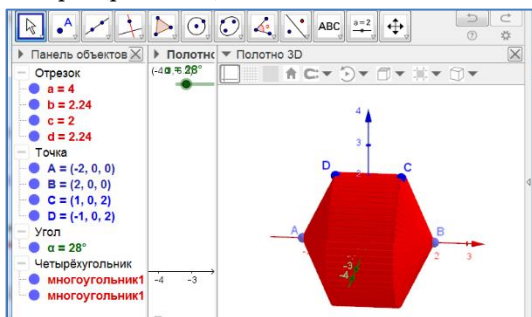


Рис. 8.13



Задача 14. Два цилиндра (рис. 8.14).

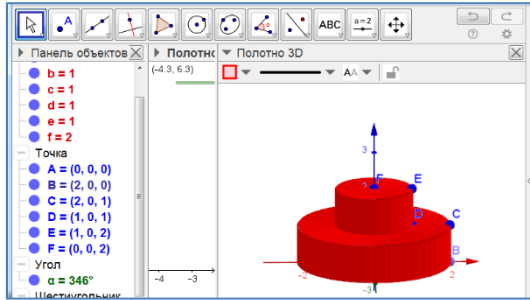


Рис. 8.14

Задача 15. Часть гиперболоида вращения (рис. 8.15).

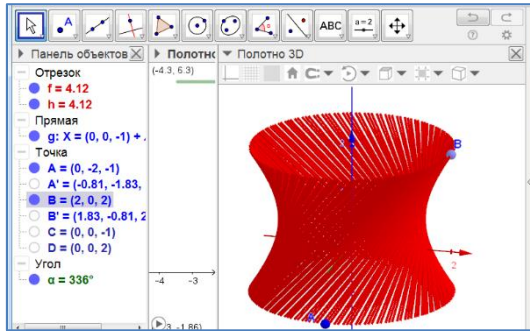


Рис. 8.15

Задача 16. Два конуса с общим основанием (рис. 8.16).

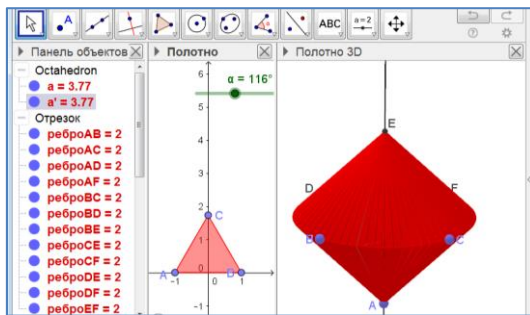


Рис. 8.16

Задача 17. Два конуса с общим основанием (рис. 8.17).

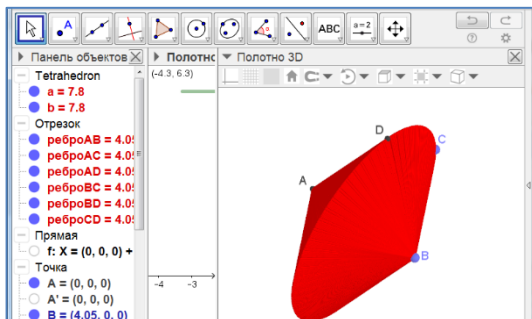


Рис. 8.17

Задача 18. Два цилиндра (рис. 8.18).

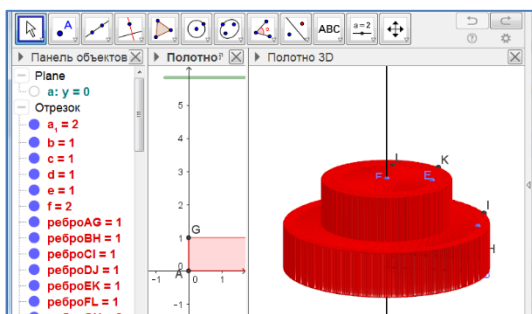


Рис. 8.18

Задача 19. Часть гиперболоида вращения (рис. 8.19).

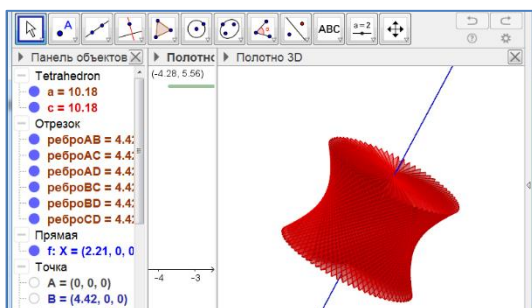


Рис. 8.19

Задача 20. Части двух гиперboloидов (рис. 8.20).

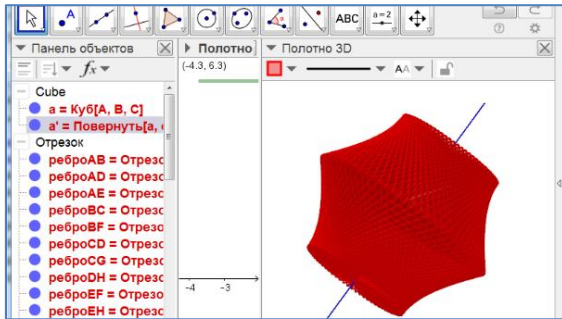


Рис. 8.20

Задача 21. Два конуса и часть гиперboloида между ними (рис. 8.21).

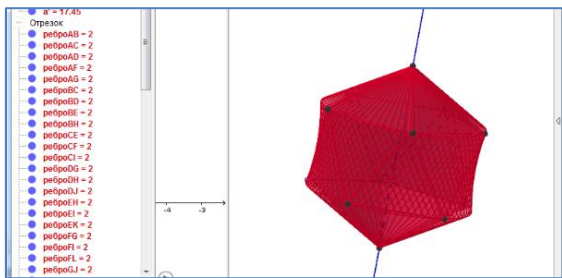


Рис. 8.21

Задача 22. Два конуса и три части гиперboloида между ними (рис. 8.22).

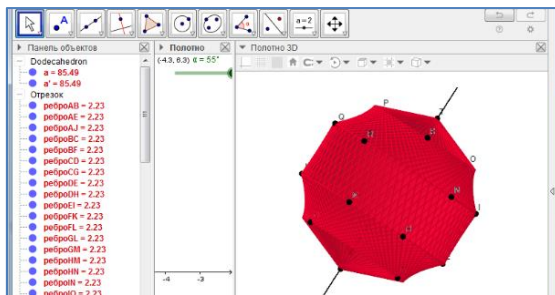


Рис. 8.22

Задача 23. Тор (рис. 8.23).

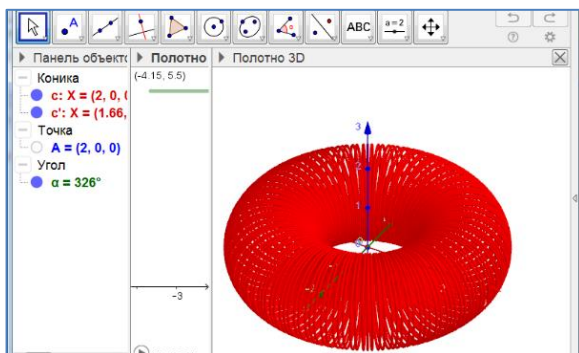


Рис. 8.23

## 9. ОБЪЁМЫ

Задача 1. Искомым многогранником является треугольная призма (рис. 9.1). Её объём равен 0,5.

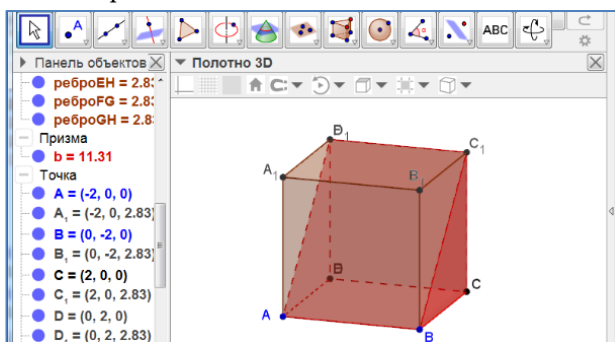


Рис. 9.1

Задача 2. Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида (рис. 9.2). Её объём равен  $\frac{1}{3}$ .

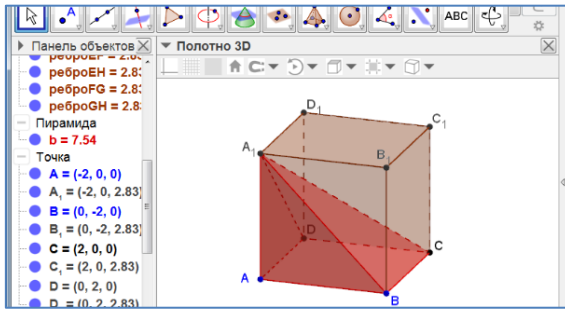


Рис. 9.2

**Задача 3.** Искомым многогранником является треугольная пирамида (рис. 9.3). Её объём равен  $\frac{1}{6}$ .

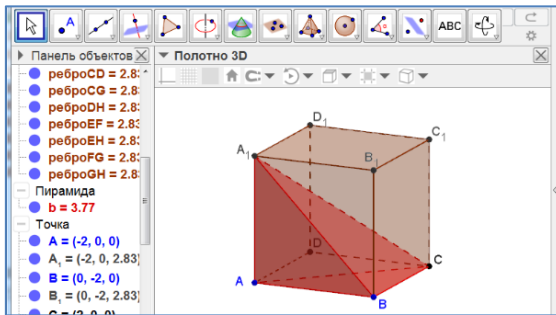


Рис. 9.3

**Задача 4.** Искомым многогранником является тетраэдр (рис. 9.4). Его объём равен  $\frac{1}{3}$ .

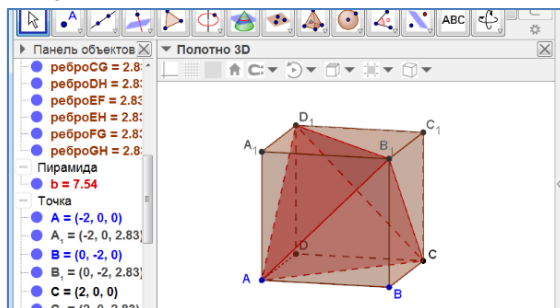


Рис. 9.4

**Задача 5.** Указанные призмы показаны на рисунке 9.5. Их общей частью является треугольная призма. Её объём равен  $0,25$ .

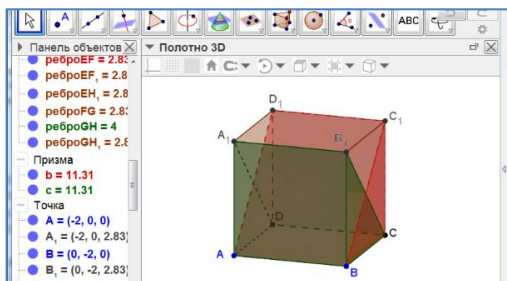


Рис. 9.5

**Задача 6.** Указанные призмы показаны на рисунке 9.6. Их общей частью является четырёхугольная пирамида. Её объём равен  $\frac{1}{3}$ .

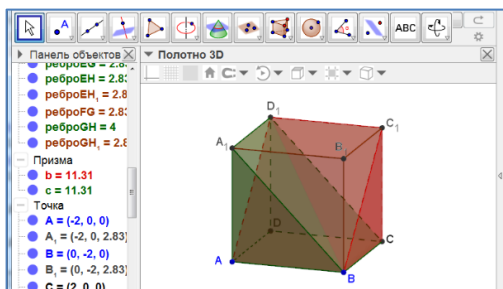


Рис. 9.6

**Задача 7.** Указанные пирамиды показаны на рисунке 9.7. Их общей частью является треугольная пирамида. Её объём равен  $\frac{1}{12}$ .

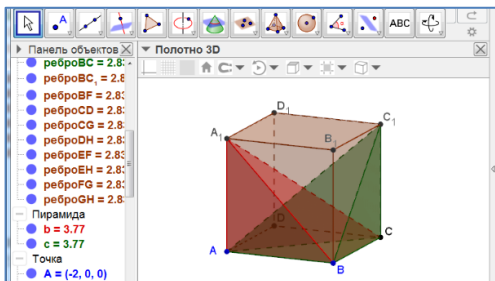


Рис. 9.7

**Задача 8.** Указанные пирамиды показаны на рисунке 9.8. Их общей частью является треугольная пирамида. Её объём равен  $\frac{1}{12}$ .

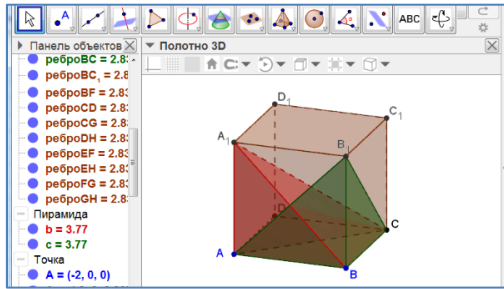


Рис. 9.8

**Задача 9.** Указанные пирамиды показаны на рисунке 9.9. Их общей частью является четырёхугольная пирамида. Её объём равен  $\frac{1}{6}$ .

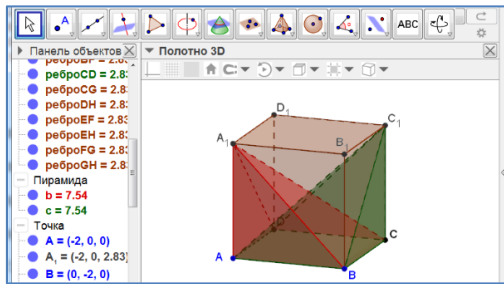


Рис. 9.9

**Задача 10.** Указанные пирамиды показаны на рисунке 9.10. Объём их общей части равен  $\frac{5}{24}$ .

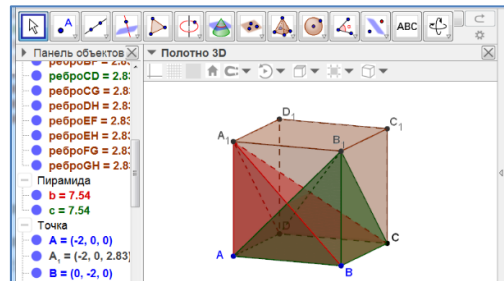


Рис. 9.10

**Задача 11.** Искомая призма изображена на рисунке 9.11. Её объём равен  $\frac{1}{4}$ .

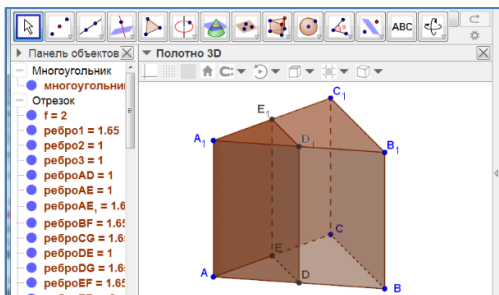


Рис. 9.11

**Задача 12.** Искомая призма изображена на рисунке 9.12. Её объём равен  $\frac{1}{4}$ .

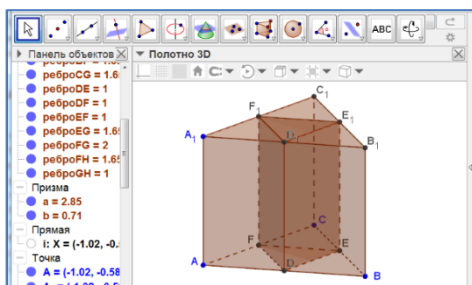


Рис. 9.12

**Задача 13.** Искомый многогранником является четырёхугольная пирамида (рис. 9.13). Её объём равен  $\frac{2}{3}$ .

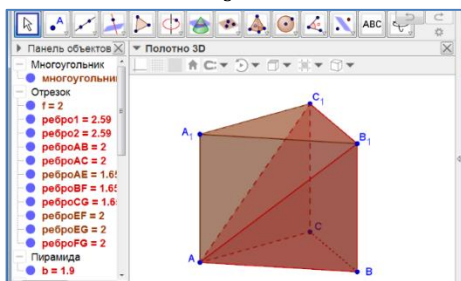


Рис. 9.13



**Задача 14.** Искомым многогранником является треугольная пирамида (рис. 9.14). Её объём равен  $\frac{1}{3}$ .

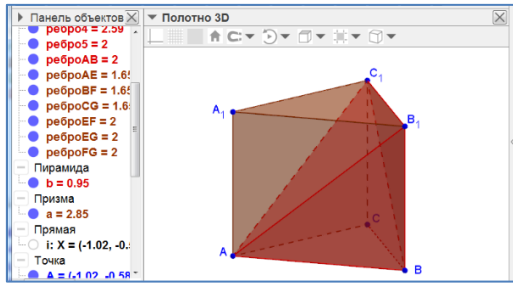


Рис. 9.14

**Задача 15.** Указанные пирамиды показаны на рисунке 9.15. Объём их общей части равен  $\frac{1}{6}$ .

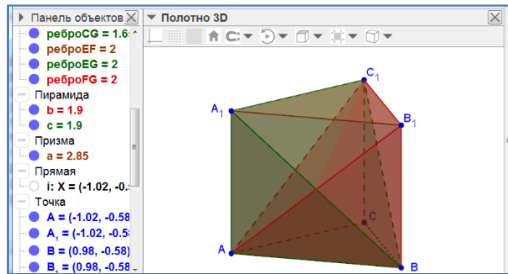


Рис. 9.15

**Задача 16.** Искомым многогранником является треугольная пирамида (рис. 9.16). Её объём равен  $\frac{1}{18}$ .

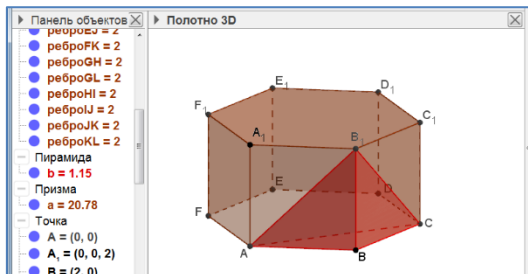


Рис. 9.16

**Задача 17.** Искомым многогранником является треугольная пирамида (рис. 9.17). Её объём равен  $\frac{1}{18}$ .

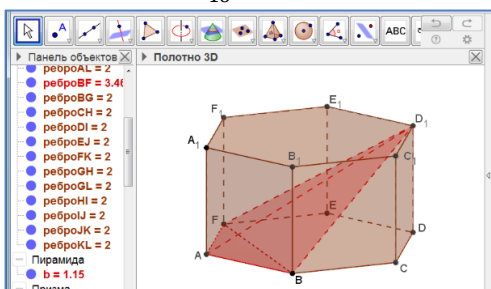


Рис. 9.17

**Задача 18.** Искомым многогранником является треугольная пирамида (рис. 9.18). Её объём равен  $\frac{1}{18}$ .

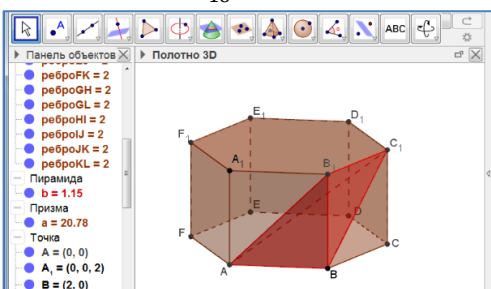


Рис. 9.18

**Задача 19.** Искомым многогранником является четырёхугольная пирамида (рис. 9.19). Её объём равен  $\frac{2}{9}$ .

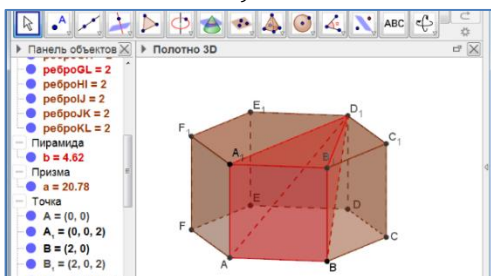


Рис. 9.19

**Задача 20.** Вода занимает  $\frac{1}{8}$  часть объёма сосуда.

**Задача 21.** Искомой общей частью является фигура, состоящая из двух конусов с общим основанием (рис. 9.20). Её объём равен  $\frac{1}{4}$ .

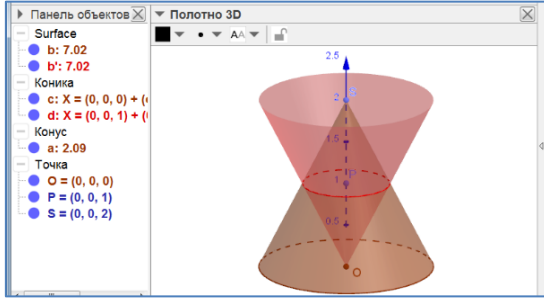


Рис. 9.20

**Задача 22.** Объём меньшего шара составляет примерно половину объёма большего шара.

## 10. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

### Графики функций

**Задача 1.**  $f(x,y)=ax + by + c$ .

1. Создадим ползунки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
2. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=ax+by+c$ .
3. Нажмем «Enter». Получим изображение плоскости (рис. 10.1).

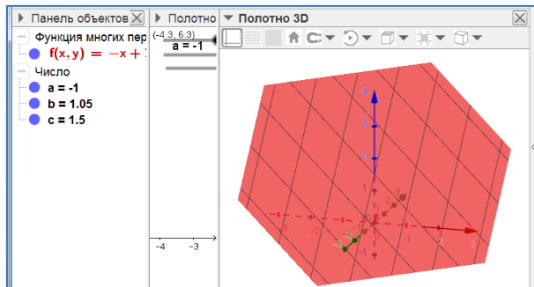


Рис. 10.1

**Задача 2.**  $f(x,y) = x^2 + y^2$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=x^2+y^2$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.2)

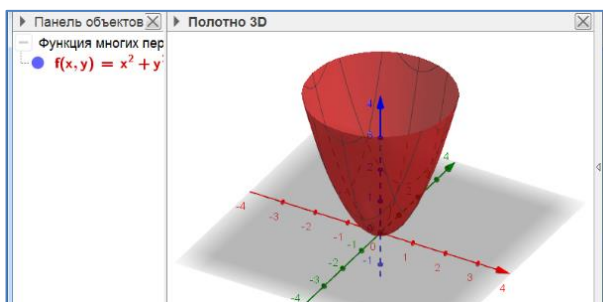


Рис. 10.2

**Задача 3.**  $f(x,y) = x^2 - y^2$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=x^2-y^2$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.3).

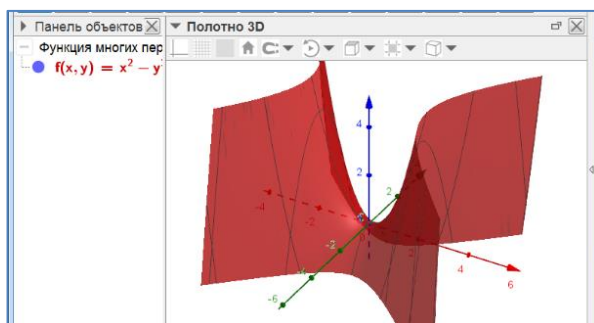


Рис. 10.3

**Задача 4.**  $f(x,y) = xy$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=xy$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.4).

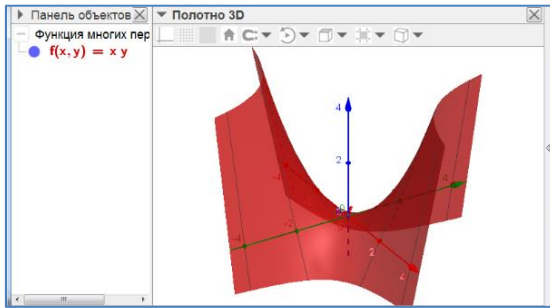


Рис. 10.4

**Задача 5.**  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=\text{sqrt}(x^2+y^2)$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.5).

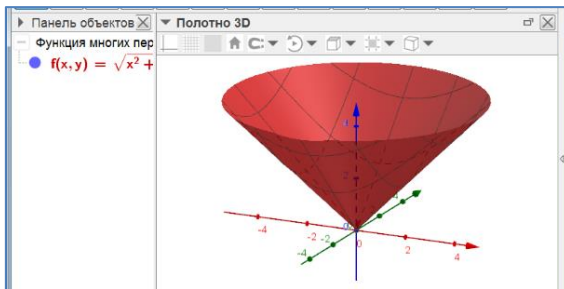


Рис. 10.5

**Задача 6.**  $f(x,y) = |x| + |y|$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=|x|+|y|$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.6).

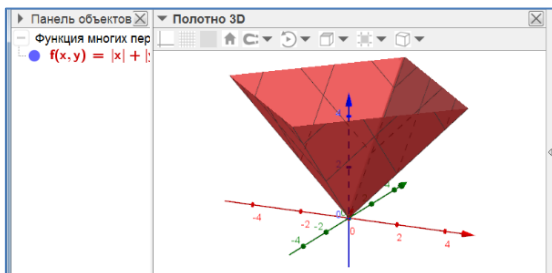


Рис. 10.6

**Задача 7.**  $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=\sin(x) + \sin(y)$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.7).

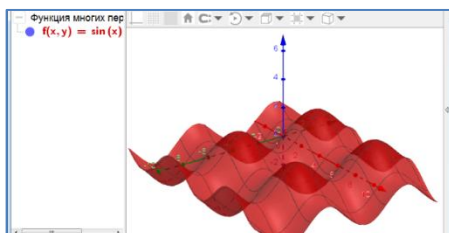


Рис. 10.7

**Задача 8.**  $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.8).

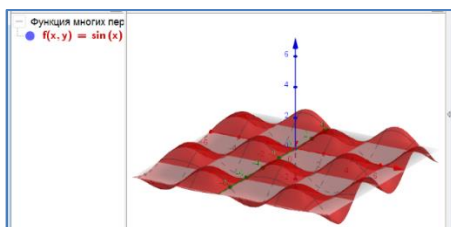


Рис. 10.8

**Задача 9.**  $f(x,y) = \sin(xy)$ .

1. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=\sin(xy)$ .
2. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.9).

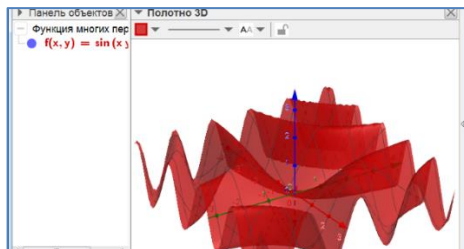


Рис. 10.9

**Задача 10.**  $f(x,y) = \frac{a}{1+x^2+y^2}$ .

1. Создадим ползунок  $a$ .
2. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=a/(1+x^2+y^2)$ .
3. Нажмем «Enter». Получим график функции (рис. 10.10).

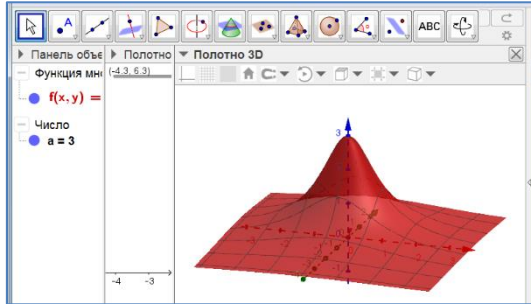


Рис. 10.10

**Задача 11.**  $x + y + z = c$ .

1. Создадим ползунок  $c$ .
  2. В строке «Ввод» наберём  $x+y+z=c$ .
- Нажмем «Enter». Получим изображение плоскости (рис. 10.11).

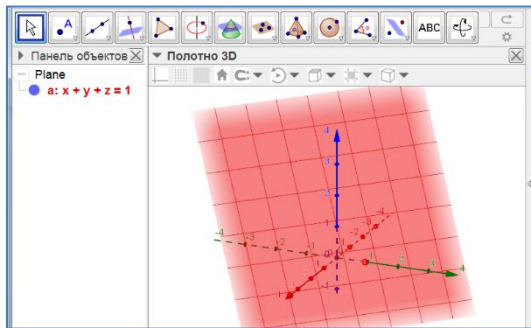


Рис. 10.11

**Задача 12.**  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

1. Создадим ползунок  $R$ .
2. В строке «Ввод» наберём  $x^2+y^2+z^2=R^2$ .

3. Нажмем «Enter». Получим изображение сферы (рис. 10.12).

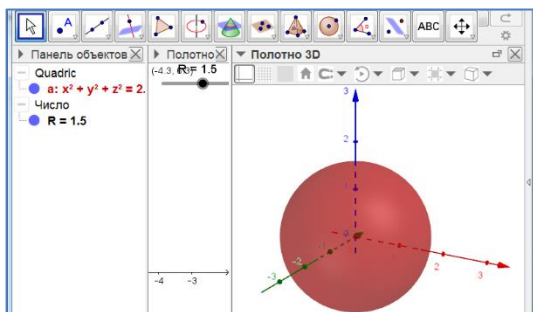


Рис. 10.12

**Задача 13.**  $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ .

1. Создадим ползунок R.
2. В строке «Ввод» наберём  $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ .
3. Нажмем «Enter». Получим изображение гиперболоида (рис. 10.13).

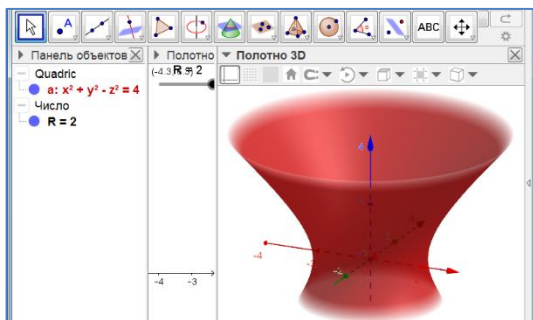


Рис. 10.13

**Задача 14.** 
$$\begin{cases} x = a \sin(t), \\ y = a \cos(t), \\ z = bt. \end{cases}$$

1. Создадим ползунки a и b.
2. В строке «Ввод» наберём  $f(t) = a \sin(t)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $g(t) = a \cos(t)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $h(t) = bt$ . Нажмём «Enter».



3. Скроем графики функций  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $h(t)$ .
4. В строке «Ввод» наберём Кривая[ $f(t),g(t),h(t),t,-8\pi,8\pi$ ]. Нажмём «Enter». Получим изображение винтовой линии (рис. 10.14).

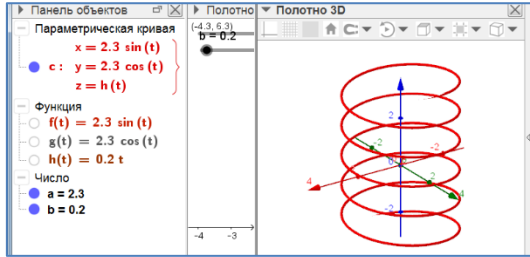


Рис. 10.14

Задача 15. 
$$\begin{cases} x = u \sin(v), \\ y = u \cos(v), \\ z = av. \end{cases}$$

1. Создадим ползунок  $a$ .
2. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=x\sin(y)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $g(x,y)=x\cos(y)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $h(x,y)=ay$ . Нажмём «Enter».
3. Скроем графики функций  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$ ,  $h(x,y)$ .
4. В строке «Ввод» наберём Поверхность[ $f(x,y),g(x,y),h(x,y),x,-2,2,y,-2\pi,2\pi$ ]. Нажмём «Enter». Получим изображение геликоида (рис. 10.15).

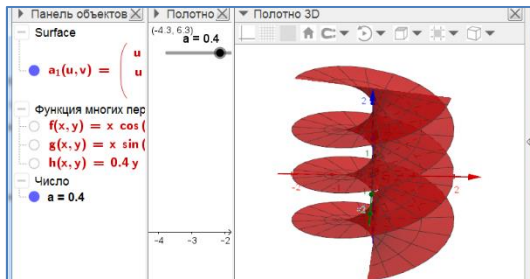


Рис. 10.15

Задача 16. 
$$\begin{cases} x = (a + \cos(u)) \cos(v), \\ y = (a + \cos(u)) \sin(v), \\ z = \sin(u). \end{cases}$$

1. Создадим ползунок  $a$ .
2. В строке «Ввод» наберём  $f(x,y)=(a+\cos(x))\cos(y)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $g(x,y)=(a+\cos(x))\sin(y)$ . Нажмём «Enter». Наберём  $h(x,y)=\sin(x)$ . Нажмём «Enter».
3. Скроем графики функций  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$ ,  $h(x,y)$ .
4. В строке «Ввод» наберём Поверхность[f(x,y),g(x,y),h(x,y),x,0,2Pi,y,0,2Pi]. Нажмём «Enter». Получим изображение тора (рис. 10.16).

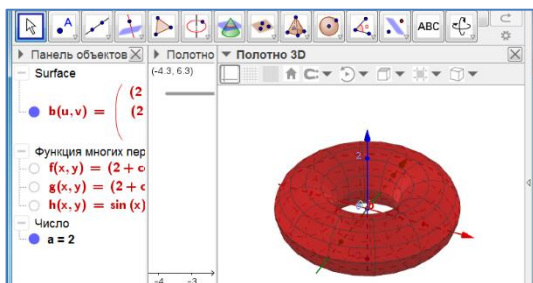


Рис. 10.16

Задача 17. Вращением графика показательной функции  $f(x) = a^x$ .

Задача 18. Вращением графика функции  $f(x) = \cos x$ .

Задача 19. Вращением графика функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

Задача 20. Тор.



Смирнов Владимир Алексеевич  
Смирнова Ирина Михайловна

ГЕОМЕТРИЯ С GEOGEBRA.  
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Подписано в печать 31.01.2018  
Формат 60 × 84/16. Объем 11 п.л.  
Тираж 500 экз. Заказ № 691

Издательство «Прометей»  
115035 г. Москва, ул. Садовническая, 72, стр. 1  
Тел./факс: 8 (495) 799-54-29  
E-mail: info@prometej.su

ISBN 978-5-907003-42-2

